1. Δύο επιχειρήσεις A και B παράγουν το ίδιο προϊόν με (αντίστροφη) συνάρτηση ζήτησης p=10–Q, όπου p είναι η τιμή του προϊόντος και Q η συνολική ποσότητα. Κάθε επιχείρηση i (i=A,B) μπορεί να επιλέξει να παράγει ποσότητα Q_i=2 ή Q_i=4. Οι δύο επιχειρήσεις έχουν συνάρτηση ολικού κόστους $TC_i=Q_i$. Αν η επιχείρηση A επιλέγει πρώτη, ενώ η επιχείρηση B επιλέγει δεύτερη έχοντας παρατηρήσει την επιλογή της A, τι ποσότητα θα επιλέξει κάθε επιχείρηση;

Αφού ο Α κινείται πρώτος πρέπει να υπολογίσει την άριστη αντίδραση του Β για τις δύο δυνητικές επιλογές του Α. Δηλαδή, τα μέγιστα κέρδη του Β στην κάθε περίπτωση. Στην συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσει τα δικά του κέρδη για τις δύο επιλογές του, και να επιλέξει αυτή που θα του δώσει το μέγιστο κέρδος.

2. Σε έναν κλάδο η ζήτηση για ένα προϊόν δίνεται από την (αντίστροφη) συνάρτηση ζήτησης p=120–Q. Κάθε επιχείρηση i που δραστηριοποιείται στον κλάδο έχει συνολικό κόστος $100+Q_i^2$, όπου Q_i η παραγόμενη ποσότητα της επιχείρησης i.
A) Υπολογίστε την τιμή και την ποσότητα που θα προσφερθεί στις περιπτώσεις που 2 επιχειρήσεις εισέλθουν στον κλάδο.

Οι στρατηγικές της κάθε επιχείρησης ειναι η επιλογή της ποσότητας που θα προσφέρει.
Η συνάρτηση κερδών της 1 είναι $\pi_1=(120-Q_1-Q_2)Q_1-(100+Q_1^2)$
Και της 2 είναι $\pi_2=(120-Q_1-Q_2)Q_2-(100+Q_2^2)$

Οπότε η καλύτερη αντίδραση της 1 για κάθε επιλογή της 2 δίνεται από
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1}=(120-Q_1-Q_2)-Q_1-2Q_1=0$$
οπότε η συνάρτηση καλύτερης αντίδρασης της 1 είναι
$$Q_1(Q_2)=\frac{120-Q_2}{4}$$

Παρομοίως λύνουμε για την καλύτερη αντίδραση της 2.
Αν μια στρατηγική αποτελεί ταυτόχρονα αμοιβαία καλύτερη αντίδραση για τις δύο επιχειρήσεις τότε προδιορίζει σημείο ισορροπίας κατά Nash. Οπότε λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που δίνεται από τις συναρτήσεις καλύτερης αντίδρασης και έχουμε $Q_1=Q_2=21.18$

B) Υπολογίστε το πλεόνασμα των καταναλωτών. Συγκρίνοντας τα δύο αυτά μεγέθη τι συμπέρασμα βγάζετε;

Η συνολική ποσότητα που θα προσφερθεί στην αγορά είναι 42.36. Άρα η τιμή είναι 120-42.36=77.64

Άρα το πλεόνασμα των καταναλωτών είναι $CS=\frac{1}{2}(120-77.64)42.36=897.18$

3. Έστω μια επιχείρηση που δρα μονοπωλιακά στον κλάδο της. Η ζήτηση για το προϊόν της επιχείρησης δίνεται από την (αντίστροφη) συνάρτηση ζήτησης p=100–Q, όπου p είναι η τιμή του προϊόντος και Q είναι η ζητούμενη ποσότητα στην τιμή αυτή. Η συνάρτηση ολικού κόστους της επιχείρησης είναι TC=20Q.
Υπολογίστε την αύξηση του πλεονάσματος του καταναλωτού και την μείωση του κέρδους της επιχείρησης που θα προκύψει αν η ρυθμιστική αρχή αναγκάσει την επιχείρηση να εξισώσει την τιμή του αγαθού με το οριακό κόστος.

Τα κέρδη της επιχείρησης όταν δρα ελεύθερα απο κρταική παρέμβαση δίνονται από $\pi = (100 - Q)Q - 20Q$.

Άρα τα άριστα κέρδη δίνονται από $\frac{\partial \pi}{\partial Q} = (100 - Q) - Q - 20 = 0$

Οπότε Q=40 και P=60. Τα κέρδη θα είναι 1600. Το πλεόνασμα των καταναλωτών θα είναι $CS = \frac{1}{2}(100 - 60)40 = 800$

Αν η κυβέρνηση επιβάλει τιμή P=20, η ποσότητα που θα προσφεθεί είναι 80. (αντικαθιστούμε την τιμή στην συνάρτηση ζήτησης και λύνουμε ως προς την ποσότητα). Τα κέρδη θα είναι μηδενικά ενώ το πλεόνασμα των καταναλωτών θα είναι $CS = \frac{1}{2}(100 - 20)80 = 3200$

4. Έστω δυοπώλειο Cournot, όπου η συνολική προσφορά είναι $q = q_1 + q_2$ και η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι $P = \alpha - \beta q$. Το οριακό κόστος της κάθε επιχείρησης είναι c_i , i=1,2 και $c_1 = \gamma c_2$, $\gamma > 1$.
Α) Ποιά η τιμή και οι προσφερόμενες ποσότητες ισορροπίας;

Η συνάρτηση κερδών της 1 είναι

$$\pi_1 = \left(\alpha - \beta(q_1 + q_2)\right)q_1 - c_1 q_1$$

$$\pi_2 = \left(\alpha - \beta(q_1 + q_2)\right)q_2 - c_2 q_2$$

Οι συνθήκες μεγιστοποίησης του κέρδους της 1 και της 2 αντίστοιχα είναι

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \left(\alpha - \beta(q_1 + q_2)\right) - \beta q_1 - c_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \left(\alpha - \beta(q_1 + q_2)\right) - \beta q_2 - c_2 = 0$$

οπότε οι συναρτήσεις αντίδρασης των δύο επιχειρήσεων είναι

$$q_1 = \frac{\alpha - \beta q_2 - c_1}{2\beta}$$

$$q_2 = \frac{\alpha - \beta q_1 - c_2}{2\beta}$$

οι ποσότητες ισορροπίας είναι

$$q_1 = \frac{\alpha + c_2 - 2c_1}{2\beta}$$
$$q_2 = \frac{\alpha + c_1 - 2c_2}{2\beta}$$

και η τιμή ισορροπίας είναι

$$P = \frac{\alpha + c_1 + c_2}{3} = \frac{\alpha + (\gamma + 1)c_2}{3}$$

Β) πως μεταβάλεται η τιμή όσο το γ τείνει προς το 1; Εξηγείστε.

Είναι φανερό ότι όσο το γ προσεγγίζει το 1, η τιμή μειώνεται. Δηλαδή, η αύξηση της παραγωγικότητας μειώνει τις τιμές.

5. Έστω δυοπώλιο ηγεσίας ως προς την ποσότητα τύπου Stackelberg όπου η επιχείρηση Α είναι ο ηγέτης και η Β ο ακόλουθος. Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι $P = \alpha - \beta Q$. Οι συναρτήσεις κόστους είναι $C_i = c_i q_i$, $c_A > c_B$.

A) Ποιές οι συναρτήσεις αντίδρασης των δύο επιχειρήσεων;
   Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μόνο μια συνάρτηση αντίδρασης, αυτή της επιχείρησης Β, που είναι ο ακόλουθος (παίζει δεύτερη κατά συνέπεια αντιδρά στην κίνηση του ηγέτη.)
   Τα κέρδη του Β είναι
   $$\pi_{\mathrm{B}} = \left(\alpha - \beta(q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}})\right) q_{\mathrm{B}} - c_{\mathrm{B}} q_{\mathrm{B}}$$
   η συνθήκη πρώτης τάξης είναι
   $$\frac{\partial \pi_{\mathrm{B}}}{\partial q_{\mathrm{B}}} = \left(\alpha - \beta(q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}})\right) - \beta q_{\mathrm{B}} - c_{\mathrm{B}} = 0$$
   και η συνάρτηση αντίδρασης του Β είναι
   $$q_{\mathrm{B}} = \frac{\alpha - \beta q_{\mathrm{A}} - c_{\mathrm{B}}}{2\beta}$$

B) Για ποιά διαφορά στο οριακό κόστος η προσφορά του ηγέτη θα είναι μηδενική;

   Τα κέρδη του Α είναι
   $$\pi_{\mathrm{A}} = \left(\alpha - \beta(q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}})\right) q_{\mathrm{A}} - c_{\mathrm{A}} q_{\mathrm{A}}$$
   και χρησιμοποιώντας της συνάρτηση αντίδρασης του Β
   $$\pi_{\mathrm{A}} = \left(\alpha - \beta(q_{\mathrm{A}} + \frac{\alpha - \beta q_A - c_B}{2\beta})\right) q_{\mathrm{A}} - c_{\mathrm{A}} q_{\mathrm{A}}$$

   η συνθήκη πρώτης τάξης είναι

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial q_A} = \frac{\alpha - \beta q_A - c_B}{2} - \frac{\beta q_A}{2} - c_A = 0$$

και η άριστη ποσότητα του Α είναι

$$q_A = \frac{\alpha - c_B - 2c_A}{2\beta}$$

εισαγάγοντας την σχέση μεταξύ του οριακού κόστους των δύο επιχειρήσεων και λύνοντας για $q_A = 0$ έχουμε ότι για

$\gamma = \dfrac{\alpha - c_B}{2c_B}$ η επιχείρηση Α δεν θα εισέλεθει στην αγορά.