Έστω ένα παίγνιο G σε κανονική μορφή και $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$ οι χώροι στρατηγικής των δύο παιχτών του παιγνίου οι οποίοι έχουν συναρτήσεις χρησιμότητας $u_1(x, y) = x^2 - 2xy, u_2(x, y) = xy - y^2$. Να δείξετε ότι το συγκεκριμένο παίγνιο δεν έχει ισορροπία Nash.

Ο παίχτης 1 επιλέγει τη στρατηγική του $x \in \mathbb{R} =: S_1$ με δεδομένη τη στρατηγική y του παίχτη 2. Αντίστοιχα ο παίχτης 2 επιλέγει τη στρατηγική του $y \in \mathbb{R} =: S_2$ με δεδομένη τη στρατηγική x του παίχτη 1. Οι παίχτες 1 και 2 μεγιστοποιούν τη χρησιμότητά τους. Συνεπώς μια ισορροπία Nash $(x^*, y^*) \in S_1 \times S_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, αν υπάρχει, πρέπει να ικανοποιεί το (Σ) των εξισώσεων:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 2x - 2y = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = x - 2y = 0$$

Ισοδύναμα:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ x - 2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

Όσον αφορά το πρόσημο των $\frac{\partial^2 u_1(0,0)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_2(0,0)}{\partial y^2}$ έχουμε:

$$\frac{\partial^2 u_1(0,0)}{\partial x^2} = 2 > 0,$$

δηλαδή ο παίχτης 1 ελαχιστοποιεί τη χρησιμότητά του με δεδομένη τη στρατηγική του παίχτη 2. Προφανώς η λύση (0,0) δε μπορεί να γίνει αποδεκτή. Άρα το παίγνιο σε κανονική μορφή $G = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}; x^2 - 2xy, xy - y^2\}$ δεν έχει ισορροπία Nash. Τονίζουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε και το πρόσημο της $\frac{\partial^2 u_2(0,0)}{\partial y^2}$ με δεδομένο ότι βρήκαμε $\frac{\partial^2 u_1(0,0)}{\partial x^2} = 2 > 0$.

<u>Παρέκβαση σχετικά με το μαθηματικό συμβολισμό</u>: Στην αρχή της λύσης χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο "$=:$" όταν γράφαμε $x \in \mathbb{R} =: S_1$ και $y \in \mathbb{R} =: S_2$. Αυτό το σύμβολο διαβάζεται "ορίζεται ως." Έτσι για παράδειγμα

η μαθηματική έκφραση $A := B$ διαβάζεται "το A ορίζεται ως B" ενώ η μαθηματική έκφραση $A =: B$ διαβάζεται "το B ορίζεται ως A".