Η συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern ή συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας

Έστω $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ένα σύνολο από n το πλήθος αποτελέσματα, κάθε ένα από τα οποία συνδέεται με κάποιο ρίσκο (π.χ. τα παιχνίδια τύχης του καζίνο). Αν η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή είναι η $u(x)$ και οι πιθανότητες των ενδεχομένων $x_1, x_2, ..., x_n$ κατανέμονται σύμφωνα με μια κατανομή πιθανότητας η οποία έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας την $p(x)$, τότε η συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern ή συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας είναι η μαθηματική ελπίδα της συνάρτησης χρησιμότητας $u(x)$, δηλαδή

Συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern ή συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας $\equiv E(u(x)) = \sum_x u(x)p(x)$.

Αν ο χώρος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι συνεχής, δηλαδή είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας όπως το $X = \left[\underline{x}, \overline{x}\right]$, τότε θεωρώντας ότι η κατανομή πιθανότητας των ενδεχομένων έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $f(x)$, η συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern ή συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας, $E(u(x))$, είναι η ακόλουθη:

$$E(u(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)f(x)dx = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(x)f(x)dx .$$

Αν $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ και $p(x_1) = 1, p(x_2) = 0, ..., p(x_n) = 0$, τότε η συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern είναι η βέβαιη χρησιμότητα $u(x_1)$, δηλαδή

$$E(u(x)) = \sum_x u(x)p(x) = u(x_1)\cdot 1 + u(x_2)\cdot 0 + ... + u(x_n)\cdot 0 = u(x_1) .$$

Άρα η βέβαιη χρησιμότητα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern. Στο πλαίσιο της θεωρίας προσδοκώμενης χρησιμότητας εν γένει, η συνάρτηση χρησιμότητας $u(x)$ η οποία υπεισέρχεται μέσα στη μαθηματική ελπίδα $E(u(x))$ αναφέρεται μερικές φορές και ως συνάρτηση χρησιμότητας Bernoulli.