Έστω ένα παίγνιο τριών ατόμων στο οποίο ο χώρος στρατηγικής κάθε παίχτη είναι η ανοιχτή ημιευθεία $S_i = (0,+\infty), i = 1,2,3$. Οι συναρτήσεις απόδοσης των παιχτών δίνονται ως εξής:

$$u_1(x,y,z) = 2xz - x^2 y \text{ , } u_2(x,y,z) = \sqrt{12(x+y+z)} - y \text{ , } u_3(x,y,z) = 2z - xyz^2$$

Να βρεθεί η ισορροπία Nash (x^*, y^*, z^*) του παιγνίου.

Ο παίχτης 1 επιλέγει τη στρατηγική του $x \in S_1 = (0,+\infty)$ με δεδομένες τις στρατηγικές y και z των παιχτών 2 και 3 αντίστοιχα. Ο παίχτης 2 επιλέγει τη στρατηγική του $y \in S_2 = (0,+\infty)$ με δεδομένες τις στρατηγικές x και z των παιχτών 1 και 3 αντίστοιχα. Τέλος ο παίχτης 3 επιλέγει τη στρατηγική του $z \in S_3 = (0,+\infty)$ με δεδομένες τις στρατηγικές x και y των παιχτών 1 και 2 αντίστοιχα. Οι 1, 2 και 3 μεγιστοποιούν την απόδοσή τους. Άρα η ισορροπία Nash (x^*, y^*, z^*) του παιγνίου ικανοποιεί το ακόλουθο (Σ) εξισώσεων:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 2z - 2xy = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{12}{2\sqrt{12(x+y+z)}} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z} = 2 - 2xyz = 0$$

Ισοδύναμα:

$$\left.\begin{array}{l} z = xy \\ \dfrac{6}{\sqrt{12(x+y+z)}} = 1 \\ xyz = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = xy \\ \sqrt{12(x+y+z)} = 6 \\ z^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ 12(x+y+1) = 36 \\ z = 1 \ (z \in (0,+\infty)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ x+y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(2-x) = 1 \\ y = 2-x \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2-x \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x-1)^2 = 0 \\ y = 2-x \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Όσον αφορά το πρόσημο των $\dfrac{\partial^2 u_1(1,1,1)}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u_2(1,1,1)}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 u_3(1,1,1)}{\partial z^2}$ έχουμε τα εξής:

$$\frac{\partial^2 u_1(1,1,1)}{\partial x^2} = -2\cdot 1 = -2 < 0,\ \ \frac{\partial^2 u_2(1,1,1)}{\partial y^2} = -\frac{6\dfrac{12}{2\sqrt{12(1+1+1)}}}{12(1+1+1)} = -\frac{1}{6} < 0 \text{ και}$$

$$\frac{\partial^2 u_3(1,1,1)}{\partial z^2} = -2\cdot 1\cdot 1 = -2 < 0$$

Άρα η (μοναδική) ισορροπία Nash του συγκεκριμένου παιγνίου είναι η $(x^*, y^*, z^*) = (1,1,1)$.