Έστω ένα στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης δύο παιχτών, 1 και 2, με χώρους στρατηγικής τα δισύνολα $S_1 = S_2 = \{H, T\}$. Οι αποδόσεις, σε μορφή πινάκων, του παιγνίου είναι οι ακόλουθες:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}, P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Να βρεθούν οι ισορροπίες Nash του παιγνίου σε καθαρές και μεικτές στρατηγικές. Να σχεδιάσετε τις αντιστοιχίες βέλτιστης απόκρισης των 1 και 2.

Γράφουμε το παίγνιο σε κανονική μορφή σημειώνοντας με το θετικό πρόσημο (+) τη βέλτιστη στρατηγική του παίχτη 1 για κάθε δεδομένη στρατηγική του παίχτη 2 και με το αρνητικό πρόσημο (-) τη βέλτιστη στρατηγική του παίχτη 2 για κάθε δεδομένη στρατηγική του παίχτη 1:

		2	
		H	T
1	H	(+)1,-1	-1,1(-)
	T	-1,1(-)	(+)1,-1

Ο παίχτης 1 σκέφτεται ότι αν ο παίχτης 2 παίξει H τότε η βέλτιστη στρατηγική για τον ίδιο είναι να παίξει και αυτός H με δεδομένο ότι 1>-1. Σημειώνουμε αυτή τη στρατηγική του 1 με το θετικό πρόσημο (+). Αν ο 2 παίξει T τότε η βέλτιστη στρατηγική του 1 είναι να παίξει και αυτός T με δεδομένο ότι 1>-1 (θετικό πρόσημο (+)). Αντίστοιχα ο 2 σκέφτεται ότι αν ο 1 παίξει H τότε η βέλτιστη στρατηγική για τον ίδιο είναι η T με δεδομένο ότι 1>-1 (αρνητικό πρόσημο (-)). Αν ο 1 παίξει T τότε η βέλτιστη στρατηγική για τον 2 είναι να παίξει H με δεδομένο ότι 1>-1 (αρνητικό πρόσημο (-)). Παρατηρούμε ότι για κάθε στρατηγική η οποία ανήκει στο σύνολο $S_1 \times S_2 = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ (δηλ. σε κάθε κελί του πίνακα της κανονικής μορφής) ο ένας από τους δύο παίχτες έχει κίνητρο να αποκλίνει. Άρα δεν υπάρχει ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές. Ωστόσο από αποτέλεσμα ύπαρξης ισορροπιών Nash γνωρίζουμε ότι το συγκεκριμένο παίγνιο θα έχει οπωσδήποτε ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές με δεδομένο ότι δεν έχει ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές. Στον παρακάτω πίνακα δείχνουμε, χάριν ευκολίας, τις κατανομές πιθανότητας $(p, 1-p), (q, 1-q)$, $0 \le p, q \le 1$, των παιχτών 1 και 2 αντίστοιχα (ο παίχτης 1 παίζει στις γραμμές και ο παίχτης 2 παίζει στις στήλες του πίνακα της κανονικής μορφής):

			2	
			q	1-q
			H	T
1	p	H	(+)1,-1	-1,1(-)
	1-p	T	-1,1(-)	(+)1,-1

Η προσδοκώμενη απόδοση των 1 και 2 είναι:

$$\pi_1(p,q) = 1pq + (-1)p(1-q) + (-1)(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = p(4q-2) - 2q + 1$$

$$\pi_2(p,q) = (-1)pq + 1p(1-q) + 1(1-p)q + (-1)(1-p)(1-q) = q(2-4p) + 2p - 1$$

αντίστοιχα.

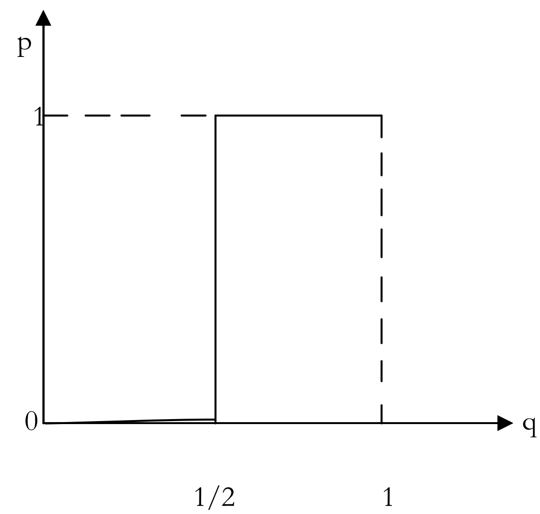
Η π_1 έχει κλίση $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial p} = 4q-2$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το αν η κλίση της π_1 είναι θετική, αρνητική ή ίση με το μηδέν, αντίστοιχα, προκειμένου να βρούμε σε ποιό p η προσδοκώμενη απόδοση του παίχτη 1 είναι μέγιστη:

- Αν $4q-2>0 \Leftrightarrow q>\dfrac{1}{2}$ τότε η π_1 παρουσιάζει απόλυτο (ή ολικό) μέγιστο στο $p=1$
- Αν $4q-2<0 \Leftrightarrow q<\dfrac{1}{2}$ τότε η π_1 παρουσιάζει απόλυτο (ή ολικό) μέγιστο στο $p=0$
- Αν $4q-2=0 \Leftrightarrow q=\dfrac{1}{2}$ τότε η π_1 παρουσιάζει απόλυτο (ή ολικό) μέγιστο σε κάθε θέση (σημείο) $p \in [0,1]$

Άρα η αντιστοιχία βέλτιστης απόκρισης του παίχτη 1 δίνεται από τον τύπο:

$$BR_1(q) = \begin{cases} p=1, \text{ αν } q>\dfrac{1}{2} \\ p\in[0,1], \text{ αν } q=\dfrac{1}{2} \\ p=0, \text{ αν } q<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Το γράφημα της BR_1, στο τετράγωνο $[0,1]^2 = [0,1]\times[0,1]$, δίνεται παρακάτω:



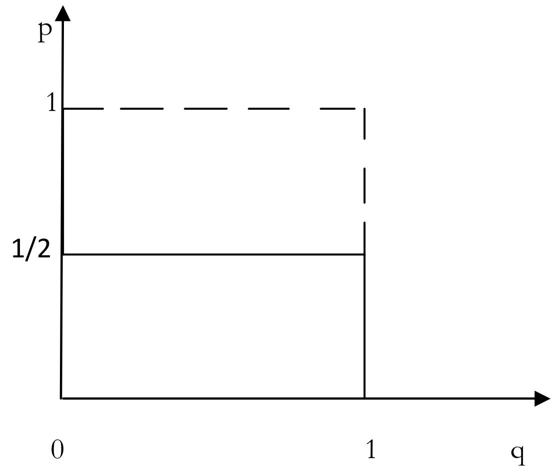
Η π_2 έχει κλίση $\frac{\partial \pi_2}{\partial q} = 2 - 4p$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το αν η κλίση της π_2 είναι θετική, αρνητική ή ίση με το μηδέν, αντίστοιχα, προκειμένου να βρούμε σε ποιό q η προσδοκώμενη απόδοση του παίχτη 2 είναι μέγιστη:

- Αν $2-4p>0 \Leftrightarrow p<\frac{1}{2}$ τότε η π_2 παρουσιάζει απόλυτο (ή ολικό) μέγιστο στο $q=1$
- Αν $2-4p<0 \Leftrightarrow p>\frac{1}{2}$ τότε η π_2 παρουσιάζει απόλυτο (ή ολικό) μέγιστο στο $q=0$
- Αν $2-4p=0 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$ παρουσιάζει απόλυτο (ή ολικό) μέγιστο σε κάθε θέση (σημείο) $q \in [0,1]$

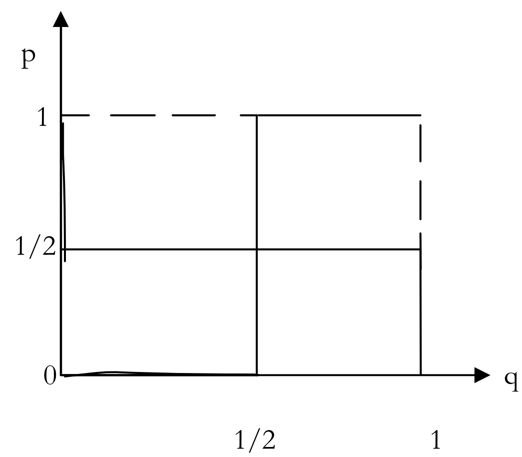
Άρα η αντιστοιχία βέλτιστης απόκρισης του παίχτη 2 δίνεται από τον τύπο:

$$BR_2(p) = \begin{cases} q=1, \text{ αν } p<\frac{1}{2} \\ q \in [0,1], \text{ αν } p=\frac{1}{2} \\ q=0, \text{ αν } p>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Το γράφημα της BR_2, στο τετράγωνο $[0,1]^2 = [0,1]\times[0,1]$, δίνεται παρακάτω:



Το σημείο τομής των BR_1 και BR_2, στο τετράγωνο $[0,1]^2 = [0,1]\times[0,1]$, είναι η ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές (NEMS):



Άρα η ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές είναι η $(q, p) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ την οποία μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε λύνοντας το γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial p} &= 4q - 2 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q} &= 2 - 4p = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \\ p &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

Σημείωση: Οι $BR_1(q)$ και $BR_2(p)$ στα μαθηματικά λέγονται αντιστοιχίες (correspondences) ή πλειότιμες συναρτήσεις. Συγκεκριμένα ενώ μια συνάρτηση απεικονίζει έναν αριθμό σε έναν άλλο αριθμό, η αντιστοιχία ή πλειότιμη συνάρτηση απεικονίζει έναν αριθμό σε ένα σύνολο. Για παράδειγμα η $BR_1(q)$ απεικονίζει τον αριθμό $q=\frac{1}{2}$ στο σύνολο $\{p:0\le p\le 1\}=[0,1]$ το οποίο μάλιστα λέγεται κλειστό διάστημα με άκρα τα σημεία 0 και 1. Η $BR_2(p)$ απεικονίζει τον αριθμό $p=\frac{1}{2}$ στο σύνολο $\{q:0\le q\le 1\}=[0,1]$.