

Πρώτο σύνολο προβλημάτων στη Θεωρία Παιγνίων

Ηρ. Κόλλιας, Χειμερινό εξάμηνο Ακ. Έτους 2017-2018

Προθεσμία παράδοσης: Δευτέρα 04/12/2017.

Η παράδοση μπορεί να γίνει (α) Στο μάθημα. (β) Ηλεκτρονικά στη διεύθυνση [hkollias@econ.uoa.gr](mailto:hkollias@econ.uoa.gr). (γ)

Κατά τις ώρες γραφείου, Δευτέρα 13.00-15.00, Γρ. 411, Γρυπάρειο Μέγαρο.

**Θέμα 1ο.** Έστω το ακόλουθο στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε κανονική μορφή με συνεχείς χώρους στρατηγικής: Οι παίχτες είναι οι 1 και 2, οι χώροι στρατηγικής είναι η πραγματική ευθεία  $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$  και οι χρησιμότητες von Neumann-Morgenstern δίνονται από τις συναρτήσεις  $u_1$  και  $u_2$  με τύπους

$$u_1(x, y) = y^2 - xy - x^2 - 2x + y \text{ και } u_2(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y, \text{ αντίστοιχα. Ο παίχτης 1}$$

επιλέγει μια στρατηγική (αριθμό)  $x \in S_1$ . Ο παίχτης 2 επιλέγει μια στρατηγική (αριθμό)  $y \in S_2$ . Να βρεθεί, αν υπάρχει, η ισορροπία Nash. Με τα ίδια, κατά τα άλλα, δεδομένα αλλά με συναρτήσεις χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern των παιχτών 1 και 2 τις  $u_1(x, y) = x^2 - 2xy$  και  $u_2(x, y) = xy - y^2$ , αντίστοιχα, να δείξετε ότι δεν υπάρχει ισορροπία Nash.

**Θέμα 2ο.** Έστω το ακόλουθο στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης: Δύο επιχειρήσεις, 1 και 2, επιλέγουν ταυτόχρονα την τιμή του προϊόντος το οποίο παράγει η καθεμία. Η υπόθεση η οποία γίνεται είναι ότι κάθε επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος της. Η συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος της επιχείρησης 1 είναι η  $Q_1$  με τύπο  $Q_1(P_1, P_2) = A - P_1 + bP_2$ . Η συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος της επιχείρησης 2 είναι η  $Q_2$  με τύπο  $Q_2(P_1, P_2) = A - P_2 + bP_1$ , όπου  $A, b \in (0, +\infty)$ . Το οριακό κόστος παραγωγής και των δύο επιχειρήσεων είναι κοινό, σταθερό, ίσο με  $c \in (0, +\infty)$ . Το σταθερό κόστος είναι ίσο με το μηδέν και για τις δύο επιχειρήσεις. Αφού ορίσετε τους παίχτες, το χώρο στρατηγικής κάθε παίχτη και τις αποδόσεις von Neumann-Morgenstern, να βρείτε την ισορροπία Nash  $(P_1^*, P_2^*)$  του συγκεκριμένου παιγνίου.

**Θέμα 3ο.** Έστω ένα στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε κανονική μορφή με διπίνακα

		2	
		H	T
1	H	1,-1	-1,1
	T	-1,1	1,-1

Οι παίκτες είναι οι 1 και 2, οι χώροι στρατηγικής είναι τα δισύνολα  $S_1 = S_2 = \{H, T\}$  ενώ οι αποδόσεις von Neumann-Morgenstern για κάθε στρατηγική (συνδυασμό στρατηγικών) εμφανίζονται στον παραπάνω διπίνακα. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές. Να βρεθούν και να σχεδιαστούν οι αντιστοιχίες (ή πλειότιμες συναρτήσεις) βέλτιστης απόκρισης των παιχτών 1 και 2. Να βρεθεί η ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές (NEMS). Να δείξετε όλες τις ισορροπίες Nash σε ένα κατάλληλο γράφημα.

**Θέμα 4ο.** (α) Έστω το πεπερασμένο σύνολο  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  όλων των πιθανών αποτελεσμάτων  $x_1, x_2, \dots, x_n$  τα οποία συνδέονται με ρίσκο. Η κατανομή πιθανότητας των αποτελεσμάτων έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας με γενική μορφή  $p(x)$  ενώ η συνάρτηση χρησιμότητας του παίχτη έχει τη γενική μορφή  $u(x)$ . Πώς ορίζεται η συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern ή συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας; (β) Αν το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων είναι συνεχές και συγκεκριμένα αποτελείται από όλα τα σημεία επάνω στο κλειστό διάστημα  $X = [\underline{x}, \bar{x}]$  τα οποία έχουν μια κατανομή πιθανότητας με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της γενικής μορφής  $f(x)$ , να ορίσετε τη συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern ή συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας σε αυτή την περίπτωση. (β) Τι λέγεται παίγνιο σε κανονική μορφή; Τι λέγεται ισορροπία Nash ενός παιγνίου σε κανονική μορφή;

**Θέμα 5ο.** Έστω ένα στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε κανονική μορφή με διπίνακα

		C	
		C1	C2
R	R1	2,7	10,3
	R2	1,9	8,16

Οι παίκτες είναι οι R και C, οι χώροι στρατηγικής είναι τα δισύνολα  $S_R = \{R1, R2\}, S_C = \{C1, C2\}$  ενώ οι αποδόσεις von Neumann-Morgenstern για κάθε στρατηγική (συνδυασμό στρατηγικών) εμφανίζονται στον παραπάνω διπίνακα. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ίδιες ισορροπίες Nash χρησιμοποιώντας τη μέθοδος της IESDS. Ποιάς τάξης κοινή γνώση ορθολογικότητας υποθέσατε για να βρείτε τη λύση του παιγνίου (δηλ. την ισορροπία Nash) σε αυτή την περίπτωση;

**Θέμα 6ο.** Έστω ένα στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε κανονική μορφή με διπίνακα

		C	
		C1	C2
R	R1	3,8	9,4
	R2	2,10	8,16

Οι παίκτες είναι οι R και C, οι χώροι στρατηγικής είναι τα δισύνολα  $S_R = \{R1, R2\}$ ,  $S_C = \{C1, C2\}$  ενώ οι αποδόσεις von Neumann-Morgenstern για κάθε στρατηγική (συνδυασμό στρατηγικών) εμφανίζονται στον παραπάνω διπίνακα. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ίδιες ισορροπίες Nash χρησιμοποιώντας τη μέθοδος της IESDS. Ποιάς τάξης κοινή γνώση ορθολογικότητας υποθέσατε για να βρείτε τη λύση του παιγνίου (δηλ. την ισορροπία Nash) σε αυτή την περίπτωση;

**Θέμα 7ο.** (α) Έστω  $G$  ένα παίγνιο σε κανονική μορφή και  $s_i', s_i'' \in S_i$  δύο στρατηγικές οι οποίες ανήκουν στο χώρο στρατηγικής  $S_i$  του  $i$ -οστού παίχτη. Τι σημαίνει ότι η στρατηγική  $s_i'$  κυριαρχείται αυστηρά από τη στρατηγική  $s_i''$ ; Να δοθεί ο αυστηρός ορισμός. (β) Έστω  $G$  ένα παίγνιο σε κανονική μορφή. Τι λέγεται μεικτή στρατηγική; Να δοθεί αυστηρός ορισμός. Τι λέγεται ισορροπία Nash του παιγνίου  $G$  σε μεικτές στρατηγικές (NEMS);