Αναλογιστικά Μαθηματικά

κίνδυνος = τυχαία μεταβλητή

θετικές τιμές = πληρώνω

αρνητικές » = εισπράττω

"καταστάσεις"

$\mathcal{P}$ = { όλοι οι "κίνδυνοι" πού "ενδιαφέρουν" κάποιο άτομο }

Αν $P, Q \in \mathcal{P}$

$P \succ Q$ άν προτιμάμε P από Q

$P \approx Q$ άν αδιάφορα

γιά κάθε $\lambda \in [0,1]$ ή $\lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{P}$

Ιδιότητες

① Για κάθε $P, Q \in \mathcal{P}$ ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

ή $P \succ Q$ ή $Q \succ P$ ή $P \approx Q$

② Αν $P \succ Q$, $Q \succ R \Rightarrow P \succ R$

③ Αν $P \succ Q \succ R$ τότε υπάρχουν $\lambda, \mu \in (0,1)$:

$$\lambda P + (1-\lambda) R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu) R$$

④ Αν $P \succ Q$ τότε για κάθε $\lambda \in (0,1)$ και $R \in \mathcal{P}$ ισχύει ότι:

$$\lambda P + (1-\lambda) R \succ \lambda Q + (1-\lambda) R$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

Μία σχέση προτίμησης έχει όλες τις παραπάνω ιδιότητες, αν και μόνο αν υπάρχει $u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$P \succ Q \iff E\left[\underbrace{u(P)}_{\text{τ.μ.}}\right] > E\left[\underbrace{u(Q)}_{\text{τμ}}\right]$$

Συνάρτηση χρησιμότητας ή ωφελιμότητας ή ηδονής $= u(\,.\,)$

u
- → Θεωρητικά
- → Στατιστική
- → Παρεμβολή
- → Εμπειρικά

Άσκηση: Ένα άτομο έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{B} = \{X, Y\}$$

$$X = \begin{cases} 400 & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 900 & \text{"} \quad 0.5 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 100 & \text{με πιθ. } 0.6 \\ 1600 & \text{με πιθ. } 0.4 \end{cases}$$

Ποιά είναι προτιμότερη;

$$E[u(X)] = \sum u(x) P[X=x] =$$

$$= u(400) \cdot 0.5 + u(900)\, 0.5 =$$

$$= \sqrt{400} \cdot 0.5 + \sqrt{900} \cdot 0.5 = 25.$$

$$E[u(Y)] = \sum u(y) P[Y=y] =$$

$$= u(100) \cdot 0.6 + u(1600) \cdot 0.4 =$$

$$= \sqrt{100} \cdot 0.6 + \sqrt{1600} \cdot 0.4 = 22$$

αφού $25 > 22$ προτιμάμε την X.

Ιδιότητες

- Η $u(x)$ είναι αύξουσα
- Ανισότητα Jensen:

$$u(E(X)) \geq E(u(X))$$

αν u κοίλη.

- Αν u κυρτή τότε

$$u(E(X)) \leq E(u(X))$$

Βασικοί Ιδιότητες Ασφάλισης

Άτομο με περιουσία w ασφαλίζεται για κίνδυνο X. Το μέγιστο ποσό G_{max} που προτίθεται να πληρώσει είναι:

$$\boxed{u(w - G_{max}) = E\left[u(w - X)\right]}$$

- Ασφαλιστής με περιουσία w αναλαμβάνει κίνδυνο X. Το ελάχιστο ασφάλιστρο G_{min} που ζητάει ικανοποιεί την:

$$\boxed{u(w) = E\left[u(w + G_{min} - X)\right]}$$

u ασφαλιστ.

• Άτομο με περιουσία w εκχωρεί δικαίωμα ~~σε~~ σε κέρδος X, για να πάρ~~ει~~ει ποσό K. Η ελάχιστη τιμή του K, K_{min} ικανοποιεί:

$$\boxed{E\left[u(w+X)\right] = u(w+K_{min})}$$

• Άτομο με περιουσία w πληρώνει K για να αποκτήσει δικαίωμα σε κέρδος X (τυχαίο). Η μέγιστη τιμή K_{max}, είναι:

$$\boxed{u(w) = E\left[u(w-K_{max}+\underset{\text{τυχαίο}}{\underline{X}})\right]}$$

Άσκηση: άτομο με $u(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$ και περιουσία w. Βρείτε G_{max}, G_{min}, K_{max}, K_{min}, όταν $X \sim U(0,w)$

$u(x)=$ 

Για το G_{min} ισχύει:

$$u(w)=E\left[u(w+G_{min}-X)\right]$$

$$u(w)=\sqrt{w}$$

$$E\left[u(w+G_{min}-X)\right]=\int_0^w \sqrt{w+G_{min}-x}\cdot\frac{1}{w}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[(w+G_{min})^{3/2}-G_{min}^{3/2}\right]$$

$$\sqrt{w}=\frac{2}{3}\left[(w+G_{min})^{3/2}-G_{min}^{3/2}\right]$$ αν π.χ.

$w=1 \implies G_{min}=0.52129$

<u>Άσκηση</u>: Ασφαλισμένος με w, $u(x) = -e^{-\alpha x}$ και κίνδυνος X. Βρείτε G_{max}.

Ασφαλιστής με w, $u(x) = -e^{-\alpha x}$, X

Βρείτε G_{min}

$$u(w - G_{max}) = E\left[u(w - X)\right] \Leftrightarrow$$

$$-e^{-\alpha(w-G)} = E\left[-e^{-\alpha(w-X)}\right] \Leftrightarrow$$

$$-e^{-\alpha w} \cdot e^{+\alpha G} = E\left[-e^{-\alpha w} \cdot e^{\alpha X}\right]$$

$$\cancel{-e^{-\alpha w}} \cdot e^{\alpha G} = \cancel{-e^{-\alpha w}} \cdot E\left[e^{\alpha X}\right]$$

$$\boxed{G_{max} = \frac{1}{\alpha} \ln\left[E\left[e^{\alpha X}\right]\right]}$$

ομοίως $\quad G_{min} = \frac{1}{\alpha} \ln\left[E\left[e^{\alpha X}\right]\right]$

Κινδυνοφοβία - Κινδυνοφιλία

κινδυνόφοβο εάν $E(X) \succsim X$

κινδυνόφιλο εαν $X \succsim E(X)$

κινδυνόφοβο $\Longrightarrow$ $E(X) \succsim X$

για την συνάρτηση ωφέλειας u

ισχύει: $E\left[u(E(X))\right] > E(\cancel{\;}\; u(X))$

$\underset{\text{αριθμοί}}{}$

$\Longleftrightarrow u[E(X)] > E[u(X)] \xrightarrow[\text{Jensen}]{\text{ανισότητα}}$

$\Longleftrightarrow u$ κοίλη

κινδυνόφοβο $\Longleftrightarrow$ $u(x)$ κοίλη

κινδυνόφιλο $\Longleftrightarrow$ $u(x)$ κυρτή.

<u>Ιδιότητα</u>: Αν το άτομο είναι κινδυνόφοβο (u γν. αύξουσα και κοίλη) τότε:

$$G_{max}, G_{min} \geq E(X)$$

$$K_{max}, K_{min} \leq E(X)$$

Αντίστροφα αν είναι κινδυνόφιλο.

Συντελεστής Κινδύνου

u συνάρτηση χρησιμότητας και w μία περιουσία.

$$r_u(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

- κινδυνόφοβος $\Longrightarrow r_u(w) \geq 0$
- κινδυνόφιλος $\Longrightarrow r_u(w) \leq 0$

Έστω μία περιουσία w, ωφελιμότητα u, κίνδυνο X με $E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$

$$u(x) \overset{Taylor}{\underset{\text{με } x_0=w-\mu}{=}} u(w-\mu)+\frac{u'(w-\mu)}{1!}(x-w+\mu)$$

$$u(x)=u(w-\mu)+\frac{u'(w-\mu)}{1!}(x-w+\mu)+\frac{u''(w-\mu)}{2!}\cdot(x-w+\mu)^2$$

Για $G_{max} \doteq G$: $u(w-G)=E[u(w-X)]$

για $x=w-G \Rightarrow u(w-G)=u(w-\mu)+$

$+u'(w-\mu)(w-G-w+\mu)$

για $x=w-X$ το δεύτερο γίνεται:

$$u(w-X)=u(w-\mu)+u'(w-\mu)(w-X-w+\mu)+$$

$$+\frac{1}{2!}u''(w-\mu)(w-X-w+\mu)^2$$

παίρνω E(…) από δεύτερη σχέση

$$E[u(w-X)] = u(w-\mu) + u'(w-\mu)\cdot \underbrace{E(\mu-X)}_{=0} + \frac{1}{2}u''(w-\mu)\underbrace{E[(\mu-X)^2]}_{=\sigma^2}$$

$$\Downarrow$$

$$E[u(w-X)] = u(w-\mu) + 0 + \frac{1}{2}u''(w-\mu)\sigma^2$$

$$\cancel{u(w-\mu)} + u'(w-\mu)(\mu-G) = \cancel{u(w-\mu)} + \frac{1}{2}u''(w-\mu)\sigma^2$$

$$\boxed{G_{max} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot r_u(w-\mu)}$$

Ασφαλιστικά Σχήματα -1-

Χρήματα που πληρώνει ο ασφαλιστής (από ζημίωση)

$$I : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$

$$I(x) \le x$$ ← ζημιά

κάλυψη

$$K(x) = x - I(x)$$

ίδια κράτηση (λεφτά του ασφαλισμένου)

Είδη σχημάτων

$I(x) = x$ πλήρης

$I(x) = \lambda x$ $\quad 0<\lambda<1$ αναλογική

$I_\alpha(x) = \max\{X-\alpha, 0\} = (X-\alpha)^+$ υπερβάλλουσα ζημία

$x \to X$ τυχαία μεταβλητή.

Ασφάλιστρα

$I(x)=\cancel{\lambda}x$ $\qquad G \qquad G_A$

ασφαλισμένου $\qquad$ ασφαλιστή

$I(x)=\lambda x \qquad G(\lambda) \qquad G_A(\lambda)$

$I_{x_1}(x)=(x-x_1)^+ \qquad G(x_1) \qquad G_A(x_1)$

Θεώρημα: G μέγιστο ασφάλιστρο που δέχεται να πληρώσει ο ασφαλισμένος, με περιουσία w και ασφαλιστικό σχήμα I, είναι:

$$\boxed{E\left[u(w-X)\right]=E\left[u(w-G-X+I(X))\right]}$$

Ασφαλιστής με περιουσία w, χρησιμότητα u, κίνδυνος X με σχήμα $I(X)$. Το ελάχιστο ασφάλιστρο G:

$$\boxed{u(w)=E\left[u(w+G-I(X))\right]}$$

Άσκηση: $u(x) = -e^{-x}$, περιουσία -3-

w, X κίνδυνος $X \sim f(x) = c\,e^{-x}$

$x \in (0, w)$, $c = \dfrac{e^w}{e^w - 1}$

1) βρείτε $G(\lambda)$ = δε πληρώνει ο ασφαλισμένος, άρα

$$E[u(w - X)] = E[u(w - G - X + \lambda X)]$$

$$E[e^{-w+X}] = E[e^{-w+G+(1-\lambda)X}]$$

$$e^{-w} E[e^{X}] = e^{-w+G} E[e^{(1-\lambda)X}]$$

$$\int_0^w e^{x} c e^{-x} dx = e^{\boxed{G}} \int_0^w e^{(1-\lambda)x} c e^{-x} dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{G(\lambda) = \ln \frac{\lambda w}{1 - e^{-\lambda w}}}$$

$I(x) = (x - x_\lambda)^+$

Υπολογισμός Ασφαλίστρου

X κίνδυνος $\rightsquigarrow$ $\pi(X)$ αριθμός ασφάλιστρο

(1) Αρχή ισοδυναμίας: $\pi(X) = E(X)$

(2) Αρχή μαθηματικής ελπίδος:

$$\pi(X) = (1+\alpha) E(X)$$

(3) Αρχή της διασποράς

$$\pi(X) = E(X) + \alpha \, Var(X)$$

$$\pi(X) = E(X) + \alpha \sqrt{Var(X)}$$

(4) Εκθετική αρχή:

$$\pi(X) = \frac{1}{\alpha} \ln E\left[e^{\alpha X}\right]$$

(5) ωφελιμότητα:

$$\pi(X) : \quad u(0) = E\left[u(\boxed{\pi(X)} - X)\right]$$

u χρησιμότητα του ασφαλιστή.

⑥ Αρχή μέγιστης απώλειας

$\inf\{s : P(X \le s) = 1\} = \underline{\underline{\mathcal{Z}}}$ υπάρχει

$$\pi(X) = p\,E(X) + (1-p)\,\mathcal{Z}$$

όπου $p \in [0,1]$.

Ιδιότητες ασφαλίστρων

$$\pi(X) \geq E(X)$$

$$\pi(X) \leq \mathcal{Z}$$

$$\pi(X+c) = \pi(X) + c$$

$$\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$$

$$\pi(X) = \pi(\pi(X \mid Y))$$

Ατομικό Πρότυπο

n ζημιές ή ζημιογόνα γεγονότα.

X_i = ζημιά του γεγονότος i

$i=1,\dots,n$

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{αν συμβεί το γεγονός } i \\ 0 & \text{όχι} \end{cases}$$

S = η συνολική ζημιά.

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} X_i I_i}$$

$q_i = P[I_i = 1]$ να συμβεί το γεγονός i

$\mu_i = E(X_i)$

$\sigma_i = \sqrt{Var(X_i)}$

Θεώρημα

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i$$

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i(1-q_i)\mu_i^2$$

Αν $\Xi = I_1 + I_2 + \dots + I_n =$

= πλήθος γεγονότων που συμβαίνουν.

$$\bar{x} = \frac{E(S)}{E(\Xi)}$$ μέση αποζημίωση

Υπολογισμός ασφαλίστρου

Για κάθε X_i έχουμε ασφάλιστρο μέσης ελπίδος $G_i = (1+\theta)E(X_i)$

G = συνολικό ασφάλιστρο $= (1+\theta)E(S)$

επιλέγει θ έτσι ώστε:

$$P\big(S > (1+\theta)E(S)\big) \leq \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$P\big(S - E(S) > \theta E(S)\big) \leq \alpha$$

$$P\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{Var(S)}} > \theta \frac{E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) \leq \alpha$$

$$P\left(Z > \theta \frac{E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) \leq \alpha$$

τυπική
κανονική
κατανομή $\Longrightarrow \theta \geq z_\alpha \dfrac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$.

z_α τυπική κανονική
κατανομή.