.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(Πρόχειρες Σημειώσεις)

Στέλιος Κώτσιος

ΑΘΗΝΑ 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

1.1 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

1.2 Δεσμευμένη Διασπορά

1.3 Κατανομή $Poisson$

Ορισμός 1.1 *Η τυχαία μεταβλητή X, ακολουθεί την κατανομή $Poisson$ με παράμετρο μ, συμβολικά $X \sim \mathcal{P}(\mu)$, εάν το πεδίο τιμών της είναι $R_X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ και*

$$P_X(k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \quad , \quad k \in R_X$$

Θεώρημα 1.1 *Έστω $X \sim \mathcal{P}(\mu)$, τότε: $E(X) = \mu$ και $Var(X) = \mu$.*

Θεώρημα 1.2 *Η ροπογεννήτρια της $Poisson$, είναι:*

$$M_{Poisson}(t) = e^{\mu e^t - \mu}$$

Θεώρημα 1.3 *Εάν $X_i \sim \mathcal{P}(\mu_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, τότε:*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n)$$

Θεώρημα 1.4 *Έστω ότι οι κατανομές $Y_n \sim B(n, p)$. Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} np = \mu$, όπου $\mu > 0$, τότε, οι κατανομές Y_n συγκλίνουν σε μια κατανομή $Poisson$, δηλαδή:*

$$\lim_{n\to\infty} P_{Y_n}(k) = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$$

Με απλά λόγια: ¨ η $Poisson$ προσεγγίζει την διωνυμική για μεγάλο n ¨.

Σκιαγραφία Απόδειξης: Ο τύπος της διωνυμικής είναι:

$$B(n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \tag{1.1}$$

Όταν το n είναι πολύ μεγαλύτερο του k, $n >> k$, τότε:

$$n-k \approx n \Longrightarrow \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1) \approx n\cdot n\cdot n\cdots n = n^k$$

Αντικαθιστώντας στην 1.1, έχουμε:

$$B(n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} = \frac{n^k p^k (1-p)^n}{k!} \tag{1.2}$$

Από τον τύπο του $Taylor$, έχουμε:

$$e^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p)^k}{k!} = 1 - p + \frac{p^2}{2!} - \cdots \approx 1-p, \text{ διότι } p \in [0,1]$$

Αντικαθιστώντας στην 1.2, έχουμε τελικά:

$$B(n,p) \approx \frac{n^k p^k (e^{-p})^n}{k!} = \frac{(np)^k e^{-pn}}{k!} = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \quad , \quad \mu = np$$

1.4 Κατανομή Γάμμα

Ορισμός 1.2 *Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα, με παραμέτρους λ και a, αν έχει συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

όπου $\lambda > 0$ και $a > 0$, πραγματικοί αριθμοί.

Την κατανομή Γάμμα, την συμβολίζουμε: $Gamma(a,\lambda)$.

Η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται από τον τύπο:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad , \quad a > 0$$

Έχει τις εξής ιδιότητες:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \qquad a > 0$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad , \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbf{N}$$

Ιδιότητα 1.1 *Αν η συνεχής τυχαία μεταβλητή X, ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους λ και a, τότε:*

$$E(X) = \frac{a}{\lambda} \quad , \quad Var(X) = \frac{a}{\lambda^2}$$

1.5 Κατανομή $Erlang$

Ορισμός 1.3 *Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή $Erlang$, με παραμέτρους λ και ν, αν έχει συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\nu}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

όπου $\lambda > 0$ πραγματικός αριθμός και ν, φυσικός αριθμός.

1.6 Εκθετική Κατανομή

Ορισμός 1.4 *Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή, με παράμετρο λ, αν έχει συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

όπου $\lambda > 0$ πραγματικός αριθμός.

Την εκθετική κατανομή την συμβολίζουμε: $\mathcal{E}(\lambda)$.

Ιδιότητα 1.2 *Η αθροιστική κατανομή της εκθετικής κατανομής $\mathcal{E}(\lambda)$, είναι:*

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Θεώρημα 1.5 *Έστω $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, τότε: $E(X) = \lambda^{-1}$ και $Var(X) = \lambda^{-2}$.*

Θεώρημα 1.6 *Η ροπογεννήτρια της εκθετικής, είναι:*

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Θεώρημα 1.7 *Εάν $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, τότε:*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Gamma(n, \lambda)$$

Ιδιότητα 1.3 *Η εκθετική κατανομή είναι ¨ αμνήμων ¨.*

Σκιαγραφία Απόδειξης: Διαδοχικά έχουμε:

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s \text{ και } Q > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} =$$

$$= \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Άρα, οποιαδήποτε αύξηση του χρονικού διαστήματος δεν επηρεάζει την πιθανότητα, επομένως η εκθετική κατανομή είναι αμνήμων.

1.7 Λυμένες Ασκήσεις

1.1 ***΄Εχει παρατηρηθεί ότι, αν μία χρηματιστηριακή αγορά λειτουργεί για t ώρες, η μέση τιμή και η διασπορά των των συναλλαγών είναι $5t$. Αν η αγορά λειτουργήσει για έναν τυχαίο αριθμό ωρών, που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ 8 και 10 ωρών, βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά που θα ακολουθήσουν οι συναλλαγές.***

Λύση: Ορίζουμε: T ο χρόνος λειτουργίας, $N(t)$ ο αριθμός των συναλλαγών σε t ώρες λειτουργίας.
Ζητάμε $E[N(T)]$ και $V[N(T)]$. Έχουμε: $E[N(t)]= V[N(t)] = 5t$ και

$$E(T)\frac{10 + 8}{2} = 9 \quad , \quad V(T) = \frac{(10 - 8)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

Διαδοχικά έχουμε:

$$E[N(T)] = E[E[N(T)|T]] = E[m(T)]$$

αλλά $E[N(T)|T = t] = m(t) = E[N(t)] = 5t$, οπότε:

$$E[N(T)] = E[5T] = 5E[T] = 5 \cdot 9 = 45$$

Για την διασπορά έχουμε:

$$V[N(T)] = E[V[N(T)|T]] + V[E[N(T)|T]]$$

αλλά $V[N(T)|T=t] = V[N(t)] = 5t$, οπότε:

$$V[N(T)] = E[5T] + V[5T] = 5E[T] + 25V[T] = \frac{160}{3}$$

1.2 ***Μία δισδιάστατη διακριτή κατανομή έχει συνάρτηση πιθανότητας*** $f(x,y) = \frac{1}{1815}(2x+y)$ ***με*** $x = 0,1,2,...,10$ ***και*** $y = 0,1,2,...,10$***. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες εντολές του*** $EXCEL$***, υπολογίσατε τις περιθώριες κατανομές, τις δεσμευμένες περιθώριες κατανομές και επαληθεύσατε ότι:*** $E(X) = E(E(X|Y))$***.***

Κεφάλαιο 2

Διαδικασίες $Poisson$

2.1 Ορολογία

Οι διαδικασίες $Poisson$, είναι το τμήμα εκείνο των στοχαστικών διαδικασιών που ασχολείται με τις κατα τυχαίο τρόπο αφίξεις ή τα τυχαία γεγονότα, που λαμβάνουν χώρα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Ορίζουμε ως **διαδικασία** $Poisson$ την τυχαία μεταβλητή $N(t)$, που μετρά τον αριθμό των γεγονότων που λαμβάνουν χώρα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

- Τα γεγονότα που λαμβάνουν χώρα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ λέγονται **αφίξεις.**
- T_1 είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει την χρονική περίοδο από την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το πρώτο γεγονός.
- T_2 είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει την χρονική περίοδο από την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το δεύτερο γεγονός.
- T_i είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει την χρονική περίοδο από την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το i γεγονός.
- Οι χρονικές στιγμές t_i, που συμβαίνουν τα γεγονότα, λέγονται **σημεία συμβάντων**.

- Η τυχαία μεταβλητή Z_n, που μετράει την χρονική διάρκεια μεταξύ του $n-1$ και n συμβαντος, λέγεται **ενδιάμεσος χρόνος.**

- Η τυχαία μεταβλητή $W(t)$, που μετράει την χρονική διάρκεια από την χρονική στιγμή t, μέχρι να συμβεί το επόμενο γεγονός, ονομάζεται **χρόνος αναμονής.**

2.2 Βασικές Ιδιότητες

- Η $N(t)$ παίρνει θετικές ακέραιες τιμές.

- $N(0) = 0$

- Για κάθε δύο χρονικές στιγμές s, t έτσι ώστε $0 \leq s < t$, η ποσότητα (τυχαία μεταβλητή): $N(t)$, μετράει τον αριθμό των γεγονότων (αφίξεων) που έλαβαν χώρα στο χρονικό διάστημα: $(s, t]$.

- Ισχύει η σχέση: $\boxed{Z_n = T_n - T_{n-1}}$.

- Ισχύει η σχέση:

$$\boxed{T_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}$$

- Για κάθε t, η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των $independent\ increments$, δηλαδή: εαν $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές: $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, …, $N(t_n) - N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των αφίξεων σε ξένα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

- Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των $stationary\ increments$, δηλαδή: για κάθε $t_2 \geq t_1 \geq 0$, οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_2 - t_1)$ και $N(t_2 + \tau) - N(t_1 + \tau)$, $\tau >$ έχουν την ίδια κατανομή.

2.3 Ο τύπος του $Khinchin$ (1955)

$$\boxed{P[N(t)=k]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \lambda>0}$$

$$\boxed{E[N(t)]=\lambda t \quad , \quad Var[N(t)]=\lambda t}$$

2.4 Στοιχειώδης Απόδειξη του τύπου του $Khinchin$

Βασική Υπόθεση:

Αν $\lambda>0$ είναι η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός στην μονάδα του χρόνου, τότε η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός σε χρονικό διάστημα $\delta>0$, είναι $\lambda\delta$.

Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $(0,t]$ σε διαστήματα μήκους δ:

$$(0,\delta],(\delta,2\delta],(2\delta,3\delta],....$$

το πλήθος αυτών των διαστημάτων είναι $n=\dfrac{t}{\delta}$.

Σε κάθε τέτοιο διάστημα γίνεται ένα εικονικό πείραμα τύχης, όπου η επιτυχία του ισοδυναμεί με το να συμβεί ένα γεγονός (να έχουμε ¨ άφιξη ¨). Αν το πλάτος του διαστήματος δ, είναι μικρό, τότε μία μόνο άφιξη μπορεί να συμβεί σε αυτό το χρονικό διάστημα με πιθανότητα λδ.

Επομένως, $N(t)$= το πλήθος των επιτυχιών σε $n=t/\delta$ επαναλήψεις του πειράματος, με πιθανότητα επιτυχίας την μία φορά, ίση με λδ. Άρα:

$$N(t)\sim Binomial(n,p)=\mathcal{B}\left(\frac{t}{\delta},\lambda\delta\right)$$

εάν $\delta\to 0 \Rightarrow n=\dfrac{t}{\delta}\to+\infty$ και $np=\dfrac{t}{\delta}\lambda\delta=t\lambda>0$ (σταθερό) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow N(t)\sim\mathcal{P}(t\lambda)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

2.5 Βασικοί Τύποι

Ιδιότητα 2.1 *Έστω $N(t)$ διαδικασία $Poisson$ με παράμετρο λ. Ισχύει ο τύπος:*

$$\boxed{Cov[N(t_1), N(t_2)] = \lambda \min\{t_1, t_2\},\ t_1, t_2 \geq 0}$$

Ιδιότητα 2.2 *Έστω $N(t)$ διαδικασία $Poisson$ με παράμετρο λ. Ισχύει ο τύπος:*

$$\boxed{R_N(t_1, t_2) = \lambda \min\{t_1, t_2\} + \lambda^2 t_1 t_2,\ t_1, t_2 \geq 0}$$

Ιδιότητα 2.3 *Έστω $N(t)$ διαδικασία $Poisson$ με παράμετρο λ. Η ροπογεννήτρια της δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{M_{\mathcal{P}}(\theta) = e^{\lambda t (e^{\theta} - 1)}}$$

Ιδιότητα 2.4 *Έστω $N(t)$ διαδικασία $Poisson$ με παράμετρο λ. Η πιθανογεννήτρια της δίδεται από τον τύπο:*

$$\boxed{P_{\mathcal{P}}(\theta) = e^{\lambda t (\theta - 1)}}$$

2.6 Λυμένες Ασκήσεις

2.1 Έστω $N(t)$ μία διαδικασία $Poisson$ με $\lambda = 0.5$. Βρείτε την πιθανότητα να μην συμβεί κανένα γεγονός την περίοδο $(3, 5]$ καθώς και την πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα γεγονός σε κάθε μία από τις περιόδους: $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$ και $(3, 4]$.

Λύση: Αν Y είναι η τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $(3, 5]$, τότε:

$$Y \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 2) = \mathcal{P}(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Y = 0) = e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} = 0.37$$

Έστωσαν τώρα Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 οι τυχαίες μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των γεγονότων σε κάθε ένα από τα χρονικά διαστήματα: $(0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$ και $(3, 4]$. Τότε, $Y_i \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 1)$ και Y_i ανεξάρτητες. Άρα:

$$P[Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1] = P[Y_1 = 1] \cdot P[Y_2 = 1] \cdot P[Y_3 = 1] \cdot P[Y_4 = 1] =$$

$$= \left(\frac{e^{-0.5} \cdot 0.5^1}{1!} \right)^4 = 0.0085$$

2.2 Έστω ότι η $N(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$ με λόγο λ. Βρείτε την πιθανότητα να συμβούν 2 γεγονότα την περίοδο $(0, 2]$ και 3 γεγονότα την περίοδο $(1, 4]$.

Λύση: ΠΡΟΣΟΧΗ, ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΧΡΟΝΙΚΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΑΛΛΗΛΟΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΙ.
Έστωσαν X, Y, Z τρεις τυχαίες μεταβλητές που μετράνε το πλήθος των εμφανίσεων στις χρονκές περιόδους: $(0, 1]$, $(1, 2]$ και $(2, 4]$. Ισχύει ότι:

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 1) \quad , \quad Y \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 1) \quad , \quad Z \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 2)$$

Ζητάμε την πιθανότητα: $P[X + Y = 2, Y + Z = 3]$. Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος, έχουμε:

$$P[X + Y = 2, Y + Z = 3] = P[X = 2 \text{ και } Z = 3|Y = 0]P[Y = 0]+$$

$$+P[X = 1 \text{ και } Z = 2|Y = 1]P[Y = 1]+P[X = 0 \text{ και } Z = 1|Y = 2]P[Y = 2]$$

Επειδή όμως οι τυχαίες μεταβλητές X, Z είναι ανεξάρτητες, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$P[X + Y = 2, Y + Z = 3] = P(X = 2)P(Z = 3)P(Y = 0)+$$

$$+P(X = 1)P(Z = 2)P(Y = 1) + P(X = 0)P(Z = 1)P(Y = 2) =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!}+$$

$$+e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} = e^{-4\lambda}\left(\frac{2}{3}\lambda^5 + 2\lambda^4\right)$$

2.3 Έστω $N(t)$ μία διαδικασία $Poisson$ με παράμετρο λ. Υπολογίσατε την πιθανότητα να έχουμε 10 αφίξεις στο χρονικό διάστημα $(0, 5]$, δεδομένου ότι στο χρονικό διάστημα $(0, 10]$ έχουμε 15 αφίξεις.

Λύση: Ζητάμε την πιθανότητα: $P[N(5) = 10|N(10) = 15]$. Διαδοχικά έχουμε:

$$P[N(5) = 10|N(10) = 15] = \frac{P[N(5) = 10 \text{ και } N(10) = 15]}{P[N(10) = 15]} =$$

$$= \frac{P[N(5) = 10] \cdot P[N(10) - N(5) = 5]}{P[N(10) = 15]}$$

Αλλά οι τυχαίες μεταβλητές: $N(10)-N(5)$ και $N(10-5)=N(5)$ έχουν την ίδια κατανομή, επομένως:

$$P[N(5)=10|N(10)=15]=\frac{P[N(5)=10]\cdot P[N(5)=5]}{P[N(10)=15]}=$$

$$=\frac{\dfrac{e^{-5\lambda}(5\lambda)^{10}}{10!}\cdot\dfrac{e^{-5\lambda}(5\lambda)^{5}}{5!}}{\dfrac{e^{-10\lambda}(10\lambda)^{15}}{15!}}=\frac{5^{10}\cdot 5^5\cdot 15!}{10^{15}\cdot 10!\cdot 5!}=\frac{3003}{32768}=0.0916443$$

2.4 Εάν $X(t)\sim\mathcal{P}(\lambda t)$ και $Y(t)\sim\mathcal{P}(\mu t)$, να δειχθεί ότι:

$$P[X(t)=2|X(t)+Y(t)=4]=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$P[X(t)=2|X(t)+Y(t)=4]=\frac{P[X(t)=2 \text{ και } X(t)+Y(t)=4]}{P[X(t)+Y(t)=4]}=$$

$$=\frac{P[X(t)=2 \text{ και } Y(t)=2]}{P[X(t)+Y(t)=4]}=\frac{P[X(t)=2]\cdot P[Y(t)=2]}{P[X(t)+Y(t)=4]}$$

αλλά

$$P[X(t)=2]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}\quad,\quad P[Y(t)=2]=e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^2}{2!}$$

Τώρα, από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$P[X(t)+Y(t)=4]=\sum_{k=0}^{4}P[X(t)=k]\cdot P[X(t)+Y(t)=4|X(t)=k]=$$

$$=\sum_{k=0}^{4}P[X(t)=k]\cdot P[Y(t)=4-k]=\sum_{k=0}^{4}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^{4-k}}{(4-k)!}=$$

$$=e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\left(\frac{\lambda^4 t^4}{24}+\frac{1}{6}\lambda^3\mu t^4+\frac{1}{4}\lambda^2\mu^2 t^4+\frac{1}{6}\lambda\mu^3 t^4+\frac{\mu^4 t^4}{24}\right)=$$

$$=e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\cdot\frac{1}{24}t^4(\lambda+\mu)^4$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{P[X(t)=2]\cdot P[Y(t)=2]}{P[X(t)+Y(t)=4]}=\frac{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^2}{2!}\cdot e^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^2}{2!}}{e^{-\lambda t}e^{-\mu t}\cdot\dfrac{1}{24}t^4(\lambda+\mu)^4}=$$

$$=\frac{6\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

2.5 Εάν $X(t)\sim\mathcal{P}(\lambda t)$, βρείτε την πιθανότητα: $P[X(t)=k|X(t)\geq r]$, όταν $k=r,r+1,r+2,...$

Λύση: Χρησιμοποιώντας την υπό συνθήκη πιθανότητα, έχουμε:

$$P[X(t)=k|X(t)\geq r]=\frac{P[X(t)=k \text{ και } X(t)\geq r]}{P[X(t)\geq r]}$$

αλλά

$$P[X(t)\geq r]=1-P[X(t)<r]=1-\sum_{\nu=0}^{r-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!}$$

και

$$P[X(t)=k \text{ και } X(t)\geq r]=P[X(t)=k]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

αντικαθιστώντας έχουμε τελικά:

$$P[X(t)=k|X(t)\geq r]=\frac{\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}}{e^{\lambda t}-\displaystyle\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!}}$$

2.6 Αυτοκίνητα φθάνουν κάπου ακολουθώντας μία διαδικασία $Poisson$ με $\lambda=2|$ώρα. Ο αριθμός των επιβατών τους είναι τυχαία μεταβλητή Y με $Y=1,2,3,4$ και αντίστοιχες πιθανότητες: $p_1=1/2$, $p_2=1/4$, $p_3=1/4$, $p_4=0$. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός επιβατών που θα αφιχθούν από την 8η πρωϊνή έως και την 12η, καθώς και η διακύμανση του.

Λύση: Ο αριθμός των επιβατών δίνεται από την τυχαία μεταβλητή:

$$X_t=\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$$

Όπου N_t τυχαία μεταβλητή, εκφράζουσα το πλήθος των αυτοκινήτων που αφικνούται στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Δηλαδή, έχουμε άθροισμα όπου το πλήθος των προσθετέων είναι τυχαία μεταβλητή. Άρα,

$$E(X_t) = E(N_t) \cdot E(Y_i) = E(N_t) \cdot \mu$$

Αλλά, $N_t \sim \mathcal{P}(2t)$, άρα η μέση τιμή αφίξεων αυτοκινήτων στο χρονικό διάστημα από 8 έως 12, είναι $E(N_t) = 2 \cdot 4 = 8$. Ακόμα, μ είναι η μέση τιμή των επιβατών, άρα:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot 0 = 1.75$$

και τελικά: $E(X_t) = 8 \cdot 1.75 = 14$.
Για την διακύμανση ισχύει ο τύπος: $V(X_t) = E(N_t) \cdot \sigma^2 + \mu^2 V(N_t)$.
Επειδή $N_t \sim \mathcal{P}(2t) \Rightarrow Var(N_t) = 2 \cdot 4 = 8$ και

$$\sigma^2 = Var(Y_i) = E(Y_i^2) - E^2(Y_i) =$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot 0 - (1.75)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

Τελικά:

$$Var(X_t) = 8 \cdot \frac{11}{16} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot 8 = 30$$

2.7 Ο αριθμός των απαιτήσεων που εγείρονται σε ένα χαρτοφυλάκιο, σε μία χρονική περίοδο t, ακολουθούν μια διαδικασία $Poisson$ με $\lambda = 12|$εβδομάδα. Ένα ποσοστό $p = 0.2$ των απαιτήσεων του είναι τύπου Α και οι υπόλοιπες τύπου Β.

1. **Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρξουν το πολύ 2 απαιτήσεις τύπου Α σε διάστημα (α) μιας εβδομάδος (β) ενός μηνός.**

2. **Να βρεθεί ο αναμενόμενος μέσος αριθμός απαιτήσεων τύπου Β, σε μία εβδομάδα.**

Λύση: Συμβολίζουμε:

- $N(t) =$ ο αριθμός των απαιτήσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t)$.

- $X(t) =$ ο αριθμός των απαιτήσεων τύπου Α, στο χρονικό διάστημα $[0, t)$.

Ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε x απαιτήσεις τύπου Α, στο χρονικό διάστημα $[0, t)$. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος έχουμε:

$$P[X(t) = x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} P[X(t) = x | N(t) = \nu] \cdot P[N(t) = \nu]$$

αλλά

$$P[X(t) = x | N(t) = \nu] = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad \nu < x \\ \begin{pmatrix} \nu \\ x \end{pmatrix} p^x q^{\nu - x} & \text{για} \quad \nu \geq x \end{cases}$$

επομένως, διαδοχικά έχουμε:

$$P[X(t) = x] = \sum_{\nu=0}^{\infty} P[X(t) = x | N(t) = \nu] \cdot P[N(t) = \nu] =$$

$$= \sum_{\nu=x}^{\infty} P[X(t) = x | N(t) = \nu] \cdot P[N(t) = \nu] =$$

$$= \sum_{\nu=x}^{\infty} \begin{pmatrix} \nu \\ x \end{pmatrix} p^x q^{\nu - x} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=x}^{\infty} \frac{\nu!}{x!(\nu - x)!} p^x q^\nu q^{-x} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} =$$

$$= \frac{p^x q^{-x} e^{-\lambda t} (q\lambda t)^x}{x!} \sum_{\nu=x}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^{\nu - x}}{(\nu - x)!} = \frac{(p\lambda t)^x}{x!} e^{q\lambda t - \lambda t} =$$

$$\boxed{= \frac{(p\lambda t)^x}{x!} e^{-p\lambda t}}$$

Για $p = 0.2$ και $\lambda = 12$ και t να μετράει εβδομάδες, έχουμε:

$$P[X(t) = x] = e^{-12 \cdot 0.2 \cdot t} \frac{(2.4t)^x}{x!}$$

Επομένως, για να απαντήσουμε στο ερώτημα (1.α), θέτουμε $t = 1$:

$$P[X(1) \leq 2] = P[X(1) = 0] + P[X(1) = 1] + P[X(1) = 2] = 0.57$$

Για το ερώτημα (1.β), θέτουμε $t = 4.3$ και έχουμε:

$$P[X(4.3) \leq 2] = P[X(4.3) = 0] + P[X(4.3) = 1] + P[X(4.3) = 2] = 0.21$$

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα 2, θέτουμε $Z(t) = N(t) - X(t)$ μία τυχαία μεταβλητή, που μετρά τις απαιτήσεις τύπου Β και έχουμε:

$$E[Z(t)] = E[N(t)] - E[X(t)] = \lambda t - \lambda tp = \lambda tq$$

$$\Rightarrow E[Z(1)] = E[N(1) - X(1)] = 12 \cdot 1 \cdot (1 - 0.2) = 9.6$$

2.8 ***Έστω*** $N(t)$ ***μία διαδικασία*** $Poisson$ ***με παράμετρο λ. Υπολογίσατε την συνδιακύμανση*** $Cov[N(t_1), N(t_2)]$***,*** $t_1, t_2 \geq 0$***.***

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι: $t_1 \geq t_2 \geq 0$. Οι τυχαίες μεταβλητές $N(t_1) - N(t_2)$ και $N(t_2)$ είναι ανεξάρτητες, άρα διαδοχικά έχουμε:

$$Cov[N(t_1), N(t_2)] = Cov[N(t_1) - N(t_2) + N(t_2), N(t_2)] =$$

$$= Cov[N(t_1) - N(t_2), N(t_2)] + Cov[N(t_2), N(t_2)] = 0 + Cov[N(t_2), N(t_2)] =$$

$$= Var[N(t_2)] = \lambda t_2$$

Αν $t_2 \geq t_1 \geq 0$ ομοίως καταλήγουμε ότι: $Cov[N(t_1), N(t_2)] = \lambda t_1$, άρα τελικά:

$$Cov[N(t_1), N(t_2)] = \lambda \min\{t_1, t_2\}$$

2.9 ***Υπολογίσατε την ροπογεννήτρια και την πιθανογεννήτρια της διαδικασίας*** $Poisson$***,*** $\mathcal{P}(\lambda t)$***.***

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$M_{\mathcal{P}}(\theta) = E(e^{\theta N(t)}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\theta k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{\theta} \lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{e^{\theta} \lambda t} = e^{\lambda t (e^{\theta} - 1)}$$

Για να βρούμε την πιθανογεννήτρια αντικαθιστούμε στην ροπογεννήτρια, όπου θ το $\ln \theta$ και έχουμε:

$$P_{\mathcal{P}}(\theta) = M_{\mathcal{P}}(\ln \theta) = e^{\lambda t (e^{\ln \theta} - 1)} = e^{\lambda t (\theta - 1)}$$

2.10 Έστω οτι η $X(t)$ **είναι μία διαδικασία** $Poisson$ **με λόγο** λ **και οτι η** $Y(t)$ **είναι μία διαδικασία** $Poisson$ **με λόγο** μ**. Δείξατε ότι:**

$$P[X(t) = k | X(t) + Y(t) = n] = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}$$

Λύση: Από ΘΟΠ έχουμε:

$$P[X(t)+Y(t)=n]=\sum_{k=0}^{n}P[X(t)=k]P[X(t)+Y(t)=n|X(t)=k]$$

και επειδή $X(t),Y(t)$ ανεξάρτητες, έχουμε:

$$P[X(t)+Y(t)=n]=\sum_{k=0}^{n}P[X(t)=k]P[Y(t)=n-k]=$$

$$=e^{-(\lambda+\mu)t}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot\frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-(\lambda+\mu)t}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\lambda^k\mu^{n-k}=$$

$$=e^{-(\lambda+\mu)t}\frac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!},\qquad n=0,1,2,...$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον βασικό τύπο του $Newton$:

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)A^kB^{n-k}$$

Διαδοχικά τώρα έχουμε:

$$P[X(t)=k|X(t)+Y(t)=n]=\frac{P[X(t)=k,X(t)+Y(t)=n]}{P[X(t)+Y(t)=n]}=$$

$$=\frac{P[X(t)=k]P[Y(t)=n-k]}{P[X(t)+Y(t)=n]}=\frac{e^{-(\lambda)t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\mu t}\dfrac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)t}\dfrac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!}}=$$

$$=\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

2.11 Έστω οτι η $X(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$ με λόγο λ και οτι η $Y(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$ με λόγο μ. Δείξατε, χρησιμοποιώντας πιθανογεννήτριες, ότι η μέση τιμή της $X(t)-Y(t)$ είναι $t(\lambda-\mu)$ και η διασπορά: $(\lambda+\mu)t$.

Λύση: Η ροπογεννήτρια της ανέλιξης $Poisson$ είναι: $M(\theta)=e^{\lambda t(e^{\theta}-1)}$, επομένως η πιθανογεννήτρια είναι: $P(\theta)=M(\ln\theta)=e^{\lambda t(\theta-1)}$. Άρα, η πιθανογεννήτρια της $Z(t)=X(t)-Y(t)$ είναι:

$$P=P_{X-Y}(\theta)=P_X(\theta)\cdot P_{-Y}(\theta)=E[\theta^{X(t)}]\cdot E[(\theta^{-1})^{Y(t)}]=$$

$$= e^{\lambda t(\theta-1)} e^{\mu t(\theta^{-1}-1)} = e^{-t(\lambda+\mu)+t(\lambda\theta+\mu\theta^{-1})}$$

Έχουμε τώρα:

$$E[Z(t) = X(t) - Y(t)] = \left.\frac{dP}{d\theta}\right|_{\theta=1} = t(\lambda - \mu)$$

και

$$Var[Z(t)] = E[Z^2(t)] - E^2[Z(t)] = E[Z(t)(Z(t)-1) + Z(t)] - E^2[Z(t)] =$$

$$= E[Z(t)(Z(t)-1)] + E[Z(t)] - E^2[Z(t)]$$

αλλά,

$$E[Z(t)(Z(t)-1)] = \left.\frac{d^2P}{d\theta^2}\right|_{\theta=1} = (\lambda-\mu)^2 t^2 + 2\mu t$$

οπότε τελικά:

$$Var[Z(t)] = [(\lambda-\mu)^2 t^2 + 2\mu t] + t(\lambda-\mu) - t^2(\lambda-\mu)^2 = (\lambda+\mu)t$$

2.12 Έστω $N(t)$ μία διαδικασία $Poisson$, με λόγο λ. Δείξατε ότι:

$$R_N(t_1, t_2) = \lambda \min\{t_1, t_2\} + \lambda^2 t_1 t_2$$

όπου $R_N(t_1, t_2)$ η αυτοσυσχέτιση ($autocorellation$),της διαδικασίας.

Λύση:

$$R_N(t_1, t_2) = Cov[N(t_1), N(t_2)] + E[N(t_1)]E[N(t_2)] =$$

$$= \lambda \min\{t_1, t_2\} + \lambda^2 t_1 t_2$$

2.13 Υποθέτουμε ότι κάποια ΚΑΚΑ γεγονότα, τα οποία μπορούν καταστρέψουν ένα σύστημα, ακολουθούν μία ανέλιξη $Poisson$ με λ=3/ώρα. Για την προστασία του συστήματος υπάρχει ένας ΦΥΛΑΚΑΣ. Ο ΦΥΛΑΚΑΣ πρέπει να αποσυρθεί από το σύστημα για 10 λεπτά, προκειμένου να επισκευασθεί. (α) Αν ένα ΚΑΚΟ γεγονός αρκεί για να καταστρέψει το σύστημα, βρείτε την πιθανότητα να καταρρεύσει το σύστημα. (β) Αν το σύστημα αντέχει ένα ΚΑΚΟ γεγονός αλλά καταρρέει με δύο, βρείτε την πιθανότητα καταστροφής του συστήματος.

Λύση: (α) Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον κακό γεγονός μέσα σε 10 λεπτά. Δηλαδή,

$$P[N(1/6) \geq 1] = 1 - P[N(1/6) < 1] = 1 - P[N(1/6) = 0] =$$

$$= 1 - e^{-3\cdot\frac{1}{6}} \frac{(3 \cdot \frac{1}{6})^0}{0!} = 1 - e^{-1/2} = 0.393469$$

(β) Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα να συμβούν δύο τουλάχιστον κακά γεγονότα μέσα σε 10 λεπτά. Δηλαδή,

$$P[N(1/6) \geq 2] = 1-P[N(1/6) < 2] = 1-P[N(1/6) = 0]-P[N(1/6) = 1] =$$

$$= 1 - e^{-3\cdot\frac{1}{6}} \frac{(3 \cdot \frac{1}{6})^0}{0!} - e^{-3\cdot\frac{1}{6}} \frac{(3 \cdot \frac{1}{6})^1}{1!} = 1 - \frac{3}{2} e^{-1/2} = 0.090204$$

2.7 Άλυτες Ασκήσεις

2.14 *Έστω $N(t)$ μία διαδικασία $Poisson$ με παράμετρο λ. Να δειχθεί ότι:*

$$P[N(s) = k | N(t) = \nu] = \begin{pmatrix} \nu \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{s}{t}\right) \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{\nu - k}$$

για $t > s$ και $\nu \geq k$.

2.15 *Εάν $X(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, βρείτε την πιθανότητα: $P[X(t) = k | X(t) \leq s]$, όταν $k = s, s-1, s-2, \ldots$*

Κεφάλαιο 3

Αυστηρός Ορισμός Διαδικασιών $Poisson$

3.1 Συνάρτηση $O(\Delta t)$

Το $O(\Delta t)$ είναι μία συνάρτηση με την ιδιότητα:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Χρησιμοποιείται για να εκφράσουμε ¨ ασήμαντες ¨ ποσότητες.

3.2 Ορισμός Διαδικασίας $Poisson$

Μία στοχαστική διαδικασία $N(t)$, λέγεται στοχαστική διαδικασία $Poisson$, με μέσο λ, αν πληροί τις κάτωθι ιδιότητες:

1. $N(t)$ ακέραιος.
2. $N(t) \geq 0$
3. $N(0) = 0$
4. $N(s) \leq N(t)$ εάν $s \leq t$.
5. $N(t) - N(t) =$ αριθμός γεγονότων, από ένα πιθανόν συμβάν, που λαμβάνουν χώρα το χρονικό διάστημα: $(s, t]$.
6. Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *independent increments*.

7. Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *stationary increments*.

8. $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + O(\Delta t)$

9. $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2] = O(\Delta t)$ (Είναι πρακτικά μηδέν).

3.3 Θεωρήματα

Θεώρημα 3.1 *Εάν $N(t)$ είναι μία διαδικασία Poisson, με μέσο λ, τότε ισχύει η σχέση:*

$$P[N(t+\Delta t) - N(t) = 0] = 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)$$

όταν $\Delta t \to 0$.

Απόδειξη: Διαδοχικά έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P[N(t+\Delta t) - N(t) = k] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[N(t+\Delta t) - N(t) = 0] + P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] +$$

$$+ P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[N(t+\Delta t) - N(t) = 0] + \lambda \Delta t + O(\Delta t) + O(\Delta t) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[N(t+\Delta t) - N(t) = 0] = 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)$$

Θεώρημα 3.2 ***Εάν*** $N(t)$ ***είναι μία διαδικασία*** $Poisson$***, με μέσο*** λ ***και*** $p_n(t) = P[N(t) = n]$***, τότε:***

$$\boxed{p_n(t) = P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

Απόδειξη: Θα δουλέψουμε επαγωγικά, υπολογίζοντας πρώτα την $p_0(t)$. Γνωρίζουμε ότι: $p_0(t) = P[N(t) = 0]$. Θεωρούμε μία απειροστή μεταβολή του χρόνου Δt και έχουμε:

$$p_0(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t) = 0] = P[N(t) = 0 \text{ και } N(t+\Delta t) - N(t) = 0] =$$

$$= P[N(t) = 0] \cdot P[N(t+\Delta t) - N(t) = 0] = p_0(t)[1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t)]$$

Άρα, μετά από πράξεις:

$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t}$$

Θεωρώντας ότι $\Delta t \to 0$, η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται στην διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{p_0'(t) = -\lambda p_0(t)}$$

Επιλύοντας έχουμε: $p_0(t) = ke^{-\lambda t}$. Αλλά, εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη: $p_0(0) = P[N(0) = 0] = 1$, θα πάρουμε $k = 1$, οπότε τελικά:

$$\boxed{p_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

Υπολογίζουμε τώρα την πιθανότητα: $p_n(t) = P[N(t) = n]$. θεωρώντας και πάλι μία απειροστή μεταβολή του χρόνου Δt, έχουμε:

$$p_n(t{+}\Delta t) = P[N(t{+}\Delta t) = n] = P[N(t) = n \text{ και } N(t{+}\Delta t){-}N(t) = 0]+$$

$$P[N(t) = n{-}1 \text{ και } N(t{+}\Delta t){-}N(t) = 1]{+}P[N(t) = n{-}2 \text{ και } N(t{+}\Delta t){-}N(t) = 2]+$$

$$+ \cdots + P[N(t) = 0 \text{ και } N(t + \Delta t) - N(t) = n - 1] =$$

$$= P[N(t) = n]{\cdot}P[N(t{+}\Delta t){-}N(t) = 0]{+}P[N(t) = n{-}1]{\cdot}P[N(t{+}\Delta t){-}N(t) = 1]+$$

$$+P[N(t) = n{-}2]{\cdot}P[N(t{+}\Delta t){-}N(t) = 2]{+}\cdots{+}P[N(t) = 0]{\cdot}P[N(t{+}\Delta t){-}N(t) = n] =$$

$$= p_n(t) \cdot [1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)] + p_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + O(\Delta t)]+$$

$$+p_{n-2}(t)O(\Delta t) + p_{n-3}(t)O(\Delta t) + \cdots + p_0(t)O(\Delta t)$$

Επομένως,

$$p_n(t{+}\Delta t) = p_n(t){-}p_n(t)\lambda\Delta t{+}p_n(t)O(\Delta t){+}p_{n-1}(t)\lambda\Delta t{+}p_{n-1}(t)O(\Delta t)+$$

$$+O(\Delta t) \cdot (p_{n-2}(t) + p_{n-3}(t) + \cdots + p_0(t))$$

Μεταφέροντας το $p_n(t)$ στο πρώτο μέρος και διαιρώντας με το Δt, έχουμε:

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + p_n(t)\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} + p_{n-1}(t)\lambda+$$

$$+p_{n-1}(t)\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \cdot (p_{n-2}(t) + p_{n-3}(t) + \cdots + p_0(t))$$

Παίρνοντας $\Delta t \to 0$, οπότε $\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$, έχουμε οριακά την διαφορική εξίσωση: $p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$ ή

$$\boxed{p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)}$$

Αυτή είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Η λύση της ομογενούς είναι: $p_n(t) = ce^{-\lambda t}$. Για να βρούμε μία μερική λύση, θεωρούμε ότι αυτή έχει την μορφή: $M(t) = h(t)e^{-\lambda t}$, όπου $h(t)$ συνάρτηση προς προσδιορισμό. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$M'(t) + \lambda M(t) = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(t))e^{-\lambda t} + h(t)(-\lambda))e^{-\lambda t} + \lambda h(t))e^{-\lambda t} = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(t) = \int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt \Rightarrow M(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

Άρα, τελικά, η λυση της εξίσωσης είναι:

$$p_n(t) = ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη: $p_n(0) = 0$, για κάθε n, έχουμε:

$$p_n(0) = ce^0 + e^0\int e^0\lambda \cdot 0dt = 0 \Rightarrow c = 0$$

Άρα, η τελική - τελική λύση της εξίσωσης είναι:

$$\boxed{p_n(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt}$$

Για $n = 1$, έχουμε:

$$p_1(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_0(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)$$

Για $n = 2$, έχουμε:

$$p_2(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_1(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)dt = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^2}{2!}$$

Για $n = 3$, έχουμε:

$$p_3(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_2(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^2}{2!}dt = e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

Για $n-1$, έχουμε:

$$p_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-2}(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}dt =$$

$$= e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Άρα, εν κατακλείδι:

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \Rightarrow$$

$$\boxed{p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}$$

Θεώρημα 3.3 ***Ισχύει η σχέση:*** $O(\Delta t) = \lambda\Delta t(e^{-\lambda\Delta t}-1)$**.**

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι: $P[N(t+\Delta t)-N(t)=1] = \lambda\Delta t + O(\Delta t)$. Για $t=0$, η σχέση γίνεται: $P[N(\Delta t)-N(0)=1] = \lambda\Delta t + O(\Delta t)$ και άρα:

$$P[N(\Delta t)=1] = \lambda\Delta t + O(\Delta t) \Rightarrow e^{-\lambda t}\frac{(\lambda\Delta t)}{1!} = \lambda\Delta t + O(\Delta t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O(\Delta t) = \lambda\Delta t(e^{-\lambda\Delta t}-1)$$

3.4 Λυμένες Ασκήσεις

3.1 Έστω $N(t)$ **μία διαδικασία** $Poisson$**, με λόγο** λ**. Ορίζουμε:** $p_n(t) = P[N(t)=n]$**. Χρησιμοποιώντας την ΔΕ** $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$ **και κατάλληλες αρχικές συνθήκες, δείξατε ότι:** $p_0(t) = e^{-\lambda t}$**. Χρησιμοποιώντας την ΔΕ:** $p_n'(t)+\lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)$ **και κατάλληλες αρχικές συνθήκες, δείξατε ότι:** $p_n(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$**.**

Λύση: Η αρχική συνθήκη είναι $p_0(0) = P[N(0)=0] = 1$. Η ΔΕ γράφεται: $p_0'(t)+\lambda p_0(t) = 0$. Είναι γραμμική ομογενής και άρα $p_0(t) = Ce^{\lambda t}$. Από την αρχική συνθήκη βρίσκουμε ότι: $C=1$ και άρα $p_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Ισχύει ότι $p_1(0) = P[N(0) = 1]$ αλλά, από ιδιότητες $Poisson$, αυτή η πιθανότητα είναι μηδενική, επομένως $p_1(0) = 0$. Ομοίως, $p_2(0) = 0$, $p_3(0) = 0$, ... και γενικά, $p_n(0) = 0$. Αυτή είναι η αρχική συνθήκη που θα χρησιμοποιήσουμε.

Η ΔΕ: $p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)$ είναι γραμμική πρώτης τάξεως. Η λύση της ομογενούς είναι: $p_n^{hom}(t) = Ce^{-\lambda t}$.

Για να βρούμε μία μερική λύση, θεωρούμε μία άγνωστη συνάρτηση $U(t)$ προς προσδιορισμό, έτσι ώστε η $p_n(t) = U(t)e^{-\lambda t}$ να είναι λύση της ΔΕ. Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$(U(t)e^{-\lambda t})' + \lambda(U(t)e^{-\lambda t}) = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U'(t)e^{-\lambda t} - U(t)\lambda e^{-\lambda t} + \lambda(U(t)e^{-\lambda t}) = \lambda p_{n-1}(t) \Rightarrow U(t) =$$

$$= \int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

και επομένως η μερική λύση είναι:

$$p_n^{partial}(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

και άρα η γενική λύση είναι:

$$p_n(t) = Ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

Από την αρχική συνθήκη $p_n(0) = 0 = p_{n-1}(0)$, έχουμε:

$$p_n(0) = 0 = Ce^{-\lambda 0} + e^{-\lambda 0}\int e^{\lambda 0}\lambda p_{n-1}(0)dt \Rightarrow 0 = C + 0 \Rightarrow C = 0$$

και η τελική λύση είναι:

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}\lambda p_{n-1}(t)dt$$

Κεφάλαιο 4

Ενδιάμεσοι Χρόνοι - Χρόνοι Άφιξης

4.1 Ορισμοί

Επαναλαμβάνουμε τους βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 4.1 *Η τυχαία μεταβλητή Z_n, που μετράει την χρονική διάρκεια μεταξύ του $n-1$ και του n συμβαντος, λέγεται* ***ενδιάμεσος χρόνος.***

Ορισμός 4.2 *Η τυχαία μεταβλητή T_i, που μας δίνει την χρονική περίοδο απο την χρονική στιγμή 0 μέχρι να συμβεί το i-γεγονός, ονομάζεται* ***χρόνος άφιξης****.*

Ορισμός 4.3 *Έστω t μία χρονική στιγμή που δεν συβαίνει γεγονός. Ο χρόνος $W(t)$ από την στιγμή t, μέχρι να συμβεί το επόμενο γεγονός, ονομάζεται* ***χρόνος αναμονής****.*

4.2 Κατανομές

Θεώρημα 4.1 *Εάν $N(t)$ είναι μία διαδικασία $Poisson$, με λόγο λ, τότε οι τυχαίες μεταβλητές των ενδιαμέσων χρόνων είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Δηλαδή:*

$$Z_i \sim \mathcal{E}(\lambda), \quad i = 1, 2, ...$$

Θεώρημα 4.2 *Εάν* $N(t)$ *είναι μία διαδικασία* $Poisson$, *με λόγο* λ, *τότε οι τυχαίες μεταβλητές των χρόνων άφιξης,* $T_1, T_2, ..., T_n$ *ακολουθούν την Γάμμα κατανομή με παράμετρο* λ. *Δηλαδή:*

$$T_n \sim Gamma(n, \lambda), \quad n = 1, 2, ...$$

με

$$E[T_n] = \frac{n}{\lambda} \quad , \quad V[T_n] = \frac{n}{\lambda^2}$$

Θεώρημα 4.3 *Έστω* $N(t)$ *μία διαδικασία* $Poisson$, *με λόγο* λ. *Υποθέτουμε ότι* 1 *γεγονός συμβαίνει στο διάστημα* $(0, t)$. *Η τυχαία μεταβλητή* T_1 *ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο* $(0, t)$.

Θεώρημα 4.4 *Εάν* $N(t)$ *είναι μία διαδικασία* $Poisson$, *με λόγο* λ, *τότε οι τυχαίες μεταβλητές των χρόνων αναμονής* $W(t)$, *είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο* λ. *Δηλαδή:*

$$W(t) \sim \mathcal{E}(\lambda), \quad t > 0$$

4.3 Λυμένες Ασκήσεις

4.1 οι ασθενείς που φθάνουν σε ένα νοσοκομείο ακολουθούν την ανέλιξη $Poisson$ **με** $\lambda = 1/10$ **ανά λεπτό. Ο ιατρός δεν βλέπει έναν ασθενή μέχρι να περιμένουν 3 τουλάχιστον ασθενείς.**
(α) Βρείτε τον μέσο χρόνο αναμονής μέχρι ο ιατρός να δεχθεί τον πρώτο ασθενή.
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να μην δει ο ιατρός ασθενή την πρώτη ώρα;

Λύση: (α) Έστω T_3 ο χρόνος άφιξης του τρίτου ασθενούς. Ζητάμε $E(T_3)$. Έχουμε:

$$E(T_3) = E(Z_1 + Z_2 + Z_3) = E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) = 3 \cdot \frac{1}{\lambda} = 3 \cdot 10 = 30$$

(β) Έστω p η πιθανότητα να μην βλέπει κανέναν ο ιατρός την πρώτη ώρα. Έχουμε:

$$p = P[N(60) - N(0) \leq 2] =$$

$$= P[N(60) - N(0) = 0] + P[N(60) - N(0) = 1] + P[N(60) - N(0) = 2] =$$

$$= e^{-60/10} + e^{-60/10} \cdot \frac{60}{10} + e^{-60/10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{60}{10}\right)^2 = 0.062$$

4.2 Έστωσαν $X(t)$, $Y(t)$ ανελίξεις $Poisson$, με λόγους λ_X, λ_Y αντίστοιχα. Να βρεθεί η πιθανότητα το πρώτο γεγονός της διαδικασίας $X(t)$ να συμβεί πριν από το πρώτο γεγονός της $Y(t)$.

Λύση: Ορίζουμε:

- $Z_{X,1}$ μία τυχαία μεταβλητή που μετρά που μετρά τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου γεγονότος της $X(t)$.
- $Z_{Y,1}$ μία τυχαία μεταβλητή που μετρά που μετρά τον χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου γεγονότος της $Y(t)$.

Οι τυχαίες αυτές μεταβλητές ακολουθούν εκθετικές κατανομές με παραμέτρους λ_X, λ_Y. Η τυχαία μεταβλητή $Z_{Y,1}$, μπορεί να λάβει άπειρες τιμές. Με την χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητος έχουμε:

$$P[Z_{X,1} < Z_{Y,1}] = \int_0^{+\infty} P[Z_{X,1} < Z_{Y,1} | Z_{Y,1} = y] \cdot P[Z_{Y,1} = y] dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} P[Z_{X,1} < Z_{Y,1} | Z_{Y,1} = y] \cdot \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} P[Z_{X,1} < y] \cdot \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_X y}) \cdot \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy - \lambda_Y \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_X + \lambda_Y) y} dy = \frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y}$$

4.3 ΄Εστω ανέλιξη $Poisson$ με λόγο $\lambda = 0.5$. Βρείτε την πιθανότητα το 10ο γεγονός να συμβεί μετά την 20η χρονική στιγμή.

Λύση: Με T_{10} συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή, του πότε θα συμβεί το 10ο γεγονός, θέλουμε $P(T_{10} > 20)$. Η T_{10} ακολουθεί την κατανομή $Erlang$. Έχουμε:

$$P(T_{10} > 20) = \int_{20}^{+\infty} \lambda^{10} \frac{t^9}{9!} e^{-\lambda t} dt = 0.457931 \qquad , \qquad \lambda = 0.5$$

Ισοδύναμα, η πιθανότητα $P(T_{10} > 20)$ είναι ίδια με την $P[N(20) < 10]$, χρησιμοποιώντας την ανέλιξη $Poisson$, έχουμε:

$$P[N(20) < 10] = \sum_{j=0}^{9} e^{-20\lambda} \frac{(20\lambda)^j}{9!} 0.457931 \qquad , \qquad \lambda = 0.5$$

4.4 Αποδείξατε το θεώρημα: 4.1

Λύση: Θα δουλέψουμε επαγωγικά. Έστω Z_1 ο ενδιάμεσος χρόνος μέχρι το πρώτο γεγονός. Η πιθανότητα $P(Z_1 > t)$ είναι ίση με την πιθανότητα: $P($ κανένα γεγονός στο $(0,t])$, επομένως:

$$P(Z_1 > t) = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Άρα, για την αθροιστική κατανομή της Z_1 έχουμε:

$$F_{Z_1}(t) = P[Z_1 \leq t] = 1 - P[Z_1 > t] = \begin{cases} 1 - e^{\lambda t}, & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, η Z_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Έστω τώρα, Z_2 ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ του 1ου και του 2ου γεγονότος. Έστω ακόμα t, μία τυχαία χρονική στιγμή. Η πιθανότητα $P(Z_2 > t)$ είναι ίση με την πιθανότητα το πρώτο γεγονός να έχει συμβεί στο χρονικό διάστημα $(0,s]$ και στο διάστημα $(s,s+t]$ να μηνέχει συμβεί γεγονός, δηλαδή με την πιθανότητα: $P[$ καμμία άφιξη στο $(s,s+t]|Z_1 = s]$. Αλλά, λόγω της ιδιότητος των *independent increments*, έχουμε:

$$P[\text{ καμμία άφιξη στο } (s,s+t]|Z_1 = s] = P[\text{ καμμία άφιξη στο } (s,s+t]] =$$

$$P[N(t+s) - N(s) = 0] = P[N(t+s-s) = 0] = P[N(t) = 0] =$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Άρα, για την αθροιστική κατανομή της Z_2 έχουμε:

$$F_{Z_2}(t) = P[Z_2 \leq t] = 1 - P[Z_2 > t] = \begin{cases} 1 - e^{\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, η Z_2 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Ομοίως αποδεικνύεται για την Z_i, $i = 3, 4, 5, ...$, ότι ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Παραλλαγή απόδειξης. Για να δείξουμε ότι η Z_2 ακολουθεί την εκθετική κατανομή, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

$$P(Z_2 > t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P[Z_2 > t|Z_1 = \tau] f_1(\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P[N(t+\tau) - N(\tau) = 0] f_1(\tau) d\tau =$$

$$= e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) d\tau = e^{-\lambda t} \cdot 1 = e^{-\lambda t}$$

όπου $f_1(\tau)$, η συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος της Z_1. Η απόδειξη συνεχίζει όπως πριν.

4.5 Αποδείξατε το θεώρημα 4.2.

Λύση: Θα υπολογίσουμε την αθροιστική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής: T_n. Έστω t μία αυθαίρετη χρονική στιγμή. Διαδοχικά έχουμε:

$$F(t) = P(T_n \le t) = P[N(t) \ge n] = \sum_{i=n}^{\infty} P[N(t) = i] = \sum_{i=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Πράγματι, $T_n \le t$ σημαίνει ότι το n-ιοστό γεγονός συμβαίνει πρίν την χρονική στιγμή t, άρα, μέσα στο διάστημα $(0, t]$ συμβαίνουν περισσότερα από n γεγονότα. Για να βρούμε την συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος, παραγωγίζουμε και έχουμε:

$$f(t) = F'(t) = \sum_{i=n}^{\infty} \left[-\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda (\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} \right] =$$

$$= \left[-\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] + \left[-\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda (\lambda t)^n}{(n)!} \right] + \cdots$$

$$\cdots + \left[-\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+2}}{(n+2)!} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda (\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \right] + \cdots =$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

η οποία είναι η συν.π.π. της Γάμμα κατανομής ή της κατανομής $Erlang$.
Επίσης $T_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ με $Z_i \sim Exp(\lambda)$, άρα:

$$E(T_n) = nE(Z_i) = \frac{n}{\lambda} \quad , \quad V(T_n) = nV(X_i) = \frac{n}{\lambda^2}$$

4.6 Αποδείξατε το θεώρημα 4.4.

Λύση: Έστω ότι το n-οστό γεγονός συμβαίνει την χρονική στιγμή t_n και το $n-1$-οστό γεγονός την χρονική στιγμή s. Προφανώς $Z_n = t_n - s$. Έστω t μία χρονική στιγμή ανάμεσα στην s και την t_n, αυτή την χρονική στιγμή δεν συμβαίνει κανένα γεγονός, επομένως $W(t) = t_n - t$. Ισχύει:

$$t_n - t = t_n - s + s - t = t_n - s - (t-s) \Rightarrow W(t) = Z_n - (t-s)$$

Για να βρούμε την αθροιστική κατανομή της $W(t)$ θεωρούμε σταθερή ποσότητα τ και υπολογίζουμε:

$$F_W(\tau) = P[W(t) \le \tau] = 1 - P[W(t) > \tau]$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση,

$$W(t) > \tau \Rightarrow Z_n - (t-s) > \tau \Rightarrow Z_n > t - s + \tau$$

Επομένως,

$$P[W(t) > \tau] = P[Z_n > t - s + \tau | Z_n > t - s] =$$

$$= \frac{P[Z_n > t - s + \tau \cap Z_n > t - s]}{P[Z_n > t - s]} = \frac{P[Z_n > t - s + \tau]}{P[Z_n > t - s]}$$

Το Z_n ακολουθεί την εκθετική κατανομή, επομένως:

$$\frac{P[Z_n > t - s + \tau]}{P[Z_n > t - s]} = \frac{e^{-\lambda(t-s+\tau)}}{e^{-\lambda(t-s)}} = e^{-\lambda\tau} \Rightarrow F_W(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$$

Επομένως η $W(t)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

4.7 Αποδείξατε το θεώρημα 4.3.

Λύση: Θα προσδιορίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της T_1. Έχουμε:

$$F_{T_1}(\tau) = P[T_1 \le \tau] = P[T_1 \le \tau | X(t) = 1] =$$

$$= \frac{P[T_1 \le \tau \text{ και } X(t) = 1]}{P[X(t) = 1]} = \frac{P[X(\tau) = 1 \text{ και } X(t) - X(\tau) = 0]}{P[X(t) = 1]} =$$

$$= \frac{\lambda\tau e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda(t-\tau)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{\tau}{t}$$

Αυτή είναι, αφού t σταθερό, η αθροιστική κατανομή της ομοιόμορφης κατανομής.

Κεφάλαιο 5

Συγχώνευση-Διάσπαση Διαδικασιών *Poisson*

5.1 Συγχώνευση

Έστωσαν $N_1(t), N_2(t)$, δύο στοχαστικές διαδικασίες *Poisson* με λόγους λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Ορίζουμε την ανέλιξη: $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Ισχύουν τα εξής:

- $N(0) = 0$
- $N(t) \in \{0, 1, 2, ...\}$
- Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *independent increments*.
- Η $N(t)$ έχει την ιδιότητα των *stationary increments*.
- Η $N(t)$ είναι στοχαστική ανέλιξη *Poisson* με λόγο: $\lambda_1 + \lambda_2$, δηλαδή:

$$\boxed{N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_1 t + \lambda_2 t)}$$

Γενικότερα ισχύει:

Θεώρημα 5.1 *Αν* $N_1(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_1 t)$, $N_2(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_2 t)$, $\ldots$, $N_m(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_m t)$, *τότε:*

$$\boxed{N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_m(t) \sim \mathcal{P}((\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m)t)}$$

5.2 Διάσπαση

Θεώρημα 5.2 *Έστω $N(t)$, μία στοχαστική ανέλιξη $Poisson$ με λόγο λ. Διασπάμε την $N(t)$ σε δύο ανελίξεις $N_1(t), N_2(t)$, ως εξής: Για κάθε άφιξη διεξάγουμε ένα τυχαίο πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας p. Εάν έχουμε επιτυχία, η άφιξη αποδίδεται στην ανέλιξη $N_1(t)$, άλλως στην $N_2(t)$. Ισχύουν:*

1. $N_1(t) \sim \mathcal{P}(\lambda pt)$
2. $N_2(t) \sim \mathcal{P}(\lambda qt)$, $q = 1 - p$
3. *Οι $N_1(t), N_2(t)$ είναι ανεξάρτητες.*

5.3 Λυμένες Ασκήσεις

5.1 ***Το πλήθος των πελατών ενός μπαρ σε ένα χρονικό διάστημα*** $[0, t)$ ***είναι μία διαδικασία*** $Poisson$, $N(t)$***, με λόγο*** μ***. Ενας πελάτης παραγγέλνει ποτό με πιθανότητα*** p***, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες και την ποσότητα*** $N(t)$***. (α) Βρείτε την κατανομή αυτών που παραγγέλνουν και αυτών που δεν παραγγέλνουν. (β) Βρείτε την από κοινού κατανομή. (γ) είναι ανεξάρτητες·***

Λύση: (α) Ορίζουμε $X(t)$ την ανέλιξη, που μετράει αυτούς που παραγγέλνουν και $Y(t)$, αυτούς που δεν παραγγέλνουν. Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος έχω:

$$P[X(t) = k] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X(t) = k|N(t) = n]P[N(t) = n]$$

αλλά,

$$P[N(t) = n] = e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^n}{n!} \quad , \quad P[X(t) = k|N(t) = n] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

αντικαθιστώντας, έχω:

$$P[X(t) = k] = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{p^k q^{n-k} e^{-\mu t}\mu^n n!}{k!(n-k)!n!} =$$

$$= \frac{e^{-\mu t}(\mu p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\mu tq)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\mu t}(\mu p)^k}{k!} e^{\mu tq} = e^{-\mu tp}\frac{(\mu tp)^k}{k!}$$

Επομένως, η $X(t)$ ακολουθεί $Poisson$, με παράμετρο μp και η $Y(t)$ ακολουθεί $Poisson$, με παράμετρο μq.
(β) Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος είναι:

$$P_{XY}[X(t)=i,Y(t)=j]=\sum_{n=0}^{\infty}P[X(t)=i,Y(t)=j|N(t)=n]P[N(t)=n]$$

αλλά, $P[X(t)=i,Y(t)=j|N(t)=n]=0$ εάν $n\neq i+j$, οπότε:

$$P_{XY}[X(t)=i,Y(t)=j]=P[X(t)=i,Y(t)=j|N(t)=i+j]P[N(t)=i+j]=$$

$$P[X(t)=i|N(t)=i+j]P[N(t)=i+j]=\begin{pmatrix} i+j \\ i \end{pmatrix}p^iq^je^{-\mu t}\frac{(\mu t)^{i+j}}{(i+j)!}=$$

$$=e^{-\mu t}\frac{(\mu tp)^i(\mu tq)^j}{i!j!}=e^{-\mu tp}\frac{(\mu tp)^i}{i!}\cdot e^{-\mu tq}\frac{(\mu tq)^j}{j!}=$$

$$=P[X(t)=i]\cdot P[Y(t)=j]$$

(γ) Από την προηγούμενη σχέση οι $X(t),Y(t)$ είναι ανεξάρτητες.

Ευρετήριο