Στοχαστικά ΙΙ

Ανελίξεις Poisson ⟷ "αφίξεων"

Διακριτά Συστήματα Markov ⟷ "Μεταβάσεις"

Εισαγωγή στα Αναλογιστικά Μαθηματικά ⟷

Ανελίξεις Poisson

$\mathcal{P}(\lambda)$ $\qquad \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = P(X=k)$

Ροπογεννήτρια Poisson : $M(\theta) = e^{\lambda e^{\theta} - \lambda}$

Ροπές: $E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$

Άθροισμα: $X_i \sim \mathcal{P}(\mu_i) \Rightarrow$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n).$$

Poisson προσέγγιση Διωνυμικής

πλήθος πειραμάτων

$$B(n,p)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} =$$

πιθανότης

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k q^{n-k}$$

Έστω n πολύ μεγαλύτερο του k, $n >\!>\!> k$

$$\boxed{n-k \simeq n} \Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{\cancel{1\cdot 2 \cdots (n-k)}\,(n-(k+1))\cdots}{\cancel{1\cdot 2 \cdots (n-k)}}$$

$$\cdots n = (n-(k-1))\cdots(n-1)\,n =$$

$$= n \cdot \ldots \cdot n \cdot n \cdot n = n^k$$

$$B(n,p) = \frac{n^k p^k (1-p)^{n-k}}{k!} \quad n-k = n$$

$$e^{-p} = \sum \frac{(-p)^s}{s!} = 1 - p + \underbrace{\frac{p^2}{2!} - \cdots}_{0} \approx 1-p$$

p μικρό

$$B(n,p) = \frac{n^k p^k (e^{-p})^{\cancel{n-k}\,n}}{k!} = \frac{(np)^k\, e^{-\overset{\lambda}{pn}}}{k!} = \boxed{\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

Στοχαστική Poisson

αφίξεις σε χρονικό διάστημα $[0, t]$

$N(t)$ = πλήθος των γεγονότων που συμβαίνουν στο $[0, t]$, τυχαία μεταβλητή

T_1 = τον χρόνο μέχρι να συμβεί το πρώτο γεγονός

T_2 = χρόνος μέχρι δεύτερο γεγονός

⋮

$\boxed{T_i}$ = » » i γεγονός

t_i = χρόνοι που εμφανίστηκαν τα γεγονότα

σημεία συμβάντων.

Z_n = η διάρκεια μεταξύ του γεγονότος $n-1$ και του n.

Ενδιάμεσος χρόνος

$W(t)$ = χρονική διάρκεια από την στιγμή t, μέχρι να συμβεί γεγονός. Χρόνος αναμονής

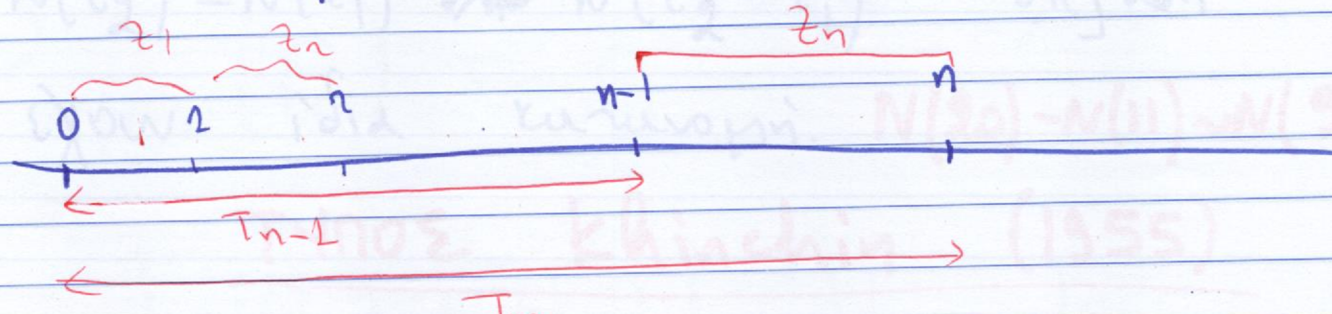
Βασικές Ιδιότητες

$\boxed{1}$ $N(t)$ φυσικός αριθμός

$\boxed{2}$ $N(0) = 0$

$\boxed{3}$ s, t έτσι ώστε $t > s \geq 0$. $N(t) - N(s) =$ αφίξεις από $(s, t]$

$\boxed{4}$ $Z_n = T_n - T_{n-1}$



$\boxed{5}$ $T_n = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n$

$k!$

$E[N(t)] = \lambda t, \quad V[N(t)] = \lambda t$

πλήθος υποδιαστημάτων $= s \cdot n = t$

$N(t) = k \Leftrightarrow k =$ πλήθος "επιτυχιών"

σε $n = \frac{t}{\delta}$ επαναλήψεις

$$N(t) \sim B(n, \lambda\delta) = B\left(\frac{t}{\delta}, \lambda\delta\right)$$

$p =$ πιθανότητα άφιξης σε υποδιάστημα μήκους δ, είναι $\boxed{p = \lambda\delta}$

$$N(t) \sim \binom{n}{k} (\lambda\delta)^k (1-\lambda\delta)^{n-k}$$

επειδή $\delta \to 0 \Rightarrow n = \frac{t}{\delta} \to \infty$

και $np = \frac{t}{\delta} \cdot \lambda\delta = t\lambda > 0$ σταθερό ανεξάρτητο του δ.

$$\Rightarrow \quad \boxed{N(t) \sim \mathcal{P}(t\lambda) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}$$

Poisson + Monte Carlo

Input: t, λ, n πλήθος υποδιαστημάτων

Output: Το k, πόσες αφίξεις από $[0,t]$. (δηλ. $N(t)$)

$$\delta = \frac{t}{n}$$

$$p = \lambda\delta = \lambda t/n$$

$k=0$

```
FOR i=1 TO n
    R=rnd        τυχαίος από (0,1)
    IF R ≤ p THEN k=k+1
NEXT
```

Αν βάλουμε $t=1 \rightsquigarrow$ αριθμούς $\sim P(\lambda)$

Άσκηση Σε μία Poisson $\lambda=0.2$

Βρείτε την πιθανότητα να μην έχω άφιξη στο $(2,6]$

$$N(6)-N(2) \sim N(6-2) \sim N(4)$$

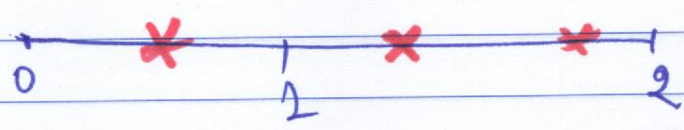
$$P[N(4)=0] = e^{-0.2\cdot 4}\,\frac{(0.2\cdot 4)^0}{0!} = \dots$$

$\lambda = 0.2$

$t=4$

$k=0$

Βρείτε την πιθανότητα να έχουμε 1 γεγονός στο $(0,1]$ και 2 γεγονότα στο $(1,2]$

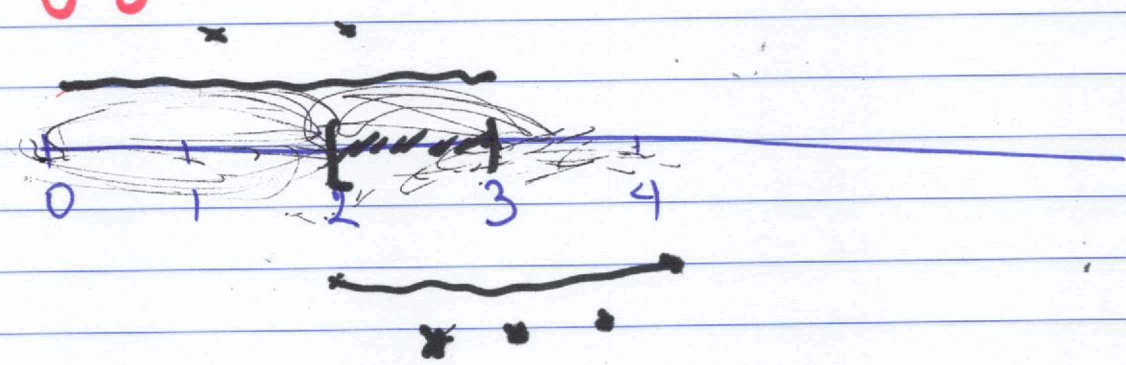


$$P[N(1)=1 \text{ και } N(2)-N(1)=2] = P[N(1)=1,\ N(1)=2] =$$

$$= P[N(1)=1]\cdot P[N(1)=2]$$

$$= e^{-0.2\cdot 1}\,\frac{(0.2\cdot 1)^1}{1!}\quad e^{-0.2\cdot 1}\,\frac{(0.2\cdot 1)^2}{2!} = \dots$$

$N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. Βρείτε την πιθανότητα 2 γεγονότων από $(0,3]$ και 3 γεγονότων από $(2,4]$.



X τ.μ. πλήθος γεγονότων από $(0, 2]$

Y τ.μ. » » $(2, 3]$

Z τ.μ. » » $(3, 4]$

$$P[X+Y=2,\ Y+Z=3] \overset{\text{Θ.Ο.Π}}{=}$$

$$= P[Y=0]\cdot P[\cancel{X=2, Z=3}\ X+Y=2,\ Y+Z=3 \mid Y=0] +$$

$$+ P[Y=1]\cdot P[X+Y=2,\ Y+Z=3 \mid Y=1] +$$

$$+ P[Y=2]\cdot P[X+Y=2,\ Y+Z=3 \mid Y=2] =$$

$$= P[Y=0] \cdot P[X=2, Z=3] +$$

$$+ P[Y=1] \cdot P[X=1, Z=2] +$$

$$+ P[Y=2] \cdot P[X=0, Z=1] =$$

$$= P[Y=0] \cdot P[X=2] \cdot P[Z=3] + P[Y=1] \cdot P[X=1] \cdot P[Z=2]$$

$$+ P[Y=2] \cdot P[X=0] \cdot P[Z=1] =$$

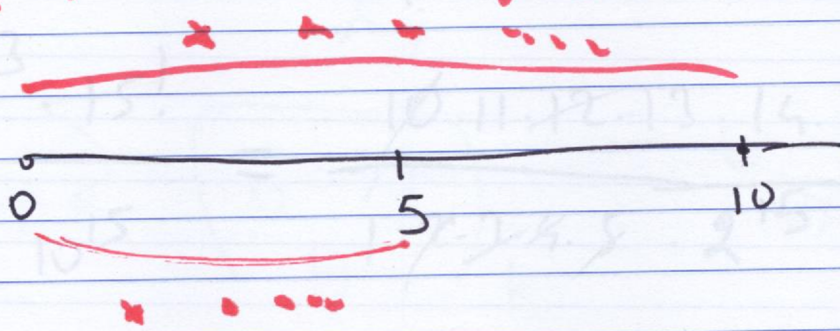
$$= e^{-\lambda \cdot 1} \cdot \frac{(\lambda \cdot 1)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \cdot 2} \frac{(\lambda \cdot 2)^2}{2!} e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^3}{3!} +$$

$$+ e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^1}{1!} e^{-\lambda \cdot 2} \frac{(\lambda \cdot 2)^1}{1!} \cdot e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^2}{2!} +$$

$$+ e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^2}{2!} e^{-\lambda \cdot 2} \frac{(\lambda \cdot 2)^0}{0!} e^{-\lambda \cdot 1} \frac{(\lambda \cdot 1)^1}{1!} =$$

$$= e^{-4\lambda} \left(\frac{2}{3} \lambda^5 + 2\lambda^4 \right)$$

$N(t) \sim P(\lambda t)$ ακολουθεί διαδικασία Poisson. Βρείτε την πιθανότητα 10 αφίξεων από $(0,5]$, δεδομένου ότι από $(0,10]$ έχουμε 15 αφίξεις.



$$P[N(5)=10 \mid N(10)=15] =$$

$$= \frac{P[N(5)=10 \text{ και } N(10)=15]}{P[N(10)=15]} =$$

$$= \frac{P[N(5)=10 \text{ και } N(10)-N(5)=5]}{P[N(10)=15]}$$

$$= \frac{P[N(5)=10] \cdot P[N(10)-N(5)=5]}{P[N(10)=15]}$$

Μάθημα 2ο

11/3/2023

$X(t) \sim P(\lambda t)$ και $Y(t) \sim P(\mu t)$ να δειχθεί ότι:

$$P\left[X(t)=2 \mid X(t)+Y(t)=4\right] = \binom{4}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

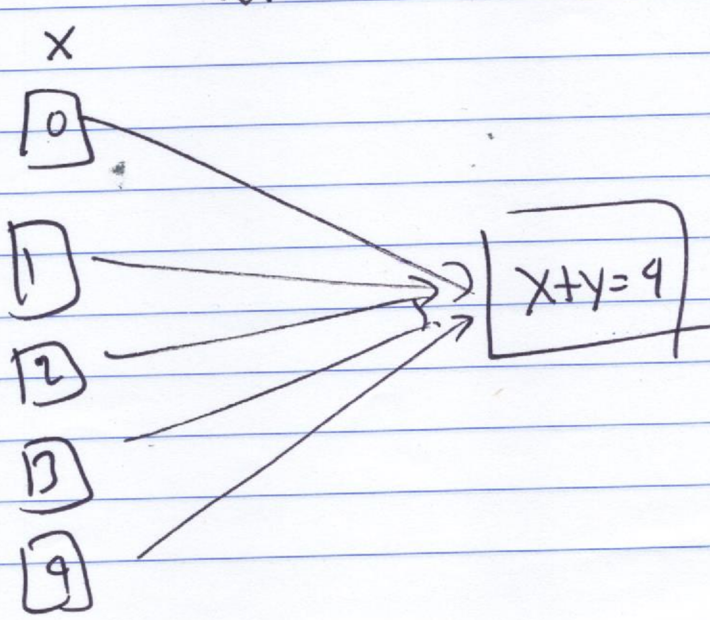
$$P\left[X(t)=2 \mid X(t)+Y(t)=4\right] = \frac{P[X(t)=2 \text{ και } X(t)+Y(t)=4]}{P[X(t)+Y(t)=4]}$$

$$P[X(t)=2 \text{ και } X(t)+Y(t)=4] = P[X(t)=2 \text{ και } Y(t)=2] =$$

$$= P[X(t)=2] \cdot P[Y(t)=2] =$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} \cdot e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^2}{2!}$$

$P[X(t)+Y(t)=4]$



Θ.Ο.Π.

$$P[X(t)+Y(t)=4] \overset{\text{Θ.Ο.Π}}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{4} P[X(t)=k] \cdot P[X(t)+Y(t)=4 \mid X(t)=k]$$

$$= \sum_{k=0}^{4} P[X(t)=k] \cdot P[Y(t)=4-k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{4-k}}{(4-k)!} =$$

$$= \boxed{e^{-\lambda t} e^{-\mu t} \cdot \frac{1}{24} t^4 (\lambda+\mu)^4}$$ Παρανομαστής

$$P[X(t)=2 \mid X(t)+Y(t)=4] = \frac{\cancel{e^{-\lambda t}} \frac{(\lambda \cancel{t})^2}{2!} \cancel{e^{-\mu t}} \frac{(\mu \cancel{t})^2}{2!}}{\cancel{e^{-\lambda t}} \cancel{e^{-\mu t}} \frac{1}{24} \cancel{t^4} (\lambda+\mu)^4}$$

$$\boxed{= \frac{6 \lambda^2 \mu^2}{(\lambda+\mu)^4} = \binom{4}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2}$$

$$P[X(t)=\alpha \mid X(t)+Y(t)=\beta] =$$

$$= \binom{\beta}{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{\beta-\alpha}$$

homework

1/3/24

Χαρτοφυλάκιο , χρονική περίοδο $(0,t]$

απαιτήσεις $\sim \mathcal{P}(\lambda t)$, $\lambda=12$/εβδομάδα

Το 20% είναι τύπου Α και το υπόλοιπο τύπου Β.

1) Να βρεθεί η πιθανότητα να υπάρχουν 2 το πολύ απαιτήσεις τύπου Α σε μία εβδομάδα.

$N(t)$: όλες οι απαιτήσεις

στο $[0,t)$

$X(t)$: οι απαιτήσεις τύπου Α

$$P[X(t)=\rho] \overset{\Theta.O.\Pi}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} P[X(t)=\rho \mid N(t)=\nu]\cdot P[N(t)=\nu]$$

$$P[X(t)=\rho \mid N(t)=v] = \binom{v}{\rho} p^{\rho} q^{v-\rho} \qquad v \geq \rho$$

$$= 0 \qquad v < \rho$$

$$P[X(t)=\rho] = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v}{\rho} p^{\rho} q^{v-\rho} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^v}{v!} =$$

$$= \sum_{v=\rho}^{\infty} \binom{v}{\rho} p^{\rho} q^{v-\rho} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^v}{v!} =$$

$$= p^{\rho} q^{-\rho} e^{-\lambda t} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{\cancel{v!}}{\rho!(v-\rho)!} \frac{(\lambda t)^v}{\cancel{v!}} q^v =$$

$$= p^{\rho} q^{-\rho} e^{-\lambda t} \frac{1}{\rho!} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{(\lambda t q)^v}{(v-\rho)!} \qquad (\lambda t q)^v = (\lambda t q)^{v-\rho} \cdot (\lambda t q)^{\rho}$$

$$= \frac{p^{\rho} q^{-\rho} e^{-\lambda t}}{\rho!} (\lambda t q)^{\rho} \sum_{v=\rho}^{\infty} \frac{(\lambda t q)^{v-\rho}}{(v-\rho)!} =$$

$$e^x = \sum_{\theta=} \frac{x^{\theta}}{\theta!}$$

$$= \frac{p^{\rho} q^{-\rho} e^{-\lambda t} (\lambda t q)^{\rho}}{\rho!} e^{\lambda t q} =$$

$$= \boxed{\frac{(p\lambda t)^{\rho}}{\rho!} e^{-p\lambda t}} = P[X(t) = \rho]$$

P ποσόστωση

$$P[X(t) \le 2] = P[X(1) \le 2] =$$

$$= P[X(1)=0] + P[X(1)=1] + P[X(1)=2] =$$

$$= \frac{(0.2 \cdot 12 \cdot 1)^0}{0!} e^{-0.2 \cdot 12 \cdot 1} + \frac{(0.2 \cdot 12 \cdot 1)^1}{1!} e^{-0.2 \cdot 12 \cdot 1} +$$

$$+ \frac{(0.2 \cdot 12 \cdot 1)^2}{2!} e^{-0.2 \cdot 12 \cdot 1} = \ldots$$

Άσκηση: $X(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$
$Y(t) \sim \mathcal{P}(\mu t)$ να βρεθεί

η μέση τιμή και η διασπορά της $X(t)-Y(t)$

Πιθανογεννήτριες

Ροπογεννήτρια είναι $M_{X(t)}(\theta) = e^{\lambda t (e^{\theta}-1)} \xrightarrow{\theta \to \ln\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{P(\theta) = e^{\lambda t (\theta - 1)}}$$

$$P_{X-Y} = P_X \cdot P_{-Y} = e^{\lambda t(\theta-1)} e^{\mu t(\theta^{-1}-1)} =$$

$$= e^{-t(\lambda+\mu) + t(\lambda\theta + \mu\theta^{-1})}$$

πιθανογεννήτρια διαφοράς

$$E[X(t)-Y(t)] = \frac{dP_{X-Y}}{d\theta}\bigg|_{\theta=1} = \boxed{t(\lambda-\mu)}$$

Διασπορά $E(Z^2) - E^2(Z)$

$$\left.\frac{d^2 P}{d\theta^2}\right|_{\theta=1} = E\left[Z(Z-1)\right] = E\left[Z^2 - Z\right] =$$

$$= E\left[Z^2\right] - E\left[Z\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E\left[Z^2\right] = P''(1) + E(Z) = P''(1) + P'(1)}$$

$$E\left[\{X(t) - Y(t)\}^2\right] = P''_{X-Y}(1) + P'_{X-Y}(1) =$$

$$= (\lambda - \mu)^2 t^2 + 2\mu t + t(\lambda - \mu)$$

$$V\left[X(t) - Y(t)\right] = \qquad - t^2(\lambda - \mu)^2 =$$

$$= t(\lambda + \mu)$$

Άσκηση: ΕΠΙΘΕΣΗ $\sim \mathcal{P}(\lambda t)$ $\lambda = 3$/ώρα

ΦΥΛΑΚΑΣ, ο Φ μπορεί να βγει εκτός λειτουργίας για 10 λεπτά

α) Αν μία επίθεση αρκεί για να έχω καταστροφή βρείτε την πιθανότητα καταστροφής.

β) Το ίδιο για δύο επιθέσεις.

α) Καταστροφή $\Longleftrightarrow$ Μία τουλάχιστον επίθεση στα 10 min, που ο Φ είναι εκτός.

$$\Leftrightarrow P[N(1/6) \geq 1] = 1 - P[N(1/6) < 1] =$$

$$= 1 - P[N(1/6) = 0] = 1 - e^{-3 \cdot 1/6} \frac{(3 \cdot 1/6)^0}{0!} = 0.4$$

β) $P[N(1/6) \geq 2] = 1 - P[N(1/6) < 2] =$

$$= 1 - P[N(1/6) = 0] - P[N(1/6) = 1] = \ldots$$

$$\ldots = 0.09$$

Αιτήματα φθάνουν σε μία ασφ. εταιρία $\sim \mathcal{P}(\lambda t)$ με $\lambda = 2$ / ώρα. Το κάθε αίτημα είναι:

1	με	$p = 1/2$
2		$p = 1/8$
3		$p = 2/8$
4		$p = 1/8$

Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός αποζημιώσεων από ώρα 8 έως 12 και η διασπορά.

$N(t)$ πλήθος αφίξεων. Y_i η απαίτηση κάθε άφιξης. Η συνολική αποζημίωση είναι

$$X_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

τυχαίο άθροισμα, τυχαίο πλήθος προσθετέων

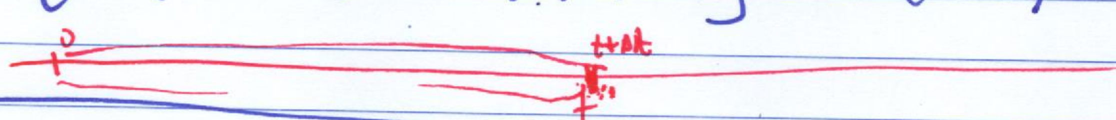
$$E(X_t) = E(Y_i) \cdot E(N(t))$$

$$V(X_t) = E[N(t)] \cdot V(Y_i) + E^2(Y_i)\, V(N(t))$$

Ορισμός Διαδικασίας Poisson

Μια στοχαστική ανέλιξη $N(t)$, λέγεται διαδικασία Poisson με παράμετρο λ, εάν

1. $N(t)$ ακέραιος
2. $N(t) \geq 0$
3. $N(0) = 0$
4. Αν $t \geq s$ τότε $N(t) \geq N(s)$
5. $N(t)$ independent increments
6. $N(t)$ stationary increments
7. $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
8. $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$



$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0}$$

$o(\Delta t)$ "πρακτικά" μηδέν

Βήμα 0 : Ιδιότητα:

$$P[N(t+\Delta t)-N(t)=0] = 1-\lambda\Delta t + O(\Delta t)$$

$\Delta t \to 0$

$$P[N(t+\Delta t)-N(t)=0] = 1-\sum_{k=1}^{\infty} P[N(t+\Delta t)-N(t)=k]$$

$$= 1-P[N(t+\Delta t)-N(t)=1] - P[N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2]$$

$$= 1-\lambda\Delta t - O(\Delta t) - O(\Delta t) = 1-\lambda\Delta t + O(\Delta t)$$

$$P[N(t)=n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Έστω $n=0$, θέλουμε

$$P[N(t)=0] = P_0(t)$$

αλλάζουμε το t και $t+\Delta t$

$\Delta t \to 0$

$$P_0(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t)=0] =$$

$$= P[N(t)=0 \text{ και } N(t+\Delta t)-N(t)=0] \overset{\text{ii}}{=}$$

$$= P[N(t)=0]\, P[N(t+\Delta t)-N(t)=0] =$$

$$= P_0(t)\left[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)\right] \Longleftrightarrow$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - \lambda P_0(t)\Delta t + P_0(t)\, o(\Delta t)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + P_0(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + P_0(t)\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}_{\to 0}$$

$$\boxed{P_0'(t) = -\lambda P_0(t)}$$

$$\left.\begin{aligned} &P_0(t) = c_1 e^{-\lambda t} \\ &P_0(0) = P[N(0)=0] = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{P_0(t) = e^{-\lambda t}}$$

$n=1$

$$P[N(t)=1] = P_1(t)$$

$$t \longrightarrow t+\Delta t$$

$$P_1(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t)=1] =$$

$$= P[N(t)=0] \cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=1] +$$

$$+ P[N(t)=1] \cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=0]$$

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot\left(\lambda\Delta t + o(\Delta t)\right) + P_1(t)\left[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)\right]$$

$$P_1(t+\Delta t) = \lambda P_0(t)\Delta t + P_0(t)\, O(\Delta t) +$$

$$+ \underline{\underline{P_1(t)}} - \underline{\lambda P_1(t)\Delta t} + P_1(t)\, O(\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \underbrace{\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}}_{P_1'(t)} = \lambda P_0(t) + P_0(t)\cancel{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}} \to 0$$

$$-\lambda P_1(t) + P_1(t)\cancel{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}} \to 0$$

$$P_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t)$$

$$P_1'(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

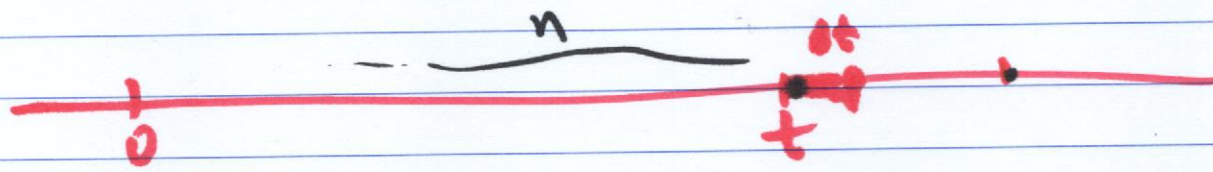
$$\Rightarrow \quad \boxed{P_1(t) = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t}$$

ο τύπος για $n=1$ $\quad e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^1}{1!}$

Επόμενο γιά $n=$ οποιοδήποτε.

3ο Μάθημα

$$P[N(t)=n] = p_n(t)$$



$$p_n(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t)=n] =$$

$$\overset{Θ.Ο.Π}{=} P[N(t)=n] \cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=0] +$$

$$+ P[N(t)=n-1] \cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=1] +$$

$$+ P[N(t)=n-2] \cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=2] +$$

$$\vdots$$

$$+ P[N(t)=1] \cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=n-1] +$$

$$+ P[N(t)=0] \cdot P[N(t+\Delta t)-N(t)=n] =$$

$$= \cancel{p_n(t)} \quad \ldots$$

$$= P_n(t)\left[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\right] +$$

$$+ P_{n-1}(t)\left[\lambda\Delta t + o(\Delta t)\right] +$$

$$+ P_{n-2}(t)\, o(\Delta t) +$$

$$+ P_{n-3}(t)\, o(\Delta t) +$$

$$\vdots$$

$$+ P_1(t)\, o(\Delta t) +$$

$$+ P_0(t)\, o(\Delta t) \quad \Longrightarrow$$

$$P_n(t+\Delta t) = \underline{P_n(t)} - \underline{\lambda P_n(t)\Delta t} +$$
$$+ \underline{P_{n-1}(t)\lambda\Delta t} +$$

$$+ o(\Delta t)\left[P_n(t) + P_{n-1}(t) + P_{n-2}(t) + \cdots + P_1(t) + P_0(t)\right]$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \cancel{\frac{O(\Delta t)}{\Delta t}}\left(\cdots \right)$$

$$\Delta t \longrightarrow 0 \implies$$

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + 0 \implies$$

$$\implies \boxed{P_n'(t) + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t)}$$

Δ.Ε. του Khinchin

άγνωστος $P_n(t)$

Ομογενής: $P_n'(t) + \lambda P_n(t) = 0 \implies$

$$\cancel{P_n(t) =} \; P_n^{\text{ομογενής}}(t) = C_1 e^{-\lambda t}$$

Μερική λύση: $P_n^{\text{μερική}}(t) = \varphi(t) \cdot e^{-\lambda t}$ όπου

$\varphi(t)$ προς προσδιορισμό.

$$\left(\varphi e^{-\lambda t}\right)' + \lambda \varphi e^{-\lambda t} = \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\varphi' e^{-\lambda t} + \cancel{\varphi(-\lambda) e^{-\lambda t}} + \cancel{\lambda \varphi e^{-\lambda t}} = \lambda P_{n-1}(t)$$

$$\varphi' = e^{\lambda t} \lambda P_{n-1}(t) \Rightarrow \varphi = \int e^{\lambda t} \lambda P_{n-1}(t)\, dt$$

$$P_n^{\text{μερική}}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t)\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P_n(t) = c e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t)\, dt}$$

πρέπει νὰ προσδιορισθεί η σταθερά.

$$P_n(0) = 0 \Leftrightarrow P[N(0) = n] = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow P_n(0) = c e^{-\lambda \cdot 0} + \lambda e^{-\lambda \cdot 0} \int e^{\lambda 0} \cancel{P_{n-1}(0)}^{\,0}\, dt$$

$$\Rightarrow 0 = c \cdot 1 + 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\boxed{P_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t)\, dt}$$

$$n = 3, \quad P_3(t) = \dots\dots\dots = \frac{(\lambda t)^3}{6} e^{-\lambda t}$$

$$P_n(t) = P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{}$$

Ενδιάμεσοι Χρόνοι

Z_n = χρονική διάρκεια μεταξύ n-1 γεγονότος και n γεγονότος

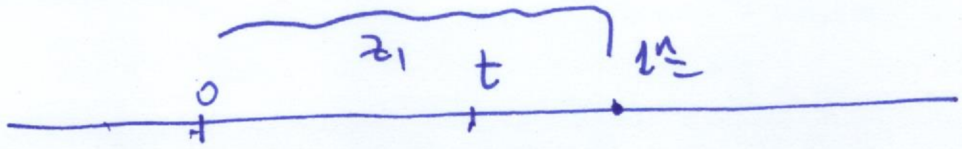
Θεώρημα Αν $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ τότε τα Z_n είναι τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν την εκθετική κατανομή,

$$Z_n \sim \mathcal{E}(\lambda) \quad , n = 1, 2, \ldots$$

Άσκηση Βρείτε τη κατανομή ακολουθεί η Z_1.

Z_1 = ο χρόνος μέχρι το πρώτο γεγονός

$P[Z_1 \leq t]$ αθροιστική κατανομή



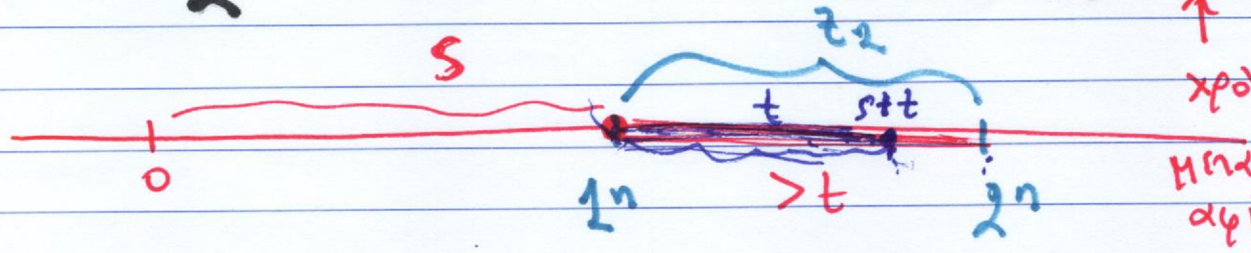
$$P[z_1 \le t] = 1 - P[z_1 > t] =$$
$$= 1 - P[N(t)=0] =$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} =$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

εκθετική κατανομή

Άσκηση Βρείτε την κατανομή του z_2

$$P[z_2 \le t] = 1 - P[z_2 > t]$$

↑ χρόνος μεταξύ αφίξεων όχι από αρχή



Αν η 1η άφιξη έγινε την στιγμή s

$P[z_2>t]$ = η 2η άφιξη να γίνει σε στιγμή μεγαλύτερη από s+t

$P[Z_2 > t] = P[$ καμμία άφιξη από $(s, s+t] \mid$ η πρώτη άφιξη έγινε την στιγμή $s] =$

$= P[$ καμμία άφιξη από $(s, s+t) \mid Z_1 = s] =$

$\overset{\text{independent}}{\underset{\text{increment}}{=}} P[N(t+s) - N(s) = 0] =$

$= P[N(t+s-s) = 0] =$

$= P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}$

$P[Z_2 \leq t] = 1 - P[Z_2 > t] = 1 - e^{-\lambda t}$

εκθετική

Άσκηση: Αιτήματα σε Bank ~

$\sim \mathcal{P}(\lambda t)$ με $\lambda = \frac{1}{10}$ ανά λεπτό

Το σύστημα εξυπηρετεί όταν περιμένουν 3 τουλάχιστον αιτήματα.

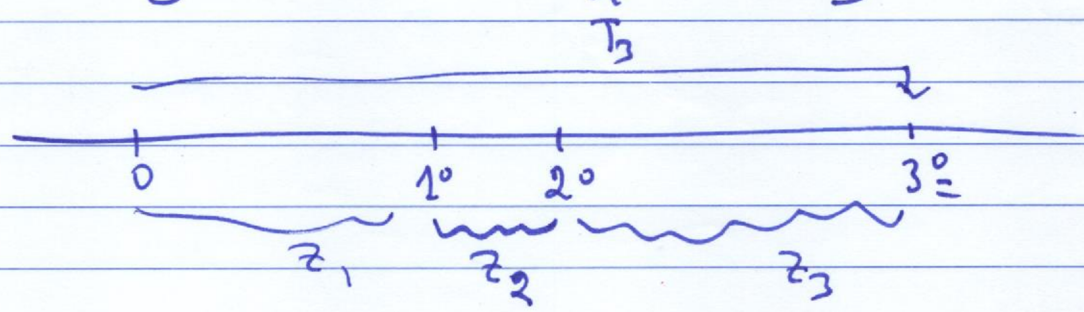
(α) Βρείτε μέσο χρόνο αναμονής

(β) ποιά είναι η πιθανότητα να μη γίνει εξυπηρέτηση την πρώτη ώρα.

Μέσος χρόνος αναμονής = Μέσο χρόνο αναμονής άφιξης τρίτου αιτήματος. $= E[T_3]$

όπου T_3 ο χρόνος άφιξης $3^{ου}$ αιτήματος

$$T_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3$$



$$E[T_3] = E[Z_1] + E[Z_2] + E[Z_3]$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{\lambda} = \frac{3}{\frac{1}{10}} = 30 \text{ minutes}$$

P[όχι εξυπηρέτηση 1^{η} ώρα] =

= P[0 αφίξεις 1^{η} ώρα] + P[1 άφιξη 1^{η} ώρα] +

+ P[2 αφίξεις 1^{η} ώρα] = $P[N(60)=0]$ +

+ $P[N(60)=1] + P[N(60)=2]$ =

$$= e^{-\frac{1}{10}\cdot 60} + e^{-1/10\cdot 60}\,\frac{1}{10}\cdot 60 + e^{-1/10\cdot 60}\,\frac{\left(\frac{1}{10}\cdot 60\right)^2}{2} =$$

$$= \underline{\underline{0.062}}$$

Άσκηση: $X(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_x t)$

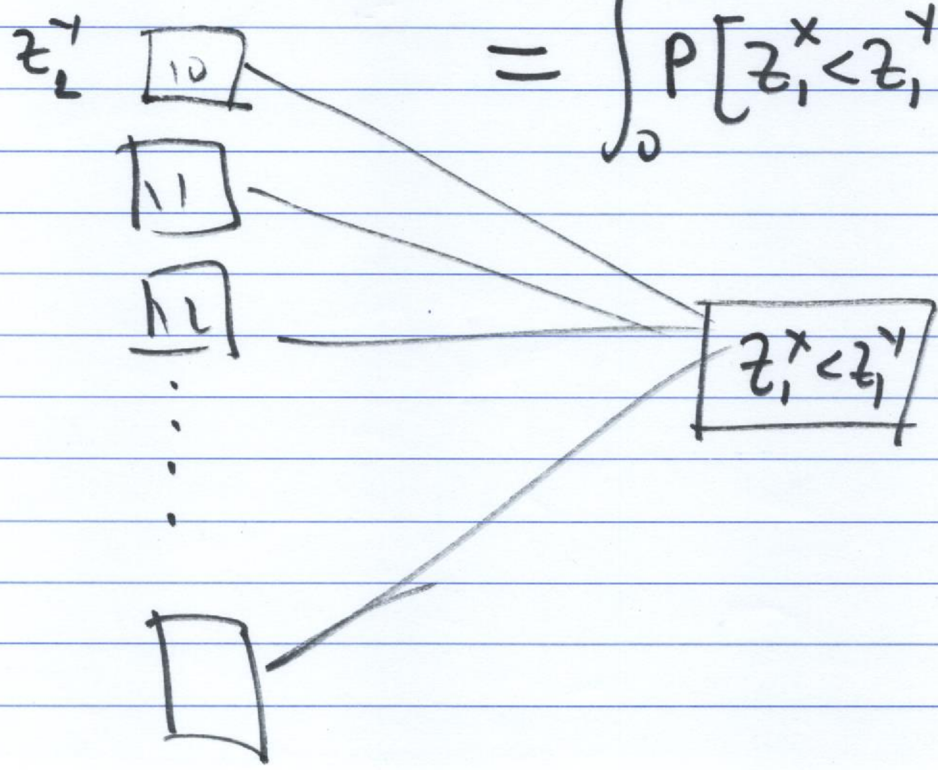
$Y(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_y t)$

Βρείτε την πιθανότητα το 1ο γεγονός της $X(t)$ να συμβεί πριν από το πρώτο γεγονός της $Y(t)$.

Z_1^X ο χρόνος μέχρι το 1ο της $X(t)$

Z_1^Y » » » της $Y(t)$

$$P[Z_1^X < Z_1^Y] \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} \int_0^{+\infty} P[Z_1^X < Z_1^Y \mid Z_1^Y = y]\, P[Z_1^Y = y]\, dy$$



$$\int_0^{+\infty} P\left[Z_1^X \leq Z_1^Y \middle| Z_1^Y = y\right] P\left[Z_1^Y = y\right] dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} P\left[Z_1^X \leq y\right] \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda_X y}\right) \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy =$$

$$= \boxed{\frac{\lambda_Y}{\lambda_X + \lambda_Y}}$$

Χρόνος άφιξης T_n η

χρονική διάρκεια από το 0 μέχρι την n-άφιξη.

$$\boxed{T_n = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n}$$

Αν $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, τότε:

$$T_n \sim Gamma(n, \lambda)$$

$$E[T_n] = \frac{n}{\lambda}, \quad V[T_n] = \frac{n}{\lambda^2}$$

- $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, και 1 μόνο γεγονός συμβαίνει στο $(0, t)$, τότε η T_1 ακολουθεί την ομοιόμορφη στο $(0, t)$.

Χρόνος αναμονής $W(t)$

$N(t) \sim P(\lambda t)$, την χρονική στιγμή t δεν συμβαίνει γεγονός. $W(t)$ είναι η διάρκεια μέχρι να συμβεί γεγονός.

$$W(t) \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

Άσκηση: $N(t) \sim P(\lambda t)$ με $\lambda = 0.5$
Βρείτε την πιθανότητα το 10 γεγονός να συμβεί μετά την $20^{η}$ στιγμή

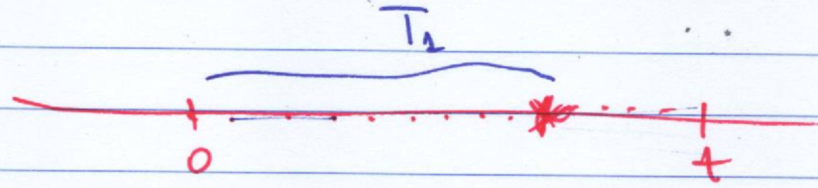
Πότε συμβαίνει $10^{ο}$ γεγονός, η T_{10}

$$P(T_{10} > 20) = \int_{20}^{+\infty} \lambda^{10} \frac{t^9}{9!} e^{-\lambda t} dt = \ldots$$

$$P(T_{10} > 20) = P[N(20) < 10] =$$

$$= \sum_{i=0}^{9} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \overset{t=20,\ \lambda=0.5}{=} \ldots$$

Άσκηση: Δείξατε, ότι αν $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ και 1 μόνο γεγονός συμβαίνει στο $(0,t]$, η τυχ. T_1 ακολουθεί την ομοιόμορφη στο $(0,t]$.



$F(x) = P(X \leq x)$

$$P[T_1 \leq \tau] = P[T_1 \leq \tau \mid N(t)=1] =$$

$$= \frac{P[T_1 \leq \tau \text{ και } N(t)=1]}{P[N(t)=1]} = \frac{P[N(\tau)=1] \cdot P[N(t)-N(\tau)=0]}{P[N(t)=1]} = \frac{P[N(\tau)=1] \cdot P[N(t-\tau)=0]}{P[N(t)=1]}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\tau}\,\lambda\tau \cdot e^{-\lambda(t-\tau)}}{e^{-\lambda t} \cdot \lambda t} = \frac{\tau}{t}$$

$U(\alpha, b) \Rightarrow F(X \leq x) = \dfrac{x}{b-\alpha}$ ομοιόμορφη

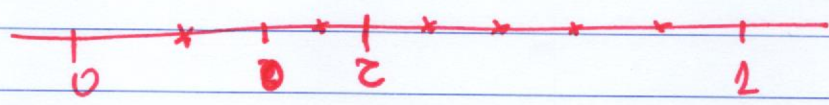
Άσκηση: $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ και $N(1)=n$

Βρείτε $E[T_1]$.

Κατανομή της T_1 και μετά θα υπολογίσουμε $E[T_1]$

» » $T_1 \mid N(1)=n$ »

$$P[T_1 \le \tau \mid N(1)=n] = P[N(\tau) \ge 1 \mid N(1)=n] =$$



$$= \sum_{k=1}^{n} P[N(\tau)=k \mid N(1)=n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{P[N(\tau)=k \text{ και } N(1)=n]}{P[N(1)=n]}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{P[N(\tau)=k]\cdot P[N(1-\tau)=n-k]}{P[N(1)=n]} =$$

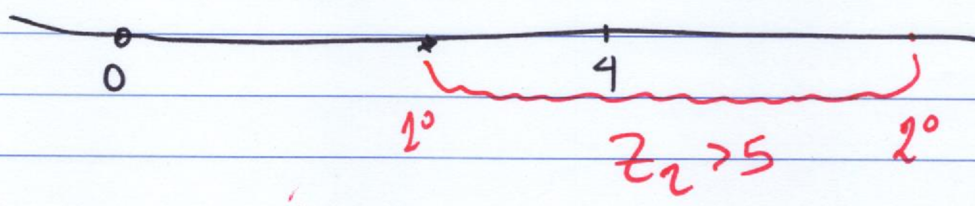
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\, e^{-\lambda(1-\tau)}\frac{(\lambda(1-\tau))^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda\cdot 1}\frac{(\lambda\cdot 1)^n}{n!}} = 1-(1-\tau)^n$$

$$\Rightarrow \quad \sigma.\pi.\pi = \left[1-(1-\tau)^n\right]' = -n(1-\tau)^{n-1}(-1)$$

$$E[T_1] = \int_0^1 z \cdot \left[+n(1-z)^{n-1}\right] dz = \frac{1}{n+1}$$

ΜΑΘΗΜΑ 4ον

Άσκηση: Βρείτε $P[Z_2>5]$ όταν $N(4)=1$



$$P[Z_2>5 \mid N(4)=1] = P[Z_2>5 \mid Z_1 \leq 4] \overset{Z_1,\, Z_2 \text{ ανεξάρτητες}}{=}$$

$$= P[Z_2>5] = \int_5^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda 5} \quad \left.\right\} e^{-15}$$

αν $N(t) \sim P(3 \cdot t)$

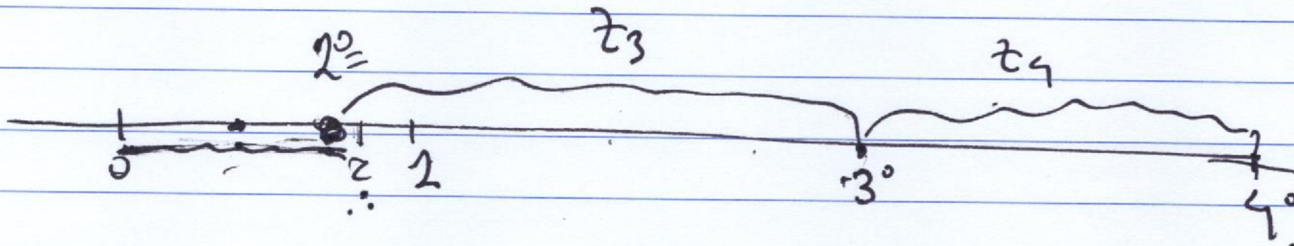
Άσκηση: Αν $N(t) \sim P(\lambda t)$

Βρείτε $E[T_4 \mid N(1)=2]$

$$\left.\begin{array}{l} T_4 = T_2 + z_3 + z_4 \\ \\ E\left[T_4 \mid N(1)=2\right] \end{array}\right\} \Longrightarrow =$$

$$= E\left[T_2 \mid N(1)=2\right] + E\left[z_3 \mid N(1)=2\right] + E\left[z_4 \mid N(1)=2\right]$$

$$= E\left[T_2 \mid N(1)=2\right] + E\left[z_3\right] + E\left[z_4\right] =$$



$$= E\left[T_2 \mid N(1)=2\right] + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Πρέπει νά βρούμε την κατανομή της

$T_2 \mid N(1)=2$ δηλαδή $P\left[T_2 \leq \tau \mid N(1)=2\right]$

$$P\left[T_2 \leq \tau \mid N(1)=2\right] = P\left[N(\tau)=2 \mid N(1)=2\right] =$$

όπου $0 \leq \tau \leq 1$

$$= \frac{P\left[N(\tau)=2 \text{ και } N(1-\tau)=0\right]}{P\left[N(1)=2\right]} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^2}{2!}\; e^{-\lambda(1-\tau)}}{e^{-\lambda\cdot 1}\frac{\lambda^2}{2!}} = \tau^2$$

αθροιστική κατανομή

$\Rightarrow$ η σ.π.π της $T_2 \mid N(1)=2$ είναι

$$\sigma.\pi.\pi = (\tau^2)' = 2\tau \quad \Rightarrow$$

$$E\left[T_2 \mid N(1)=2\right] = \int_0^1 \tau\cdot 2\tau \, d\tau = 2\,\frac{\tau^3}{3}\Big]_0^1 = 2/3$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E\left[T_4 \mid N(1)=2\right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}$$

Άσκηση: $X(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ επιβάτες λεωφορείου. T τ.μ. τον χρόνο άφιξης των λεωφορείων, με ομοιόμορφη κατανομή: $T \sim f_T(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \end{cases}$

Βρείτε $E[X(T)]$ και $V[X(T)]$.

Λύση: $E[X(T)] = E\big[\underbrace{E[X(T) \mid T]}_{\text{από "πύργο"}}\big]$

για να βρούμε $E[X(T) \mid T]$, θέτουμε $T = t$ σταθερό $\Rightarrow E[X(T) \mid T = t] = E[X(t)] =$

$= \lambda t \Leftrightarrow E[X(T) \mid T] = \lambda T$

$$E[X(T)] = E[\lambda T] = \lambda E[T] =$$

$$= \lambda \int_0^1 t \cdot 1 \, dt = \lambda \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\lambda}{2}}$$

$$V[X(T)] = E\big[\underbrace{V[X(T)\,|\,T]}_{\text{τ.μ.}}\big] + V\big[\underbrace{E[X(T)\,|\,T]}_{\text{τ.μ.}}\big]$$

$$V[E[X(T)\,|\,T]] = V[\lambda T] = \lambda^2 V[T] =$$

$$= \lambda^2 \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{\lambda^2}{12}}$$

Θεωρούμε T σταθερό (αιτιοκρατικό) άρα

$$V[X(T)\,|\,T=t] = V[X(t)] = E[X^2(t)] -$$

$$- E^2[X(t)] = E[X^2(t)] - \lambda^2 t^2$$

$$E[X^2(t)] = M''_{\substack{\text{Poisson}\\ \text{διαδικασίας}}}(0) = \left[e^{\lambda t(e^{\theta}-1)}\right]''_0 =$$

$$= \lambda^2 t^2 + \lambda t \quad \text{άρα}$$

$$V[X(t)] = \lambda^2 t^2 + \lambda t - \lambda^2 t^2 = \lambda t$$

για t τυχαίο έχουμε

$$V[X(T)\,|\,T] = \lambda T$$

$$E\left[V\{X(T)|T\}\right] = E[\lambda T] = \lambda E[T] = \frac{\lambda}{2}$$

$$V[X(T)] = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{12}$$

Άσκηση: Έστω μία ασφαλιστική εταιρεία.

Συμβόλαιο	Πλήθος ~~ασφαλ~~ ασφαλισμένων	κεφάλαιο	λ Poisson ανά ημέρα
1	8000	1	3
2	3500	2	2
3	2500	3	2
4	1500	5	1
5	500	10	1

Οι κίνδυνοι είναι ανεξάρτητοι. Αντασφάλιση με όριο ιδίας κράτησης $d=2$ και κόστος 0.025 για κάθε μονάδα ανά μήνα. Οι αποζημιώσεις ακολουθούν Poisson με λ όπως τον πίνακα.

Βρείτε $P[\text{Αποζημιώσεις}/\text{μήνα} + \text{Αντασφάλιση} > 855]$

Λύση: Κόστος αντασφάλισης.

$$2500(3-2) + 1500(5-2) + 500(10-2) = 11000$$

κεφάλαιο αντασφάλισης $\Rightarrow$ κόστος =

$$= 11000 \cdot 0.025 = 275$$

S το συνολικό κόστος αποζημίωσης/μήνα

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

Ζητάμε μέση τιμή και διασπορά S.

$$E(S) = \sum_{i=1}^{5} E(S_i) \quad , \quad V(S) = \sum_{i=1}^{5} V(S_i)$$

ανεξάρτητων

$$E(S_1) = E[1 \cdot N_1(30)] = 1\, E[N_1(30)] =$$
$$= 1 \cdot 3 \cdot 30 = 90$$

$$E(S_2) = E[2 \cdot N_2(30)] = 2\, E[N_2(30)] =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 30 = 120$$

Sos

λόγω διασπάσεως

$$E(S_3) = E[2 \cdot N_3(30)] = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 120.$$
$$E(S_4) = E[2 \cdot N_4(30)] = 2 \cdot 1 \cdot 30 = 60.$$
$$E(S_5) = E[2 \cdot N_5(30)] = 2 \cdot 1 \cdot 30 = 60.$$

$$450$$

$$V(S_1) = E(S_1^2) - E^2(S_1) =$$

$$= E\left(N_1^2(30)\cdot 1^2\right) - E^2\left[N_1(30)\cdot 1\right]$$

$$= 1^2\cdot\left\{E\left[N_1^2(30)\right] - E^2\left[N_1(30)\right]\right\} =$$

$$= 1\, V\left[N_1(30)\right] = 1\cdot 3\cdot 30 =$$

$$= 90$$

$$V(S_2) = E\left[N_2^2(30)\cdot 2^2\right] - E^2\left[N_2(30)\cdot 2\right] = 4V\left[N_2(30)\right]$$

$$= 4\cdot 30\cdot 2 = 240$$

$$V(S_3) = \ldots$$

$$V(S) = 870$$

$$P(S + \text{Αντασφάλιση} > 855) =$$

$$P(S + 275 > 855) = P(S > 580) \overset{ΚΟΘ}{=}$$

$$P\left(\frac{S-450}{\sqrt{870}} > \frac{580-450}{\sqrt{870}}\right) = \ldots$$

Άσκηση: Αν στην προηγούμενη άσκηση, **δεν** υπάρχει αντασφάλιση, βρείτε το συνολικό ασφάλιστρο G έτσι ώστε $P(S>G)=0.05$

Λύση: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

$E(S_1) = \ldots \overset{\text{ίδιο}}{\ldots} = 90$

$E(S_2) = \ldots\ldots = 120$

$E(S_3) = E[3\cdot N_3(30)] = \cancel{E[3\cdot 2\cdot 30]}\ 3\cdot E[N_3(30)] = 3\cdot2\cdot30 = 180$

$E(S_4) = 150, \quad E(S_5) = 300$

$\Rightarrow E(S) = 840$

$V(S) = \ldots\ldots = 4620$

$P(S>G) = 0.05 \overset{\text{ΚΟΘ}}{\Longrightarrow} P\left(Z > \frac{G-840}{\sqrt{4620}}\right) = 0.05 \Rightarrow \frac{G-840}{\sqrt{4620}} = x^* \Rightarrow$

$\Rightarrow G = \ldots$

Συγχώνευση - Διάσπαση - Poisson

$$N_1(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_1 t)$$

$$N_2(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_2 t)$$

$$\boxed{N(t) = N_1(t) + N_2(t)}$$

συγχώνευση

$$\boxed{N(t) \sim \mathcal{P}\left[(\lambda_1+\lambda_2)\, t\right]}$$

Διάσπαση αφίξεις $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$

για κάθε άφιξη γίνεται τυχαίο πείραμα

με πιθανότητα $p \rightarrow N_1(t)$

$1-p \rightarrow N_2(t)$

$$N_1(t) \sim \mathcal{P}(\lambda p \cdot t)$$

$$N_2(t) \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p) \cdot t)$$

$N_1(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_1 t)$, $N_2(t) \sim \mathcal{P}(\lambda_2 t)$

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Βρείτε $P[N(1)=2 \mid N(2)=5] =$

$$= \frac{P[N(1)=2 \text{ και } N(2-1)=3]}{P[N(2)=5]} =$$

$$= \frac{P[N(1)=2 \text{ και } N(1)=3]}{P[N(2)=5]} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \, e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}}{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^5}{5!}} =$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$P[N_1(1)=1 \mid N(1)=2] = \frac{P[N_1(1)=1 \text{ και } N(1)=2]}{P[N(1)=2]}$$

$$= \frac{P[N_1(1)=1 \text{ και } N_2(1)=1]}{P[N(1)=2]} = \ldots$$

$$= \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

πλήθος πελατών $\sim \mathcal{P}(\mu t)$

παραγγέλνουν με πιθανότητα p.

Βρείτε την από κοινού διδιάστατη κατανομή αυτών που παραγγέλνουν καί δεν παραγγέλνουν.

$X(t)$ πού παραγγέλνουν

$Y(t)$ πού δέν παραγγέλνουν

$P[X(t)=i, Y(t)=j]$ <u>θ.ο.π</u>

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[X(t)=i, Y(t)=j \mid N(t)=n] \, P[N(t)=n]$$

πρέπει $n=i+j$

$$= P[X(t)=i, Y(t)=j \mid N(t)=i+j] \cdot$$

$$\cdot P[N(t)=i+j] =$$

$$= P\left[X(t)=i \,\middle|\, N(t)=i+j \right] \cdot$$

$$\cdot P\left[N(t)=i+j \right] =$$

διωνυμική

$$= \binom{i+j}{i} p^{i}(1-p)^{j} \cdot e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+j}}{(i+j)!} =$$

$$= e^{-\mu t p} \frac{(\mu t p)^{i}}{i!} \cdot e^{-\mu t q} \frac{(\mu t q)^{j}}{j!}$$

$$q = 1-p$$

$$= P\left[X(t)=i \right] \cdot P\left[Y(t)=j \right]$$

ανεξάρτητες

Πέμπτη

Μ. Πάτμη.

ΜΑΡΚΟΥ