(1) Θεωρία Παιγνίων 9-3-18

Η συνάρτηση χρησιμότητας Von Neumann – Morgestern
(ή συνάρτηση Προσδοκώμενης Χρησιμότητας)

Θεωρία παιγνίων είναι η μελέτη προβλημάτων αποφάσεων πολλών ατόμων. Σε αυτό το πλαίσιο τα άτομα (παίκτες) αντλούν χρησιμότητα από κάθε στρατηγική την οποία επιλέγουν. Επάνω στη χρησιμότητα κάθε στρατηγικής μπορούμε να πάρουμε πιθανότητες, οι οποίες αντιστοιχούν στις στρατηγικές του παίκτη, και με αυτόν τον τρόπο να υπολογίσουμε την προσδοκώμενη χρησιμότητά του. Στο πλαίσιο της Θ.Π. αυτή η χρησιμότητα ονομάζεται απλά απόδοση. Θα εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης προσδοκώμενης χρησιμότητας ή συνάρτησης χρησιμότητας (VNM).

(συνάρτηση χρησιμότητας Bernoulli)

Γνωρίζουμε από τη Στατιστική ότι για μία τυχαία μεταβλητή X η οποία είναι διακριτή, η μαθηματική της ελπίδα (ή μέση τιμή ή προσδοκώμενη τιμή ή αναμενόμενη τιμή) ορίζεται ως: $E(X) := \sum_x x \cdot p(x)$, όπου $p(x)$ είναι η

συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X (ή της κατανομής της). Τονίζουμε ότι "διακριτή" τ.μ. σημαίνει ότι το πεδίο τιμών της είναι το πολύ απειροαριθμήσιμο (ή αριθμήσιμως άπειρο), δηλαδή μπορούμε να αριθμήσουμε τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο σε μια ακολουθία $(x_1, x_2, \ldots)$

[Αν $g(x)$ είναι ένας μετασχηματισμός (συνάρτηση, απεικόνιση, αντιστοιχία) επάνω (επί) στη X, τότε ορίζουμε τη μαθηματική ελπίδα ως εξής: $E(g(X)) = \sum_x g(x)\, p(x)$]

Αν η τ.μ. X είναι συνεχής, τότε το πεδίο τιμών της είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και συγκεκριμένα αποτελείται από όλα τα σημεία επάνω σε κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$. Τότε $E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$,

όπου $f(x)$ = συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X (ή της κατανομής της).

[περιγραφή] της τ.σ.μ. $g(X)$ έως ετήσ: $E((g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$

Αν η $g(x)$ είναι μια συνάρτηση χρησιμότητας ενός παίκτη επάνω σε διάφορα ενδεχόμενα, τα οποία είναι συνδεδεμένα με κίνδυνο (π.χ. παιχνίδια τύχης) και τα οποία ανήκουν στο σύνολο $\{x_1, x_2, \dots\}$, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση χρησιμότητας

VNM από τον τύπο: $E(u(x)) := \sum_x u(x) p(x)$,
όπου συμβολίζαμε με $u(x)$ τη συνάρτηση χρησιμότητας (αντί για $g(x)$)

Η συνάρτηση $p(x)$ είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας για τα διαφορετικά ενδεχόμενα.

Αν ο χώρος των ενδεχομένων είναι συνεχής (διάστημα του $\mathbb{R}$), τότε:
Συνάρτηση χρησιμότητας VNM $:= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x) dx$,

όπου f = σ.π.π. των ενδεχομένων.
Π.χ. Αν χώρος ενδεχομένων $= [\underline{x}, \bar{x}]$, τότε

Συνάρτηση χρ. VNM $= E(u(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x) dx = \int_{\underline{x}}^{\bar{x}} u(x) f(x) dx$

Πιο συγκεκριμένα έστω ότι τα διάφορα ενδεχόμενα σε ένα παίγνιο κατανέμονται ομοιόμορφα επάνω στο κλειστό διάστημα $[0, 2a]$ $(a > 0)$

(1)

Π.χ. Αν η χρησιμότητα του παίκτη είναι η $u(x) = 18\sqrt{x}$ (ο παίκτης αποστρέφεται τον κίνδυνο) τότε βρίσκαμε $E(u(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) F(x)\,dx = \int_0^{2a} \frac{1}{2a} 18\sqrt{x}\,dx =$

$$= \frac{9}{a}\int_0^{2a} \sqrt{x}\,dx = \frac{18}{3a}\sqrt{x^3}\Big|_0^{2a} = \frac{6}{a}(\sqrt{8a^3} - 0) =$$

$$= \frac{6\sqrt{8}}{a} a^{3/2} = 6\sqrt{8a}$$

$$\boxed{\int x^v dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + c \quad (v \neq -1)}$$ εδώ $v = 1/2$

Σημαντική σημείωση: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας ομοιόμορφης τ.μ. επάνω στο $[a, b]$ έχει τύπο:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{αν } x \in [a, b] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Οπότε, με $x \in [0, 2a]$ παίρνουμε τη συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{αν } x \in [0, 2a] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Βέβαιο ενδεχόμενο: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$p(x_1) = 1, \quad p(x_2) = \ldots = p(x_n) = 0$

$$E(u(x)) = \sum_{k=1}^{n} u(x_k) p(x_k) = u(x_1)\cdot p(x_1) + \ldots + u(x_n)\cdot p(x_n) =$$
$$= u(x_1)\cdot p(x_1) = u(x_1)\cdot 1$$
(τετριμμένα)

- Steven Tadelis: Game Theory: An Introduction
- Gibbons: Game Theory for Applied Economists
3. Fudenberg: Game Theory

Στατικά Παίγνια Πλήρους Πληροφόρησης

Ένα παίγνιο λέγεται στατικό όταν όλοι οι παίκτες αποφασίζουν ταυτόχρονα όσον αφορά τη στρατηγική την οποία θα επιλέξουν.

1 στατικό παίγνιο λέγεται στ. Π. πλήρους πληροφόρησης όταν η απόδοση vNM από κάθε συνδυασμό στρατηγικών είναι γνωστή σε όλους τους παίκτες.

Ο συνηθισμένος τρόπος απεικόνισης αυτών των παιγνίων είναι η λεγόμενη κανονική μορφή (στρατηγική μορφή).

Η κανονική μορφή ενός παιγνίου περιλαμβάνει πάντοτε τα ακόλουθα τρία:

(1) τους παίκτες

(2) το χώρο στρατηγικής κάθε παίκτη, δηλ. το σύνολο όλων των δυνατών στρατηγικών.

(3) τις αποδόσεις vNM

Στην περίπτωση της κανονικής μορφής του παιγνίου δείχνουμε τα (1), (2), (3) χρησιμοποιώντας έναν πίνακα ο οποίος ονομάζεται πίνακας του παιγνίου (bi-matrix)

Π.χ. : Το δίλημμα του φυλακισμένου έχει τον ακόλουθο πίνακα (κανονική μορφή)

		2	
		ΜΟ	Ο
1	ΜΟ	-1, -1	-9, 0
	Ο	0, -9	-6, -6

(1): Παίκτες: Οι (1) κι (2)

(2) Χώροι στρατηγικής: Το διασύνολο $S_1 = S_2 = \{MO, O\}$

(3). Αποδόσεις vNM : $u_1(MO, MO) = u_2(MO, MO) = -1$

$u_1(O,O) = u_2(O,O) = -6$

$u_1(MO,O) = u_2(O,MO) = -9$

(1)

$u_1(0, MO) = u_2(MO, 0) = 0$

Το συγκεκριμένο παίγνιο έχει ως εξής:
Η αστυνομία έχει συλλάβει 2 υπόπτους για τη διάπραξη ληστείας. Λόγω έλλειψης επαρκών ενοχοποιητικών στοιχείων τους ανακρίνει σε ξεχωριστά κελιά και τους πληροφορεί για τις συνέπειες κάθε στρατηγικής που θα επιλέξουν, οι οποίες εκφράζονται σε μήνες φυλάκισης.
Κάθε ~~επ~~ παίκτης μπορεί να επιλέξει ΜΟ ή Ο.
Οι 1 και 2 ανακρίνονται σε ξεχωριστά κελιά. (Δεν υπάρχει συνεργασία).
Συμμετρικό παίγνιο: που σημαίνει ότι όλες οι αποδόσεις επί της πρωτεύουσας του διαγωνίου του πίνακα της κανονικής μορφής είναι ίσες κ' επιπλέον εκτός της πρωτεύουσας διαγωνίου έχουν εναλλαγή σειρά.

Οι αποδόσεις των παικτών μπορούν να δειχθούν κ' με πίνακες (από Γρ. Άλγεβρα).
Για τον παίκτη 1 έχουμε τον 2Χ2 πίνακα (4 αποδόσεις)

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

(πίνακας ~~α~~ποδόσεων)

κι αντίστοιχα για τον 2.

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Με αυτή τη γραφή των αποδόσεων η συμμετρία του παιγνίου αντανακλάται στο γεγονός ότι:

$$P_1^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} = P_2$$

Ο ανάστροφος πίνακας των αποδόσεων του 1 είναι ίσος με τον πίνακα των αποδόσεων του παίκτη 2.

Παίγνιο σε κανονική μορφή (πιο αυστηρός ορισμός):
~~Εισάγεται~~ λέγεται ένα σύνολο $G = \{S_1, S_2, \dots S_n; u_1, u_2, \dots u_n\}$

όπου S_i και u_i, $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$,

είναι ο χώρος στρατηγικών και η απόδοση $\in \mathbb{N}$, αντίστοιχα, του i-οστού παίκτη.
Εναλλακτικά, παίγνιο σε κανονική μορφή είναι η τριάδα συνόλων:

$$G = \left\langle \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{u_i\}_{i=1}^{n}, N \right\rangle,$$

όπου $N = \{1, 2, \dots, n\}$ είναι το σύνολο όλων των παικτών στο παίγνιο.

Το Καρτεσιανό γινόμενο: $X_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times \dots \times S_n$

των χώρων στρατηγικής αποτελεί το σύνολο όλων των δυνατών συνδυασμών στρατηγικών.

Π.χ. Στο Δ. του Φ. το σύνολο όλων των συνδυασμών στρατηγικών είναι το καρτεσιανό γινόμενο

$$S_1 \times S_2 = \{M0, 0\} \times \{M0, 0\} =$$
$$= \{(M0, M0), (M0, 0), (0, M0), (0, 0)\}$$

Τονίζουμε εν γένει ότι το μέγεθος πληθικότητα(?) (size) του χώρου όλων των συνδυασμών στρατηγικών είναι:

$|X_{i=1}^{n} S_i| = \prod_{i=1}^{n} |S_i|$, υπό την προϋπόθεση ότι

S_i = πεπερασμένα.

Η πληθικότητα ενός συνόλου είναι ο αριθμός των στοιχείων του.
Π.χ. 1: $\{1, 2, 3\} \Rightarrow |\{1, 2, 3\}| = 3$
Π.χ. 2: $\{-1, 8\} \Rightarrow |\{-1, 8\}| = 2$

(1)

Αν τα σύνολα είναι πεπερασμένα (έχουν n στοιχεία), τότε για δύο σύνολα A κ' B (παράδειγμα) ισχύει:

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Άρα, $|S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2| =$
$= 2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ συνδυασμοί στρατηγικών στο δίλημμα του φυλακισμένου.

Εν γένει: $|S_1 \times S_2 \ldots \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \ldots \cdot |S_n|$,
S_i, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, πεπερασμένα

$\left(|\times_{i=1}^{n} S_i| = \prod_{i=1}^{n} |S_i| \right)$