(2) Θεωρία Παιγνίων 16-3-18

Ισορροπία Nash

κεφαλαία S (χώροι στρατηγικής)

Ορισμός: Έστω $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$

1 παίγνιο σε κανονική μορφή. Μία στρατηγική (συνδυασμός στρατηγικών, μία $\forall$ παίκτη) $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ στρατηγικές λέγεται ισορροπία Nash αν $\forall$ παίκτης $i \in N$, $1 \leq i \leq n$, η στρατηγική $s_i^* \in S_i$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*)$

δηλαδή η $s_i^* \in S_i$ λύνει το πρόβλημα μη δεσμευμένης μεγιστοποίησης $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*)$

Π.χ. Έστω δίλημμα του Φυλακισμένου (Δ.Φ.) με κανονική μορφή (πίνακας)

		2	
		ΜΟ	Ο
1	ΜΟ	-1, -1	-9, 0
	Ο	0, -9	-6, -6

Έχουμε τα ακόλουθα:

Παίκτης 1: σκέφτεται ότι αν ο (2) παίξει ΜΟ, τότε ο (1) θα παίξει Ο γιατί $0 > -1$ (+)

Αντίστοιχα, ο (1) σκέφτεται ότι αν ο (2) παίξει Ο, τότε κι αυτός θα παίξει Ο, γιατί $-6 > -9$ (+)

Παίκτης 2: σκέφτεται ότι αν ο (1) παίξει ΜΟ, τότε ο (2) θα παίξει Ο γιατί $0 > -1$ (-).

Τέλος αν ο (1) παίξει Ο, τότε ο (2) θα επιλέξει κι αυτός Ο, γιατί $-6 > -9$ (-)

Η στρατηγική $(O, O) \in S_1 \times S_2$ αποτελεί τη μοναδική ισορροπία Nash του διλήμματος ~~του~~ Φυλακισμ., γτ ικανοποιεί τον ορισμό. Δηλ. ικανοποιεί τις ανισότητες: $u_1(O, O) \geq u_1(MO, O)$ ∧

(1) $u_2(O, O) \geq u_2(O, MO)$

Η ισορροπία Nash (0,0) είναι ευσταθής, με την έννοια ότι εκ των υστέρων κανένας ~~παίκτης~~ παίκτης δεν αποκλίνει από αυτήν. Έστω ότι κάποιος ισχυρίζεται ότι η ισορροπία Nash είναι η στρατηγική (~~ΜΟ,Ο~~ Ο, ΜΟ).
Στη συγκεκριμένη στρατ., ο (2) θέλει εκ των υστέρων να αποκλίνει, και να παίξει Ο, γιατί $-6 > -9$
Με τον ίδιο τρόπο, αν υποτεθεί ότι η ισορροπία Nash είναι (ΜΟ,Ο), δεν ισχύει διότι ο (1) θέλει να παίξει Ο, $(-6 > -9)$

Διαδοχική απαλοιφή των αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών
(IESDS
Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies)

Ορισμός:
Έστω $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ένα παίγνιο σε κανονική μορφή (πίνακας) κ' 2 στρατηγικές $s_i', s_i'' \in S_i$.
Η στρατηγική s_i' λέγεται αυστηρά κυριαρχούμενη από τη στρατηγική s_i'' αν ισχύει:
$u_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_i'', \ldots, s_n)$ $\forall$
$s_1 \in S_1, \ldots, s_{i-1} \in S_{i-1}, s_{i+1} \in S_{i+1}, \ldots, s_n \in S_n$

Με λόγια: Η s_i' αποφέρει γνησίως μικρότερη απόδοση από την s_i'' κ' αυτό ισχύει για όλες τις στρατηγικές των άλλων παικτών.

Π.χ.

		2	
		ΜΟ	Ο
1	ΜΟ	-1,-1	-9,0
	Ο	0,-9	-6,-6

Η στρατηγική ΜΟ είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από τη στρατηγική Ο, γιατί για τον παίκτη 1 ισχύει $-1 < 0$ και $-9 < -6$ ενώ το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τον 2 με δεδομένο ότι
$-1 < 0$ και $-9 < -6$

Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του ορισμού μιας Α.Κ.Σ., για τον παίκτη 1 ισχύει:

$\cancel{u_1(0,MO) < u_1(0,0)}$

$\cancel{u_2(MO,0) < u_2(0,0)}$

$\cancel{u_2(0,MO) < u_2(0,0)}$

$u_1(MO,MO) = -1 < u_1(0,MO) = 0,$

$u_1(MO,0) = -9 < u_1(0,0) = -6$

Αντίστοιχα: για το 2:

$u_2(MO,MO) = -1 < u_2(MO,0) = 0,$

$u_2(0,MO) = -9 < u_2(0,0) = -6$

Άρα, το 1ο ζευγάρι ανισοτήτων (παίκτης 1) δείχνει ότι: αυτός (1) παίζοντας MO, παίρνει πάντοτε μικρότερη απόδοση από την O, και το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε στρατηγική, την οποία παίζει ο παίκτης 2.

Αντίστοιχα, το 2ο ζευγάρι ανισοτήτων (παίκτης 2): αν ο παίκτης παίζει MO, τότε θα έχει μικρότερη από την O, και αυτό ισχύει ανεξάρτητα απ' τη στρατηγική που επιλέγει ο (1).

Η IESDS στηρίζεται στην έννοια της Κ.Γ.Ο (Κοινής Γνώσης Ορθολογικότητας (CKR)

Αν οι παίκτες σε 1 παίγνιο, είναι ορθολογικοί (επιλέξουν τη μεγαλύτερη χρησιμότητα), τότε λέμε ότι υπάρχει Κ.Γ.Ο τάξης 0. Αν ο καθένας παίκτης γνωρίζει ότι ο άλλος παίκτης είναι ορθολογικός, τότε υπάρχει Κ.Γ.Ο 1ης τάξης. Οι τάξεις Κ.Γ.Ο επεκτείνονται εν γένει επ' άπειρο.

Το Δ.Φ. λύνεται με IESDS + ΚΓΟ μηδενικής τάξης.

		2: MO	O
1	MO	-1,-1	-9,0
	O	0,-9	-6,-6

Αν ο παίκτης 1 είναι ορθολογικός (ΚΓΟ τάξης μηδέν), τότε αυτός δεν θα παίξει ποτέ ΜΟ.
Άρα μπορούμε να διαγράψουμε αυτή τη στρατηγική.

Αντίστοιχα: για το (2) η ΜΟ είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την Ο. Άρα ένας ορθολογικός 2 (ΚΓΟ μηδενικής τάξης) δεν παίζει ποτέ ΜΟ. Διαγράφουμε την ΜΟ και για το 2.

Συνεπώς, η IESDS + ΚΓΟ μηδενικής τάξης λύνει το Δ.Φ.

π.χ. Δίνεται το ακόλουθο στατικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε κανονική μορφή:

		C1	C2
1	R1	2,4	1,3
	R2	0,2	-1,8

Ζητείται να βρεθεί η ισορροπία Nash χρησιμοποιώντας και τη IESDS (β' μέθοδος)

Χρησιμοποιώντας τη λύση του Nash επιλέγοντας τη μεγαλύτερη χρησιμότητα κάθε παίκτη με δεδομένη τη στρατηγική του άλλου έχουμε το εξής:
Παίκτης 1: Αν ο 2 παίξει C1 τότε ο 1 θα παίξει R1, γτ $2>0$ (+). Αν ο 2 παίξει C2, τότε ο 1 παίζει R1 πάλι, γτ $1>-1$ (+)
Παίκτης 2
Αν ο 1 παίξει R1, τότε ο 2 θα παίξει C1, γτ $4>3$ (-)
Αν ο 1 παίξει R2, τότε ο 2 θα παίξει C2 γτ $8>2$ (-)

Άρα, η ισορροπία Nash είναι η στρατηγική (R1, C1)

Β' τρόπος: IESDS. Αν ο R είναι ορθολογικός (ΚΓΟ τάξης μηδέν), τότε αυτός δεν θα παίξει ποτέ R2, γτ αυτή κυριαρχείται αυστηρά από την R1. Άρα διαγράφουμε την R2.

	C1	C2
R1	2,4	1,3
R2	0,2	-1,8

Ο C δεν έχει κάποια αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική. Ωστόσο, αν γνωρίζει ότι ο R είναι ορθολογικός (ΚΓΟ 1ης τάξης), τότε ο C γνωρίζει ότι ο R δεν πρόκειται ποτέ να παίξει R2. Άρα ο C δεν έχει κανένα λόγο να παίξει C2 με δεδομένο ότι η C2, είναι η βέλτιστη στρατηγική, αν ο R παίξει R2 (είπαμε όμως ότι ο R δεν πρόκειται να παίξει R2). Άρα διαγράφαμε την C2.
Συνεπώς, η IESDS + ΚΓΟ 1ης τάξης λύνουν το παίγνιο.

Σημαντικά αποτελέσματα:
Θεώρημα 1: Έστω $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ένα παίγνιο σε καν. μορφή. Αν η στρατηγική (s_1^*, s_2^*, s_n^*) είναι η μοναδική η οποία επιβιώνει από την IESDS, τότε αυτή είναι η μοναδική ισορροπία Nash του παιγνίου.

Θεώρημα 2: Έστω $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ένα παίγνιο σε καν. μορφή. Αν η στρατηγική $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ είναι ισορροπία Nash, τότε αυτή επιβιώνει από την IESDS.

Μειονεκτήματα της IESDS
a) Αν 1 παίγνιο δεν έχει καμία αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική, τότε η IESDS δεν μπορεί να κάνει καμία πρόβλεψη για την έκβαση του παιγνίου (δεν ξεκινάει καν) Ακόμα κι αν υπάρχει ΚΓΟ άπειρης τάξης.

β) Απαιτεί συνεχώς νέες υποθέσεις επάνω στην ορθολογικότητα των παικτών (Αύξηση τάξης ΚΓ).