(2) (3) Θεωρία Παιγνίων 23/3/18

~~Μαθ. Πολ. Econ II — 22/3/18~~

Εφαρμογή (διαιτησία μισθών)

Σε 1 παίγνιο με κανονική μορφή υπάρχουν 2 παίκτες: 1 επιχείρηση (F) και ένα εργ. συνδικάτο (U). Η επιχ/ση και το συνδικάτο καλούνται να επιλέξουν ταυτόχρονα μισθολογικές προτάσεις w_F κ' w_u αντίστοιχα, τις οποίες θα υποβάλλουν σε μια μισθολογική διαιτησία. Η απόδοση VNM των F κ' U δίνεται από τον αναμενόμενο μισθό: $w_F \cdot P(w_F) + w_u \cdot P(w_u)$

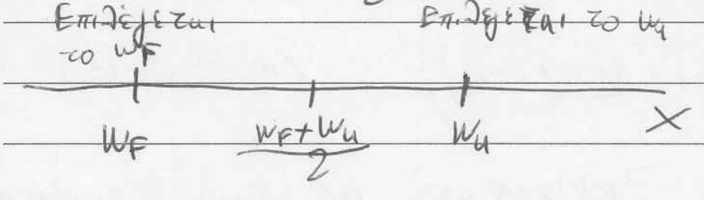
Ο διαιτητής θα επιλέξει εκείνο το επίπεδο μισθού, X, το οποίο είναι πιο κοντά στην άποψή του. (Θ) Να βρεθεί η ισορροπία Nash του παιγνίου ως προς τις μισθολογ. προτάσεις w_F κ' w_u.

Λύση

Θα κάνουμε αρχικά την υπόθεση, την οποία στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $w_F < w_u$, δηλ. θα υποθέσουμε ότι ο μισθός τον οποίο θα προτείνει η επιχ/ση είναι γνησίως μικρότερος από τον μισθό τον οποίο θα προτείνει το συνδικάτο. Με δεδομένο ότι η διαιτησία επιλέγει μισθό κοντύτερα στη δική της αντίληψη, τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $X > \frac{w_F+w_u}{2}$, τότε ο διαιτητής θα επιλέξει w_u

(ii) Αν $X < \frac{w_F+w_u}{2}$, τότε ο διαιτητής θα επιλέξει w_F.



Αριθμητικό π.χ. Έστω $w_F = 100$, $w_u = 150$ ($w_F < w_u$), τότε $\frac{w_F+w_u}{2} = 125$

Αν $X = 130 > \frac{w_F+w_u}{2}$, τότε (ο διαιτητής επιλέγει το $w_u = 150$)

Αν $X = 120 < \frac{w_F+w_u}{2}$, τότε -//- -//- το $w_F = 100$)

Επομένως, η πιθανότητα επιλογής της μισθολογικής πρότασης της επιχ/σης, w_F, είναι $P(w_F) = P\left(X < \frac{w_F+w_u}{2}\right) \triangleq F\left(\frac{w_F+w_u}{2}\right)$

ισότητα εξ ορισμού

cdf → αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

όπου F είναι η αθ. κπ του X ο οποίος είναι μια τ.μ. για τις F & U

Αντίστοιχα:

$P(w_u) = P\left(X > \frac{w_F + w_u}{2}\right)$

$= 1 - P\left(X \leq \frac{w_F + w_u}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right)$

Άρα καταλήγουμε ότι ο προσδοκώμενος μισθός $w_F \cdot P(w_F) + w_u \cdot P(w_u)$ είναι τελικά ίσος με:

$w_F \cdot F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right) + w_u \cdot \left(1 - F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right)\right)$

Το (w_F, w_u) το οποίο αντιστοιχεί στην ισορροπία Nash, είναι η λύση των ακόλουθων 2 προβλημάτων:

$\min_{w_F} w_F \cdot F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right) + w_u \left(1 - F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right)\right)$ (επιχ/ση)

και

$\max_{w_u} w_F \cdot F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right) + w_u \left(1 - F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right)\right)$ (συνδικάτο)

Βρίσκουμε τις συνθήκες α' τάξης ξεκινώντας με την επιχ/ση:

$F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right) + \frac{w_F}{2} f\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right) - \frac{w_u}{2} f\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right) = 0$

Ισοδύναμα

$\frac{1}{2}(w_u - w_F) f\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right) = F\left(\frac{w_F + w_u}{2}\right)$

(Σημείωση: Ισχύει $F' = f$, διότι η παράγωγος της αθ. κπ. είναι η σ.π.π.)

(3)

διάμεσος: $F(m) \triangleq \int_{-\infty}^{m} f(t)dt = 0,5$

Συνδυασμό (ΣΠΣ):

$$\frac{w_F}{2} \cdot f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) + 1 - F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) - \frac{w_H}{2} \cdot f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = 0$$

Ισοδύναμα:

$$\frac{1}{2}(w_H - w_F) f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right)$$

Βρήκαμε τις ακόλουθες 2 συνθήκες α' τάξης:

$$\frac{1}{2}(w_H - w_F) f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) \text{ επιχείρηση}$$

κ' $$\frac{1}{2}(w_H - w_F) \cdot f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right)$$

Τα πρώτα μέλη είναι ίσα οπότε ισχύει και για τα δεύτερα:

$$F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = \frac{1}{2}}$$

Ωστόσο γνωρίζουμε ότι η τιμή η οποία ικανοποιεί $F=0,5$ είναι η διάμεσος $\Rightarrow$ Άρα $F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{w_F+w_H}{2} = m \quad (1)$

(m: διάμεσος).

Αν αντικαταστήσουμε το $F\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right)$ με το $\frac{1}{2}$ σε οποιαδήποτε συνθήκη α' τάξης.

$$(\text{επιχείρηση}) \xrightarrow{\alpha' \text{ τάξης}} \frac{1}{2}(w_H - w_F) f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (w_H - w_F) f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_H - w_F = \frac{1}{f\left(\frac{w_F+w_H}{2}\right)} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} w_H - w_F = \frac{1}{f(m)}$$

Θα υποθέσουμε: οι τιμές του X (μισθός ο οποίος επιλέγεται από το διαιτητή) κατανέμονται κανονικά, τότε:

Από συμμετρία κανονικής κατανομής $\Rightarrow$ Διάμεσος = μέσος ή τιμή

οπότε η τελευταία εξίσωση γράφεται: $w_H - w_F = \frac{1}{f(\mu)}$)

όπου $f(X/\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$ συνεπάγεται

ότι $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Άρα η εξίσωση: $w_u - w_F = \frac{1}{f(\mu)}$ γράφεται

$$w_u - w_F = \frac{1}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}} \Leftrightarrow w_u - w_F = \sigma\sqrt{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow w_u - w_F = \sqrt{2\pi\sigma^2} \quad (2)$$

Η λύση των (1) και (2) είναι το (w_u, w_F) στην ισορροπία Nash.

Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{m=\mu} \frac{w_u + w_F}{2} = \mu \\ w_u - w_F = \sqrt{2\pi\sigma^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} w_u + w_F = 2\mu \\ w_u - w_F = \sqrt{2\pi\sigma^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow (+)$$

$$\Leftrightarrow 2w_u = 2\mu + \sqrt{2\pi\sigma^2} \Rightarrow \boxed{w_u = \mu + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}}$$

$$\text{και } \boxed{w_F = \mu - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}}$$

Πράγματι $w_F < w_u$ και οι δύο προτάσεις θα βρίσκονται γύρω από το μέσο μισθό μ του διαιτητή. Επιπλέον,

(a) Αν σ^2 μικρό (κοντά στο μηδέν), τότε κανένας από τους 2 παίκτες δεν θα βρίσκεται μακριά από το μ.

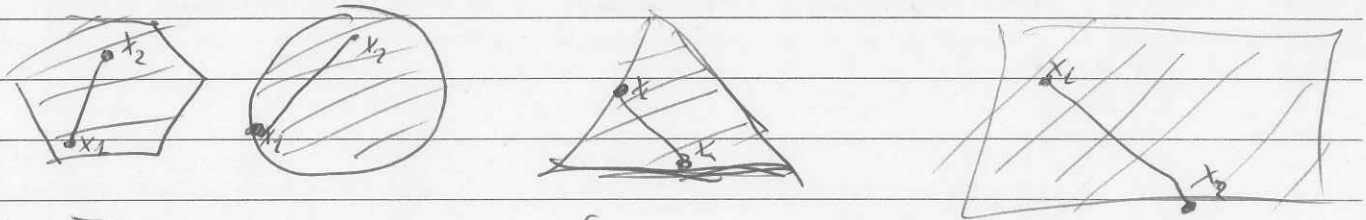
(b) Αν $\sigma^2 >> 0$, δηλ. σ ∃ μεγάλη αβεβαιότητα για την άποψη του διαιτητή, τότε οι προτάσεις των F και u θα απέχουν πολύ από το μ. Συγκεκριμένα η F θα υποβάλλει μια πολύ μικρή μισθολογική πρόταση, ενώ το u θα υποβάλλει μια πολύ μεγάλη μισθολογική πρόταση.

Κυρτά Σύνολα

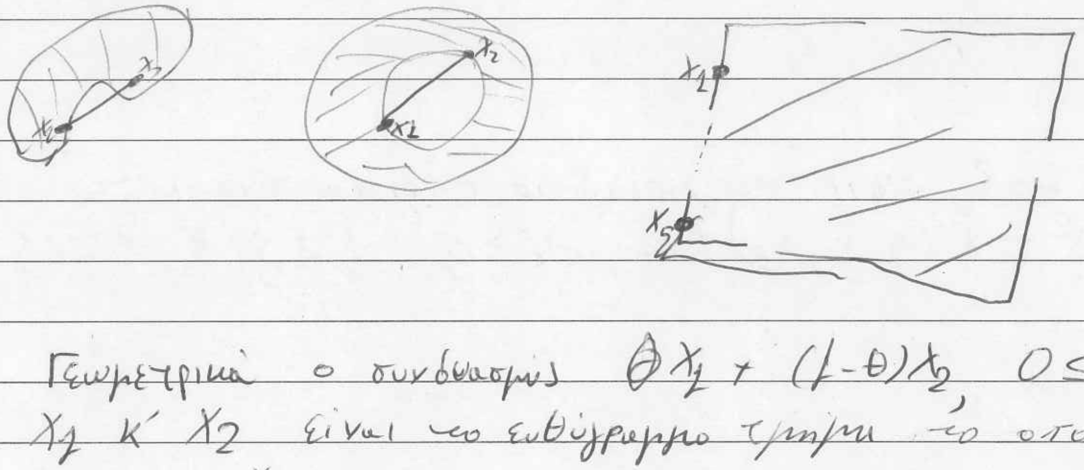
Ορισμός: Ένα σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν $\forall$ 2 σημεία του συνόλου, έστω x_1 κ' x_2, τα οποία ενώνουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα, ισχύει ότι κάθε σημείο του ευθύγραμμου αυτού τμήματος είναι ταυτόχρονα και σημείο του συνόλου:

$x_1, x_2 \in C \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C, \ 0 \le \theta \le 1$.

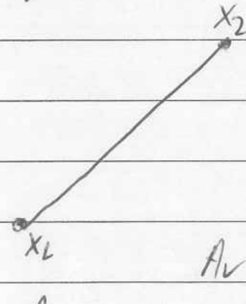
Τα ακόλουθα σύνολα είναι κυρτά



Τα ακόλουθα σύνολα δεν είναι κυρτά:



Γεωμετρικά ο συνδυασμός $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$, $0 \le \theta \le 1$, των x_1 κ' x_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο τα ενώνει.



$\theta x_1 + (1-\theta)x_2, \ 0 \le \theta \le 1$

Αν $\theta = 1$, τότε $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = x_2$

Αν $\theta = 0$, τότε $\theta x_1 + (1-\theta) \cdot x_2 = x_2$

Αν $0 < \theta < 1$, τότε παίρνουμε τα υπόλοιπα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος (πλην των άκρων του).

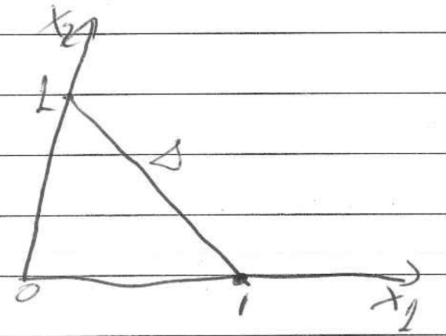
Ο συνδυασμός $\theta x_1 + (1-\theta) x_2$, $0 \le \theta \le 1$, λέγεται κυρτός συνδυασμός των σημείων $x_1, x_2 \in C$. Ένα σημαντικό κυρτό σύνολο στον Θ.Π. είναι το μοναδιαίο πλέγμα (unit simplex), τα στοιχεία του οποίου θα δούμε αργότερα ότι λέγονται <u>μεικτές στρατηγικές</u>.

Εν γένει το $(n-1)$ διάστατο μοναδιαίο πλέγμα είναι το σύνολο:

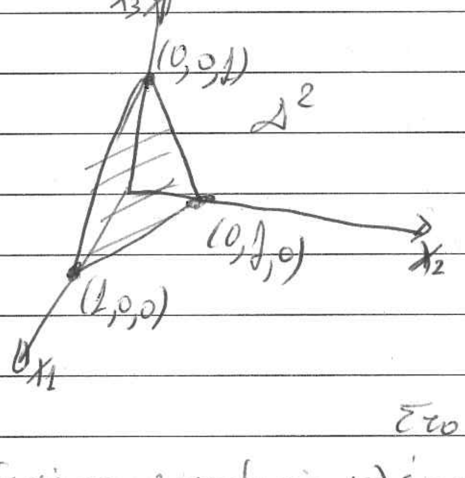
$$\Delta^{n-1} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i=1,2,\dots,n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

π.χ. 1: Αν $n=2$, τότε το μοναδιαίο πλέγμα είναι το σύνολο:

$$\Delta = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1 \right\}$$



π.χ. 2. Αν $n=3$, τότε το μοναδιαίο πλέγμα είναι το σύνολο: $\Delta^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_i \geq 0,\ i=1,2,3,\ \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \right\}$



Στο πλαίσιο της Θ.Π. κάθε παίκτης έχει το δικό του μοναδιαίο πλέγμα, το οποίο αποτελείται από όλες τις πιθανότητες, με τις οποίες επιλέγει τις στρατηγικές του, οι οποίες είναι μη αρνητικές και το άθροισμά τους είναι η πιθανότητα του χώρου στρατηγικής, η οποία είναι 1.