30-3-18

4

Θεωρία Παιγνίων

Η έννοια του κυρτού συνδυασμού επεκτείνεται και σε k, το πλήθος, σημεία, όπου $k \in N$, $k>2$. Πράγματι, αν $x_1, x_2, \dots, x_k \in C \subseteq R^n$, τότε ο συνδυασμός

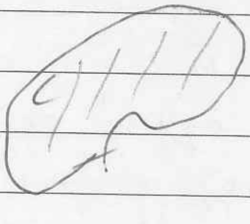
$$\theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 + \dots + \theta_k \cdot x_k \quad \text{με } \theta_i \geq 0, \ i=1,2,\dots,k,$$
$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k = 1$$

λέγεται κυρτός συνδυασμός των σημείων $x_1, x_2, \dots, x_k$ του συνόλου $C \subseteq R^n$. Ισχύει ότι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων ενός συνόλου, C, αποτελεί το κυρτό κέλυφος του C, το οποίο θα το συμβολίζουμε ως $\operatorname{conv} C$, δηλ.

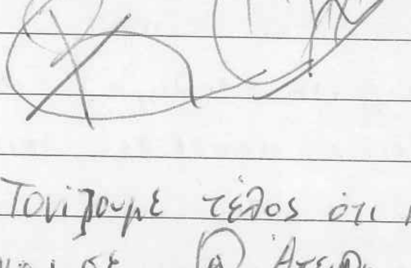
$$\operatorname{conv} C = \{\theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k \mid x_i \in C,$$
$$\theta_i \geq 0, \ i=1,2,\dots,k, \ \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k = 1\}$$

Το κυρτό κέλυφος του C είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο, το οποίο περιέχει το C. Άρα το κυρτό κέλυφος $\operatorname{conv} C$ του C είναι εξ ορισμού κυρτό σύνολο.

Για παράδειγμα το κυρτό κέλυφος του ακόλουθου συνόλου C (μη κυρτού)



είναι το ακόλουθο σύνολο, $\operatorname{conv} C$



Τονίζουμε τέλος ότι η έννοια του κυρτού συνδυασμού επεκτείνεται και σε
(α) Άπειρα αθροίσματα (σειρές)
(β) Ολοκληρώματα κ' πυκνότητες
(γ) Τυχαίες μεταβλητές

Πιο συγκεκριμένα

α) Αν $C \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και $x_1, x_2, \ldots \in C$ με $\theta_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots$ και $\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i = 1$, τότε $\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i x_i \in C$

υπό την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει (είναι αθροίσιμη)

β) ~~Εδώ~~ Έστω $p(\vec{x}): C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, σ.π.π. όπου $\operatorname{dom} p(\vec{x}) = C =$ κυρτό. Ισχύει εξ ορισμού $\int_C p(\vec{x})\, d\vec{x} = 1$. Τότε με δεδομένο ότι $C =$ κυρτό έχουμε ότι $\int_C p(\vec{x})\, \vec{x}\, d\vec{x} \in C$

γ) Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό σύνολο και $\vec{x}$ μια διανυσματική (εν γένει) τ.μ. τ.ω. $P(\vec{x} \in C) = 1$. Τότε η μέση τιμή $E\vec{x} \in C$. Πράγματι αν, χάριν ευκολίας υποθέσουμε ότι $X =$ βαθμωτή με πεδίο τιμών $M_X = \{x_1, x_2\}$, όπου $Prob(X=x_1) = \theta$, $Prob(X=x_2) = 1-\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, τότε

$EX \triangleq Prob(X=x_1)\cdot x_1 + Prob(X=x_2)\cdot x_2 =$

$= \theta \cdot x_1 + (1-\theta)x_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, αλλά ο κυρτός συνδυασμός με τον οποίο ξεκινήσαμε (κ' ο οποίος ανήκει στο κυρτό σύνολο).

Cournot με άπειρες επιλογές

Ένα παίγνιο με συνεχείς χώρους στρατηγικής $(|S_i| = +\infty)$

Θα εξετάσουμε το υπόδειγμα Cournot-Nash θεωρώντας αρχικά ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, επιχειρήσεις οι οποίες επιλέγουν ταυτόχρονα την ποσότητα ενός ομοιογενούς προϊόντος, το οποίο παράγουν. Η ομοιογένεια του προϊόντος κ' η ταυτόχρονη επιλογή της ποσότητας είναι οι υποθέσεις του συγκεκριμένου υποδείγματος. Άρα το υπόδειγμα Cournot-Nash είναι 1 στατικό παίγνιο (ταυτόχρονη επιλογή) πλήρους ~~πλη~~ πληροφόρησης. Το κέρδος των επιχειρήσεων αποτελεί κοινή γνώση μεταξύ τους για κάθε συνδυασμό ποσοτήτων ο οποίος επιλέγεται. Εδώ θα κάνουμε κ' τις ακόλουθες επιπλέον υποθέσεις

1) Ζήτηση είναι γραμμική.

2) Το οριακό κόστος παραγωγής του προϊόντος είναι σταθερό κ' κοινό για όλες τις επιχειρήσεις.

(4)

Όταν η τελ. υπόθεση ισχύει λέμε ότι το ολιγοπώλιο είναι συμμετρικό κι οι επιχ. είναι ίδιες.

Η συνάρτηση ζήτησης δίνεται απ' τον τύπο

$$P(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = A - b\sum_{i=1}^{n} Q_i, \quad A \in (0, +\infty),$$

$b \in (0, +\infty)$ (γραμμική ζήτηση)

Η συναρτ. κόστους είναι η C_i με τύπο $C_i(Q_i) = cQ_i$, $c \in (0, +\infty)$

Στην ισορροπία Nash του υποδείγματος Cournot, κάθε επιχείρηση μεγιστοποιεί το κέρδος της. Άρα, η i-οστή επιχείρηση ει γένει λύνει το πρόβλημα:

$$\max_{Q_i} \Pi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \left(A - b\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)Q_i - c\cdot Q_i$$

Αναπτύσσοντας το άθροισμα μέσα στην παρένθεση γράφουμε:

$$\max_{Q_i} \Pi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = (A - bQ_1 - b\cdot Q_2 - \ldots - bQ_i - \ldots - bQ_n)\cdot Q_i - c\cdot Q_i$$

κι βρίσκουμε τη συνθήκη Α' τάξης:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial Q_i} = -bQ_i + A - b\cdot Q_1 - b\cdot Q_2 - \ldots - bQ_i - \ldots - b\cdot Q_n - C = 0$$

Ισοδύναμα: $2bQ_i = A - b\sum_{j=1, j\neq i}^{n} Q_j - c \iff$

$$\iff \boxed{Q_i = \frac{A-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} Q_j} \quad (1)$$ (συνάρτηση βέλτιστης αντεπόκρισης)

Επιπλέον ικανοποιείται η συνθ. β' τάξης

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial Q_i^2} = -2b < 0$$ (μέγιστο ως προς Q_i)

Η (1) λέγεται συναρτ. βέλτιστης απόκρισης της i-οστής επιχείρησης. Δείχνει την ποσότητα η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος της i-οστής επιχείρησης για κάθε συνδυασμό ποσοτήτων $(Q_1, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_n)$, ο οποίος παράγεται από τις άλλες ~~παράγεται από τις άλλες~~ επιχειρήσεις.

Επειδή το ολιγοπώλιο είναι συμμετρικό (ίδια συναρτ. κόστους για όλες τις επιχ.) έπεται στην ισορροπία Nash ισχύει $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = Q^N$, (όλες επιχειρήσεις μοιράζονται την αγορά). Αντικ/ντας το αποτέλεσμα αυτό μέσα στην (1), η (1) γράφεται

$$Q^N = \frac{A-C}{2b} - \frac{1}{2}(n-1)Q^N$$

$\Longrightarrow$ Λύνοντας ως προς Q^N, βρίσκουμε την ποσότητα την οποία θα προσφέρει στην αγορά η κάθε επιχ/ση

$$\left(1 + \frac{n-1}{2}\right) Q^N = \frac{A-c}{2b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} Q^N = \frac{A-c}{2b} \Leftrightarrow \boxed{Q^N = \frac{A-c}{b(n+1)}}$$

Άρα η συνολική προσφορά στον ολιγοπωλιακό κλάδο είναι ίση με ~~n~~ ~~n~~

$\frac{n(A-c)}{b(n+1)}$ και η τιμή είναι ίση με

$$P^N = A - b\,\frac{n(A-c)}{b(n+1)} = A - \frac{n(A-c)}{n+1} = \frac{An + A - An + nc}{n+1} = \frac{A+nc}{n+1}.$$

Αν ο αριθμός των επιχ/σεων $n \to +\infty$ τότε έχουμε το εξής:

$$\lim_{n\to+\infty} P^N = \lim_{n\to+\infty} \frac{A+nc}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{A}{n+1} + \frac{nc}{n+1}\right) =$$

$$= A \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} + c \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = A\cdot 0 + c \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= 0 + c\cdot 1 = 0 + c = c,$$

δηλ. η τιμή τείνει στο οριακό κόστος.

Το παραπάνω αποτέλεσμα $\left(\lim_{n\to+\infty} P^N = c\right)$ είναι γνωστό ως Θεώρημα Cournot. Κ' λέει ότι σε 1 συμμετρικό ολιγοπώλιο με κοινό κ' σταθερό ορ. κόστος, στο οποίο η ζήτηση είναι γραμμική, ο αριθμ. επιχ/σεων $(n \to +\infty)$, τότε το ολιγοπώλιο ~~Cournot~~-Nash τείνει στον τέλειο ανταγωνισμό. Κ επομένως η τιμή τείνει στο οριακό κόστος.

⑤ $\boxed{\text{Θ. Παιγνίων}}$ $\boxed{20\text{-}4\text{-}18}$

$\boxed{\text{Ισορροπία Nash σε μεικτές Στρατηγικές}}$

ορισμός: Έστω $G=\{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 1 παίγνιο σε κανονική μορφή και $S_i=\{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iK}\}$ (κεφάλαιο) ο χώρος στρατηγικής του i-οστού παίκτη, όπου $i\in N$, $1\le i\le n$

Μοναδιαίο πλέγμα (unit simplex) του χώρου στρατηγικής S_i λέγεται το σύνολο [illegible] ΔS_i, όπου

$$\Delta S_i=\{(\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \dots, \sigma_i(s_{iK})) : \sigma_i(s_{ik})\ge 0,\ k=1,2,\dots,K,\ \sigma_i(s_{i1})+\sigma_i(s_{i2})+\dots+\sigma_i(s_{iK})=1\}$$

(μικρό)

Μεικτή στρατηγική για τον i-οστό παίκτη λέγεται ένα στοιχείο του πλέγματος ΔS_i

Στον παραπάνω ορισμό συμβολίζουμε ως $\sigma_i(s_{ik})$ την πιθανότητα με την οποία ο i-οστός παίκτης επιλέγει την στρατηγική s_{ik}, όπου $k=1,2,\dots,K$ (ο παίκτης i έχει K το πλήθος διαφορετικές στρατηγικές).

Έχουμε πει ότι το μοναδιαίο πλέγμα Δ^{n-1} όπου
$\Delta^{n-1}=\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,n,\ x_1+x_2+\dots+x_n=1\}$ είναι ένα κυρτό σύνολο. Άρα $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)\in\Delta^{n-1}$, ο κυρτός συνδυασμός $\theta_1 x_1+\theta_2 x_2+\dots+\theta_n x_n \in\Delta^{n-1}$, όπου $\theta_i\ge 0$, $i=1,2,\dots,n$ και $\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n=1$.

Επομένως, όσον αφορά το μοναδιαίο πλέγμα ΔS_i του χώρου στρατηγικής S_i του παίκτη i με $i\in N$, $1\le i\le n$, αυτό σημαίνει ότι κυρτοί συνδυασμοί μεικτών στρατηγικών ανήκουν στο σύνολο ΔS_i, δηλ. είναι και αυτοί μεικτές στρατηγικές

Nash Equilibrium in Mixed Strategies (NEMS)

Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές (NEMS) λέγεται 1 κατανομή πιθανότητας για κάθε παίκτη τ.ω. αυτός να είναι αδιάφορος μεταξύ των καθαρών του στρατηγικών (δλδ. των στρατηγικών τις οποίες επιλέγει με πιθανότητα 1) υπό την έννοια ότι αυτές (καθ. στρατηγ.) του αποφέρουν την ίδια χρησιμότητα VNM.

Ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- Σε 1 παίγνιο σε κανονική μορφή, στο οποίο υπάρχουν 2 παίκτες κ ο κάθε παίκτης επιλέγει μεταξύ 2 στρατηγικών, τότε αν υπάρχει μοναδική ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές σίγουρα δεν υπάρχει NEMS (π.χ. δίλημμα των φυλακισμένων)

- Αν δεν υπάρχει καμία ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές τότε υπάρχει οπωσδήποτε NEMS.

- Αν υπάρχουν 2 ισορ. Nash σε καθαρ. στρατηγικές, τότε υπάρχει και NEMS.

Παίγνιο συντονισμού

Παραδ. (coordination game)

Η Μάχη των Φύλων - Battle of the sexes)

(2) - Woman

Man (1)	F	O
F	$\overset{+}{3}, \overset{-}{1}$	0, 0
O	0, 0	$\overset{+}{1}, \overset{-}{1}$

Παίκτης 1: Αν ο 2 επιλέξει F, τότε ο 1 θα επιλέξει επίσης F γτ 3>1 (+). Αν ο 2 επιλέξει O, τότε το ίδιο θα κάνει και ο 2 γτ 1>0 (+)

Παίκτης 2: Αν ο 1 επιλέξει F τότε και ο 2 θα επιλέξει F γτ 1>0 (-). Αν ο 1 επιλέξει O, τότε το ίδιο ~~θα~~ θα κάνει και ο 2 γτ 1>0 (-).

(5) (συνέχεια) Θ. Παιγνίων

Συνοψίζοντας $\exists$ 2 ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγικές, οι (F,F), $(O,O) \in S_1 \times S_2$

$\Downarrow$

Παίγνιο συντονισμού, ένα παίγνιο με πολλές ισορροπίες Nash σε καθαρές στρατηγ., στις οποίες οι παίκτες επιλέγουν την ίδια στρατηγική.

Από αποτέλεσμα ύπαρξης ισορροπίας Nash, γνωρίζουμε ότι το παίγνιο έχει NEMS. Αυτή η NEMS είναι ένα στοιχείο του καρτεσιανού γινομένου $\Delta S_1 \times \Delta S_2$, όπου $\Delta S_1 = \{(\sigma_1(F), \sigma_1(O)) : \sigma_1(F) \geq 0, \sigma_1(O) \geq 0, \sigma_1(F)+\sigma_1(O)=1\}$ είναι το μοναδιαίο πλέγμα του χώρου στρατηγικής $S_1=\{F,O\}$ του παίκτη 1 και αντίστοιχα

$\Delta S_2 = \{(\sigma_2(F), \sigma_2(O)) : \sigma_2(F) \geq 0, \sigma_2(O) \geq 0, \sigma_2(F)+\sigma_2(O)=1\}$ είναι ο χώρος στρατηγικής του 2. Άρα η NEMS είναι ένα προφίλ πιθανότητας (probability profil) $((\sigma_1(F), \sigma_1(O)), (\sigma_2(F), \sigma_2(O))) \in \Delta S_1 \times \Delta S_2$

Θέτουμε $\sigma_1(F) =: p$, $\sigma_1(O) =: 1-p$ και
$\sigma_2(F) =: q$, $\sigma_2(O) =: 1-q$, δηλ. ορίζουμε το προφίλ πιθανότητας $((p,1-p),(q,1-q))$ κ. ζητάμε p,q τ.ω.

η απόδοση vNM (6) $\forall$ καθαρή στρατηγική, $\forall$ παίκτη να είναι ίδια.

			q	$1-q$
			F	O
(1)	p	F	3,1	0,0
	$1-p$	O	0,0	1,1

Η απόδοση vNM του 1 είναι η ακόλουθη Π_1

$$\Pi_1 = 3pq + 0p(1-q) + 0(1-p)q + 1(1-p)(1-q) =$$

(2)

$= 3pq + 1 - q - p + pq = 4pq - p - q + 1$.

Τονίζουμε ότι για παράδ. η πιθανότ. ο παίκτης 1 να πάρει απόδοση 3 είναι ίση με την πιθανότ. ο 1 να παίξει F και ο 2 να παίξει F, δηλ.

$$P(F^1 \cap F^2) = P_1(F) P_2(F) = p \cdot q$$

Αντίστοιχα, η πιθανότ. ο 1 να πάρει απόδοση 1, είναι ίση με την πιθανότητα ο 1 να παίξει O και το ίδιο να επιλέξει 2, δηλ

$$P(O^1 \cap O^2) = P_1(O) P_2(O) = (1-p)(1-q)$$

Όπως γνωρίζουμε ότι 2 ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$ είναι ανεξάρτητα εάν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, στο συγκεκριμένο πλαίσιο η ανεξαρτησία των στρατηγικών, οι οποίες επιλέγονται απ' τους παίκτες, εκφράζει τη στατική φύση του παιχνιδιού.

Για τον παίκτη 2 η απόδοση ν.Ν/Μ δίνεται από τη συνάρτηση Π_2:

$$\Pi_2 = 1 \cdot pq + 0p(1-q) + 0(1-p)q + 2(1-p)(1-q) =$$
$$= pq + 1 - q - p + pq = 2pq - p - q + 1$$

Για τον (1) η πιθαν. q είναι σε κάθε περίπτωση δοσμένη. Αντίστοιχα για τον (2) η πιθαν. p με την οποία ο (1) παίζει F είναι γνωστή δοσμένη. Άρα, η κλίση της συνάρτησης Π_1 είναι η:

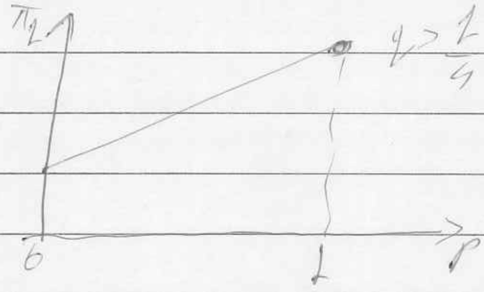
κλίση = παράγωγος $= \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial p} = 4q - 1$, $q \in [0,1]$.

Αντίστοιχα για τον (2), η κλίση της Π_2 είναι:

κλίση = παράγωγος $= \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial q} = 2p - 1$, $p \in [0,1]$

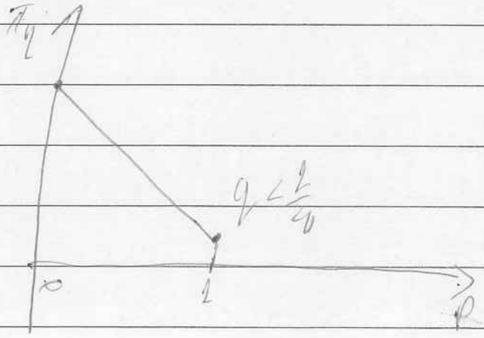
Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις για την κλίση $\frac{\partial \Pi_1}{\partial p} = 4q-1$ ανάλογα με τις τιμές του q.

(i) Αν $\frac{\partial \Pi_1}{\partial p} = 4q-1 > 0 \Leftrightarrow q > \frac{1}{4}$, τότε η Π_1 παρουσιάζει απόλυτο μέγιστο στο $p=1$

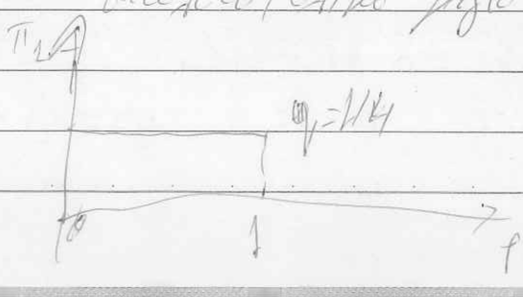


Το παραπάνω αποτέλεσμα λέει ότι αν η πιθανότητα ο 2 να επιλέξει F είναι μεγαλύτερη από 1/4, τότε ο 1 ο οποίος είναι ορθολογικός κ' μεγιστοποιεί την απόδοση vNM θα επιλέξει F με πιθανότητα 1 (βέβαιο ενδεχόμενο)

(ii) Αν $\frac{\partial \Pi_1}{\partial p} = 4q-1 < 0 \Leftrightarrow q < \frac{1}{4}$, τότε η Π_1 παρουσιάζει απόλυτο (ή ολικό) μέγιστο στο $p=0$

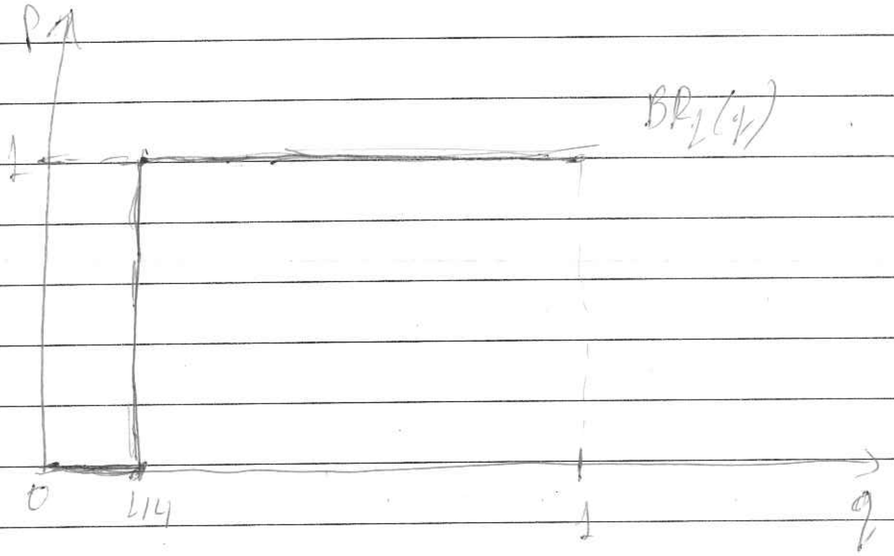


(iii) Αν $\frac{\partial \Pi_1}{\partial p} = 4q-1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{4}$, τότε η Π_1 παρουσιάζει απόλυτο/ολικό μέγιστο σε κάθε θέση (ή σημείο) $p \in [0,1]$



Συνδυάζοντας τα (i), (ii), (iii), στην αντιστοιχία (correspondence) ή πλειότιμη συνάρτηση (multi-valued function) βέλτιστης απόκρισης BR_1 (Best Response) του παίκτη (1) με τύπο

$$BR_1(q) = \begin{cases} p=1, & \text{αν } q>1/4 \\ p\in[0,1], & \text{αν } q=1/4 \\ p=0, & \text{αν } q<1/4 \end{cases}$$



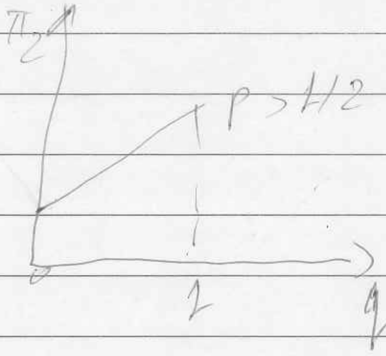
Σχεδιάζουμε την BR_1 στο τετράγωνο $[0,1]^2=[0,1]\times[0,1]$

Η BR_1 δεν είναι συνάρτηση, αλλά είναι αντιστοιχία ή πλειότιμη συνάρτηση. Συγκεκριμένα, ενώ μία συνάρτηση απεικονίζει έναν αριθμό στον έναν άλλον αριθμό, η πλειότιμη συναρτ. απεικονίζει έναν αριθμό σε ένα σύνολο. Η BR_1 απεικονίζει τον αριθμό $q=\frac{1}{4}$ στο σύνολο $BR_1(\frac{1}{4})=\{p: 0\le p\le 1\}=[0,1]$, το οποίο λέγεται κλειστό διάστημα με συνοριακά σημεία το 0 και το 1.

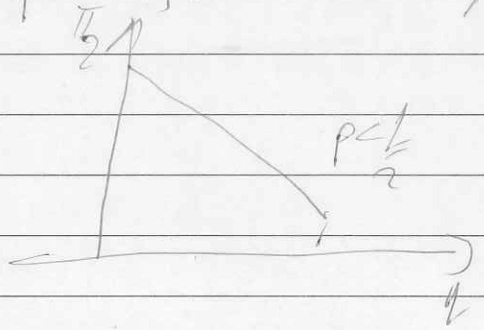
Αντίστοιχα για τον παίκτη (2) έχουμε τα ακόλουθα:
(i) Αν $\frac{\partial \pi_2}{\partial q} = 2p-1>0 \Leftrightarrow p>\frac{1}{2}$, τότε η Π_2 παρουσιάζει

5

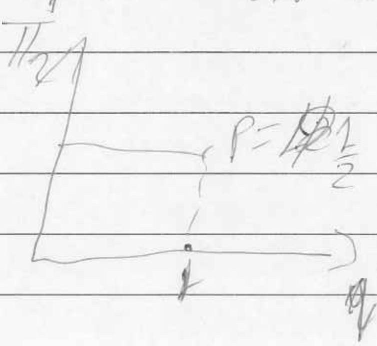
απόλυτο μέγιστο στο $q=1$



(ii) Αν $\frac{\partial \Pi_2}{\partial q} = 2p-1 < 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$, τότε η Π_2 παρουσιάζει απόλυτο μέγιστο στο $q=0$

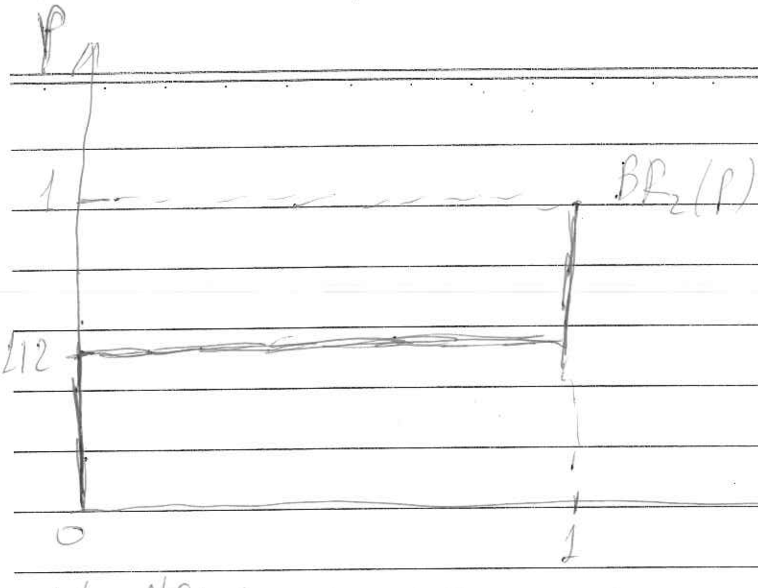


iii) Αν $\frac{\partial \Pi_2}{\partial q} = 2p-1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$ τότε η Π_2 παρουσιάζει απόλυτο μέγιστο σε κάθε θέση $q \in [0,1]$



Συνοψίζοντας, βρίσκουμε την αντιστοιχία $BR_2(p)$

$$BR_2(p) = \begin{cases} q=1, & \text{αν } p>1/2 \\ q \in [0,1], & \text{αν } p=1/2 \\ q=0, & \text{αν } p<1/2 \end{cases}$$



Η NEMS είναι σημείο τομής των $BR_1(q)$, $BR_2(p)$, και συγκεκριμένα είναι το προφίλ πιθανότητας

$$((p, 1-p), (q, 1-q)) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right)$$