(6) Θεωρία Παιγνίων (27-4-18)

Με αναφορά στη μάχη των φύλων είπαμε ότι το μοναδιαίο πλέγμα του χώρου στρατηγικής, S_1, του παίκτη 1, ΔS_1, είναι το σύνολο

$$\Delta S_1 = \{(\sigma_1(F), \sigma_1(O)) : \sigma_1(F) \geq 0,\ \sigma_1(O) \geq 0,\ \sigma_1(F) + \sigma_1(O) = 1\}$$

αντίστοιχα του παίκτη 2

$$\Delta S_2 = \{(\sigma_2(F), \sigma_2(O)) : \sigma_2(F) \geq 0,\ \sigma_2(O) \geq 0,\ \sigma_2(F) + \sigma_2(O) = 1\}$$

Επομένως, το Καρτεσιανό γινόμενο $\Delta S_1 \times \Delta S_2$ είναι το σύνολο όλων των ζευγαριών $((\sigma_1(F), \sigma_1(O)), (\sigma_2(F), \sigma_2(O)))$, όπου $(\sigma_1(F), \sigma_1(O)) \in \Delta S_1$ και $(\sigma_2(F), \sigma_2(O)) \in \Delta S_2$

Υπενθύμιση: $A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$

π.χ. $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

Η αντιστοιχία $BR_1(q) \equiv BR_1(\sigma_2(F))$ αντιστοιχίζει τον αριθμό $\sigma_2(F)$ σε ένα σύνολο στο οποίο παίρνει τιμές η πιθανότητα $\sigma_1(F)$. π.χ. $BR_1(\frac{1}{4}) = [0,1]$, όπου $\sigma_1(F) \in [0,1]$

Με συμπληρωματικό τρόπο προκύπτει η πιθανότητα $\sigma_1(O)$ με δεδομένο ότι $\sigma_1(O) = 1 - \sigma_1(F)$. Αντίστοιχα η $BR_2(p) \equiv BR_2(\sigma_1(F))$ αντιστοιχίζει τον αριθμό $\sigma_1(F) \equiv p$ σε ένα σύνολο στο οποίο ανήκει η πιθανότητα $\sigma_2(F)$ και αντίστοιχα προκύπτει η $\sigma_2(O) = 1 - \sigma_2(F)$

Ορίζουμε την αντιστοιχία

$$BR_1 \times BR_2 : \Delta S_1 \times \Delta S_2 \rightrightarrows \Delta S_1 \times \Delta S_2.$$

Αυτή αντιστοιχίζει ζευγάρια $((\sigma_1(F), \sigma_1(O)), (\sigma_2(F), \sigma_2(O)))$ στον εαυτό τους

π.χ. $BR_1(q) \times BR_2(p) = BR_1(\sigma_2(F)) \times BR_2(\sigma_1(F))$ με

$BR_1(\frac{1}{4}) \times BR_2(\frac{1}{2}) =: BR(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = ([0,1], [0,1])$

(1)

οπότε με συμπληρωματικό τρόπο υπολογίζονται και οι $\sigma_1(O)\,(=1-\sigma_1(F))$, $\sigma_2(O)\,(=1-\sigma_2(F))$

Εν γένει, αν σε 1 παίγνιο (κανονική μορφή) υπάρχουν $n<+\infty$, ορίζουμε την αντιστοιχία

$BR: \Delta S \rightrightarrows \Delta S$, όπου

$BR = \times_{i=1}^{n} BR_i$ και $\Delta S = \times_{i=1}^{n} \Delta S_i$

Γεγονός: Αν σ^* = ισορροπία Nash, τότε $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$

π.χ.

Στη μάχη των φύλων το ρόλο της σ^* (ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές) θα παίξει το $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Ισχύει $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \in BR\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ αφού είπαμε ότι

$$BR\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = BR_1\left(\frac{1}{4}\right) \times BR_2\left(\frac{1}{2}\right) = ([0,1], [0,1])$$

Στο ίδιο παίγνιο είχαμε βρει δύο ισορροπίες Nash (καθαρές στρατηγ.)

(F,F) με $(\sigma_1(F), \sigma_2(F)) = (1,1)$

και την (O,O) με $(\sigma_1(F), \sigma_2(F)) = (0,0)$

Τα ζεύγη $(1,1)$, $(0,0)$ ικανοποιούν $(1,1) \in BR(1,1)$ με δεδομένο ότι $BR(1,1) \overset{\Delta}{=} BR_1(1) \times BR_2(1) = (1,1)$

(το βλέπουμε από το προηγούμενο πίνακα $BR_1(q)$, και $BR_2(p)$)

Αντίστοιχα, $(0,0) \in BR(0,0)$. Εν γένει για μια αντιστοιχία
ισχύει

$\varphi: X \rightrightarrows Y$ ένα σημείο x λέγεται σταθερό σημείο της φ αν $x \in \varphi(x)$, όπου $\varphi(x)$ = σύνολο (!)

Μια ισορροπία Nash αποτελεί σταθερό σημείο της αντιστοιχίας $BR: \Delta S \rightrightarrows \Delta S$

$(BR = \times_{i=1}^{n} BR_i,\ \Delta S = \times_{i=1}^{n} \Delta S_i)$

6 Θεώρημα (Nash 1950): Έστω $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ένα παίγνιο σε κανονική μορφή με $n<+\infty$ παίκτες και $|S_i|<+\infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $1\leq i\leq n$ (πεπερασμένοι χώροι στρατηγικής). Τότε $\exists$ ισορροπία Nash, ενδεχομένως σε μεικτές στρατηγικές

* Το Θεώρημα Nash αποτελεί ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη ισορροπίας Nash. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το υπόδ. Cournot-Nash, το οποίο έχει ισορροπία Nash παρ'ότι οι χώροι στρατηγικής του συγκεκριμένου παιγνίου δεν είναι πεπερασμένοι, αλλά συνεχείς (διαστήματα της πραγματικής ευθείας).

Με δεδομένο ότι μία ισορροπία Nash αποτελεί σταθερό σημείο της αντιστοιχίας $\boxed{BR: \Delta S \rightarrow \Delta S}$, προκειμένου να αποδείξουμε την ύπαρξη της ισορροπίας Nash, αρκεί να αποδείξουμε ότι η BR έχει σταθερό σημείο.
Τονίζουμε ότι υπάρχουν πολλά θεωρήματα σταθερά σημεία. Κάποια αφορούν συναρτήσεις, ενώ άλλα αφορούν αντιστοιχίες. Ένα πολύ γνωστό θεώρημα σταθ. σημείου συνάρτησης είναι το θεώρημα σταθ. σημείου του Brouwer. Θα διατυπώσουμε το συγκεκριμένο θεώρημα κ' στη συνέχεια θα το αποδείξουμε.

SOS

Θεώρημα (σταθερού σημείου του Brouwer):
Έστω συνάρτηση $f \in C([a,b],[a,b])$.
Τότε $\exists\, p \in [a,b]$ τ.ω. $f(p)=p$, δηλ. η f έχει σταθερό σημείο.

Σημείωση: Το σύνολο $C([a,b],[a,b])$ είναι το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f:[a,b]\rightarrow[a,b]$, δηλαδή

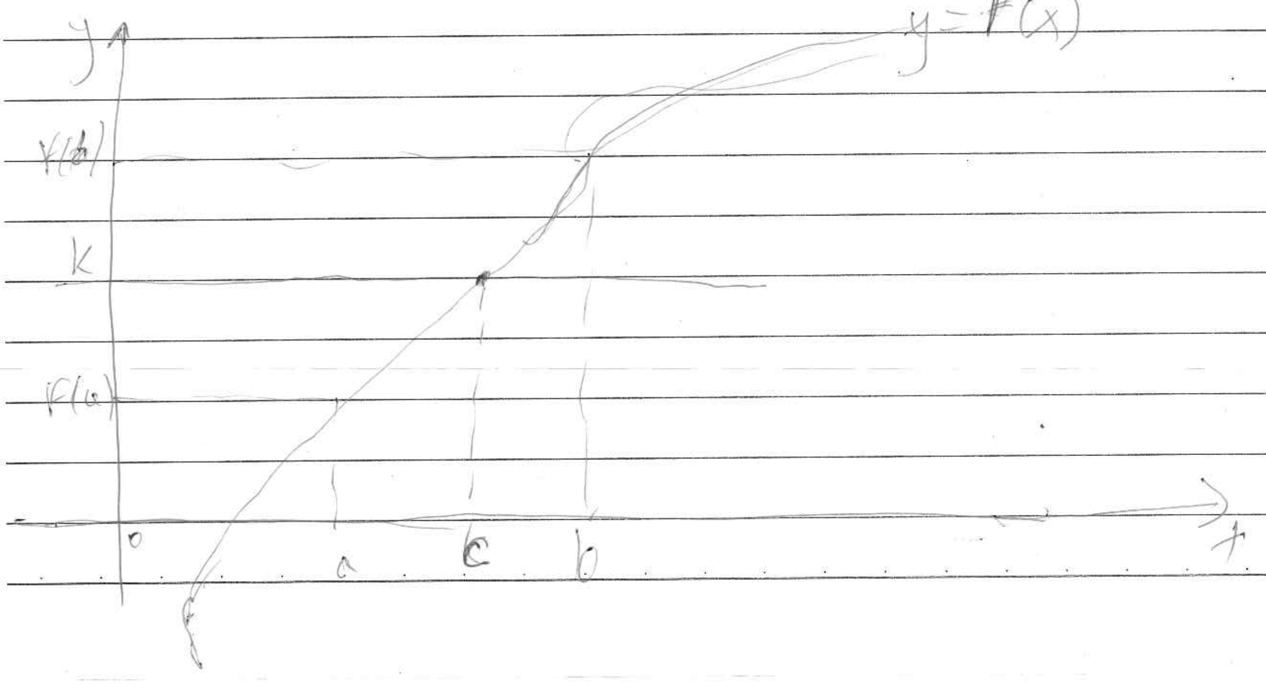
$$C([a,b],[a,b]) = \{f:[a,b]\rightarrow[a,b],\ f \text{ συνεχής}\}$$

Τονίζουμε ότι για μια αντιστοιχία $F: X \rightrightarrows Y$ το $F(x)$ $(x \in X)$ είναι σύνολο. Για μια συνάρτηση $f: X \to Y$ το $f(x)$ είναι αριθμός.
Για παράδειγμα: $f(x)=x^2+x-1$, το $x=1$ είναι σταθερό σημείο ~~γεω~~ γιατί $f(1)=1^2+1-1=1$.
Εν γένει για μια συνάρτηση $y=f(x)$, όλα τα σημεία ~~πάνω~~ στη διχοτόμο $y=x$ είναι σταθερά σημεία, επειδή $f(x)\equiv x$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος του σταθ. σημείου Brouwer θα χρειαστούμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής του Bolzano:

Θεώρημα (ενδιάμεσης τιμής του Bolzano):
Έστω $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ και αριθμός $k \in \mathbb{R}$ με $f(a)<k<f(b)$. Τότε $\exists$ αριθμός $c \in (a,b)$ τ.ω. $f(c)=k$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω Θεωρήματος είναι η ακόλουθη: Αν ο αριθμός k βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $f(a)$ κι $f(b)$, τότε από το σημείο $(0,k)$ μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία παράλληλη στο x-άξονα, η οποία τέμνει το γράφημα της f σε ένα σημείο με x-συντεταγμένη έναν αριθμό c ανάμεσα στους αριθμούς a κι b.

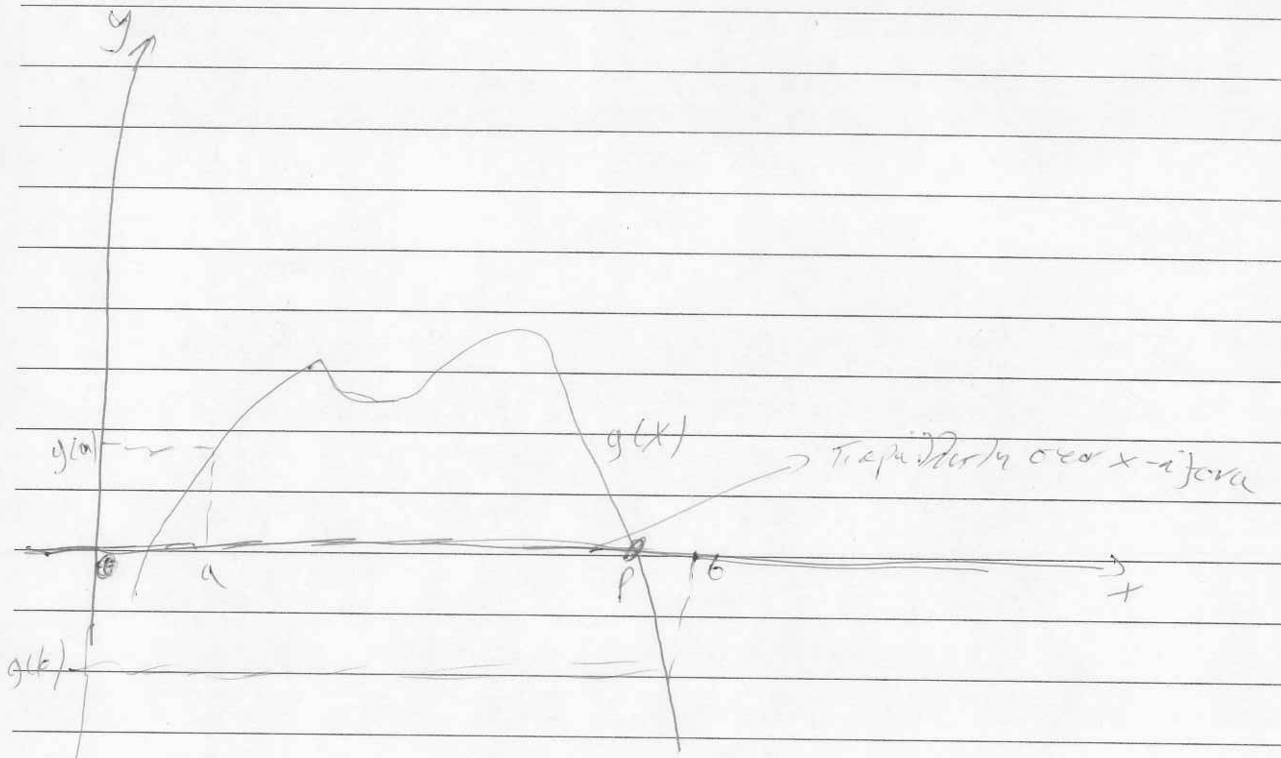


(c)

Απόδειξη 7η] Θ. σταθ. σημείου του Brouwer:

Για $F \in C([a,b],[a,b])$ είναι προφανές (από ορισμό σταθερού σημείου συνάρτησης) ότι αν $F(a)=a$ κ' $F(b)=b$ ~~~~, τότε το a ή το b είναι σταθερά σημεία της F. Άρα θεωρούμε $F(a)\neq a$, $F(b)\neq b$ και συγκεκριμένα $F(a)>a$, κ' $F(b)<b$ (γιατί $F\in[a,b]$)

Ορίζουμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x):=F(x)-x$. Η g ικανοποιεί το θεώρημα Ενδιάμεσης τιμής του Bolzano γιατί (1) είναι συνεχής (2) $g(a)>0$, $g(b)<0$ ($k=0$). Άρα από Θ. Ενδιάμεσης τιμής του Bolzano $\exists\, p\in(a,b)$ τ.ώ. $g(p)=F(p)-p=0$, άρα η F έχει σταθερό σημείο. Η απόδειξη του Θ. είναι πλήρης.



$(g(b)<0<g(a))$

(**) Στην περίπτωση του θεωρήματος Nash, επειδή εμφανίζεται αντιστοιχία αντί για συνάρτηση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο θεώρημα σταθερού σημείου για αντιστοιχίες. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του σταθερού σημείου του Kakutani.