(7) Θεωρία Παιγνίων (4-5-18)

Θεώρημα (σταθερού σημείου του Kakutani):
Έστω X μη κενό, συμπαγές και κυρτό σύνολο και $F: X \rightrightarrows X$ μια αντιστοιχία τ.ω.
(a) $\forall x \in X$ το σύνολο $F(x)$ είναι μη κενό και κυρτό
(β) Η F έχει κλειστό γράφημα. (έχει κλειστό σύνολο)
Τότε $\exists x \in X$ τ.ω. $x \in F(x)$, δηλαδή η F έχει σταθερό σημείο.

Στην αντιστοιχία $BR_i: \Delta S \rightrightarrows \Delta S$, θα αναφέρουμε ορισμένες τοπολογικές έννοιες.

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ανοιχτή μπάλα (open ball) με κέντρο ένα σημείο $\vec{x}_0$ και ακτίνα $r>0$ λέγεται το σύνολο όλων των σημείων $B(\vec{x}_0, r)$ με $B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in X : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$
Αν $X = \mathbb{R}^2$ το καρτεσιανό επίπεδο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, τότε η ανοιχτή μπάλα $B(\vec{x}_0, r)$ είναι ο ανοιχτός δίσκος
$$D(\vec{x}_0, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$

Θυμίζουμε ότι $\|\vec{x}\|$ είναι η 2-νόρμα, δηλ.
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$$
Άρα
$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + \dots (x_n - x_{n0})^2}$$

Η κλειστή μπάλα (closed ball) με κέντρο το σημείο $\vec{x}_0$ και ακτίνα r είναι το σύνολο $\bar{B}(\vec{x}_0, r)$ όλων των σημείων $\vec{x} \in X$ τα οποία απέχουν από το $\vec{x}_0$ απόσταση μικρότερη από r ή ίση με r:
$$\bar{B}(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in X : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \le r\}$$

Η σφαίρα κέντρου $\vec{x_0}$ και ακτίνας r είναι το σύνολο

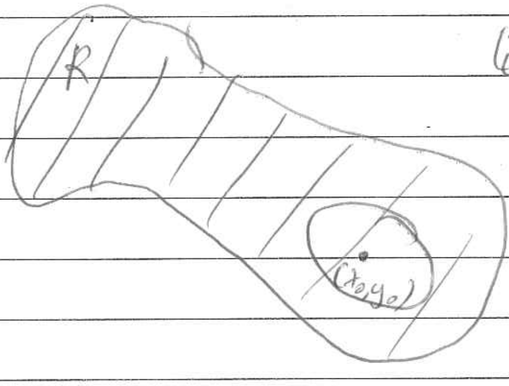
$S(\vec{x_0}, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : ||\vec{x} - \vec{x_0}|| = r\}$

Έστω τώρα R (region) μια περιοχή (ή σύνολο) του xy-επιπέδου και $(x_0, y_0) \in R$.

Το σημείο (x_0, y_0) λέγεται εσωτερικό σημείο του συνόλου R αν είναι το κέντρο ενός δίσκου με θετική ακτίνα, ο οποίος περιέχεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή R. Το (x_0, y_0) λέγεται συνοριακό σημείο αν κάθε δίσκος με κέντρο το συγκεκριμένο σημείο περιέχει σημεία τα οποία ανήκουν στην περιοχή R και σημεία τα οποία δεν ανήκουν στην περιοχή R. Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων αποτελεί το εσωτερικό του συνόλου R. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων αποτελεί το σύνορο του συνόλου R.

Ένα σύνολο λέγεται ανοιχτό, εάν αποτελείται εξ ολοκλήρου από εσωτερικά σημεία.

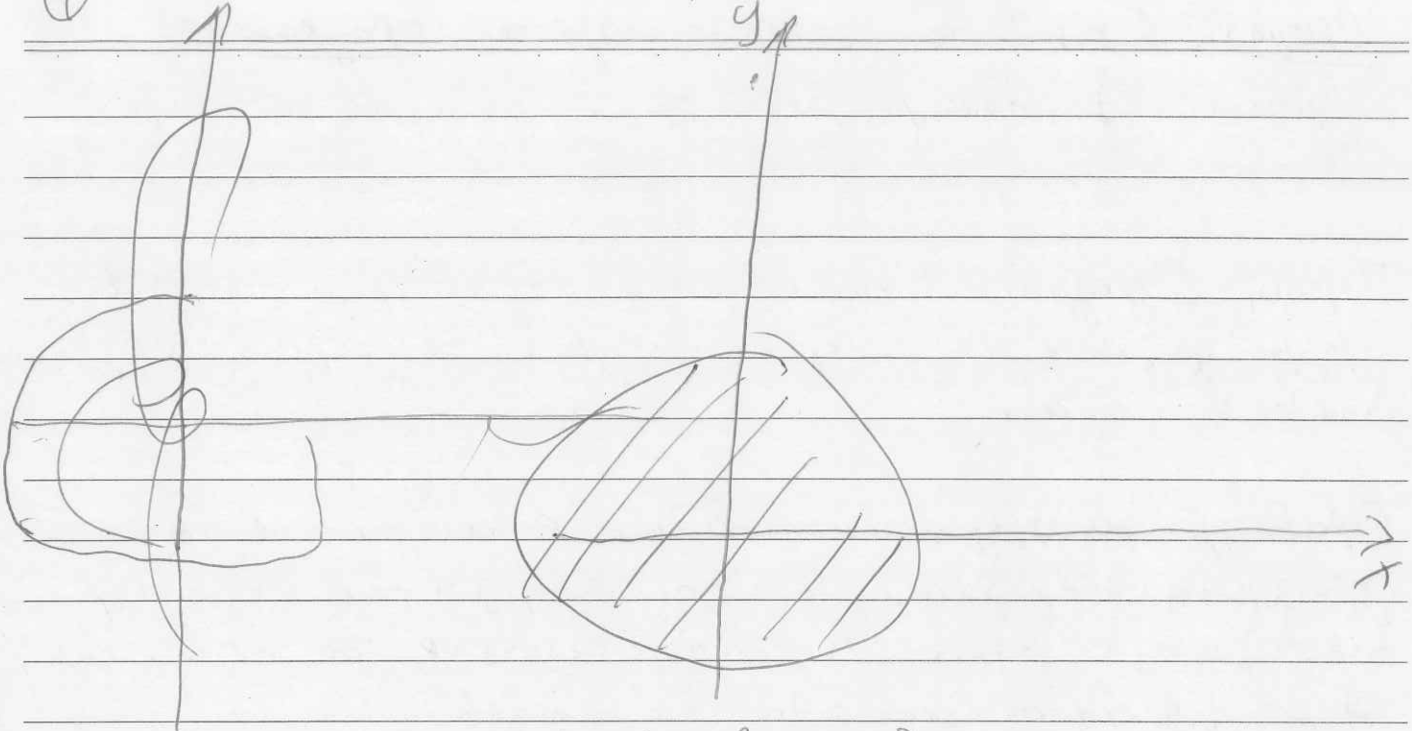
Ένα σύνολο λέγεται κλειστό, εάν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.



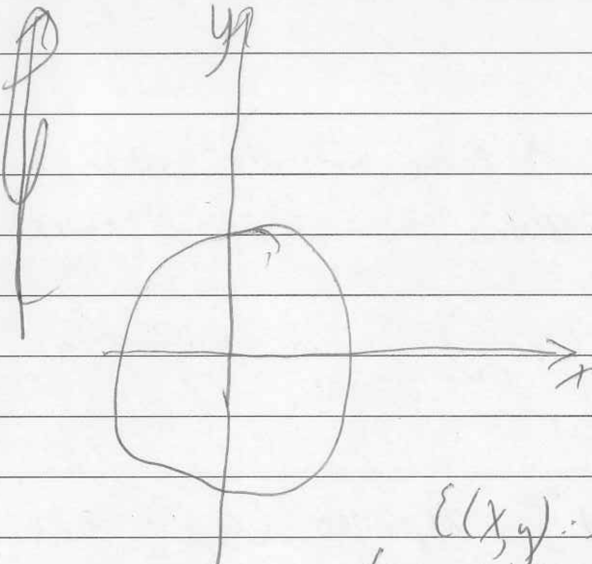
(i) Εσωτερικό σημείο

(ii) Συνοριακό σημείο

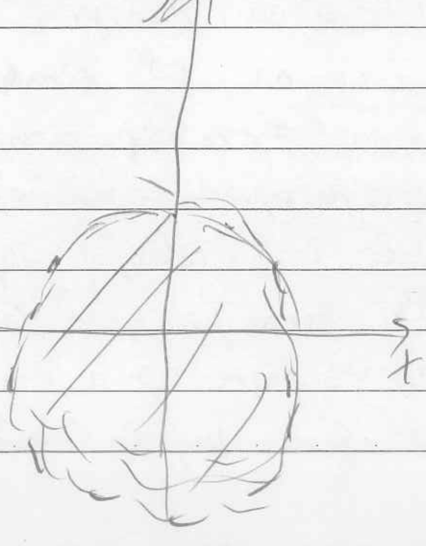
7



$\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$
(κλειστός μοναδιαίος δίσκος)



$\{(x,y): x^2+y^2=1\}$
(μοναδιαίος κύκλος: Το σύνορο του μοναδιαίου δίσκου



$\{(x,y): x^2+y^2<1\}$: (ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος)

2

Ορισμός: 1 σύνολο του επιπέδου λέγεται φραγμένο αν βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα σε 1 δίσκο με σταθερή ακτίνα.

Παραδείγματα φραγμένων συνόλων του επιπέδου είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, τα ορθογώνια, τρίγωνα, εσωτερικά τριγώνων, κύκλοι και δίσκοι.

Παραδείγμ. μη φραγμένων συνόλων είναι οι ευθείες, τα γραφήματα συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται σε άπειρα διαστήματα, οι άξονες των συντεταγμένων, τα τεταρτημόρια, το ημιεπίπεδο και όλο το επίπεδο.

Θεώρημα (Heine-Borel). Υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγή αν είναι κλειστά και φραγμένα.

Θεώρημα: Έστω X μη κενό σύνολο. Το X είναι κλειστό αν κάθε ακολουθία στο X συγκλίνει σε ένα σημείο το οποίο ανήκει σε αυτό.

Π.χ. $X=(0,1]$. Είναι κλειστό; Όχι γιατί η ακολουθία $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

ικανοποιεί $\frac{1}{n} \to 0 \notin (0,1]$. Άρα το $(0,1]$ δεν είναι κλειστό.

Απόδειξη Θ. Nash (1950): Θεωρούμε την αντιστοιχία $BR: \Delta S \twoheadrightarrow \Delta S$. Με δεδομένο ότι αν σ^* είναι ισορροπία Nash, τότε $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$, δηλαδή σ^* = σταθερό σημείο της BR θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η συγκεκριμένη αντιστοιχία έχει σταθερό σημείο. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. σταθερού σημείου του Kakutani. (α) Το σύνολο $\Delta S = X_{i=1}^{n} \Delta S_i$ είναι μη κενό, ενώ είναι κυρτό και συμπαγές γιατί από θεώρημα ισχύει ότι το Καρτεσιανό γινόμενο κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.

(7)

Εδώ ΔS_i, $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, είναι κυρτό.
Άρα και $\Delta S = \times_{i=1}^{n} \Delta S_i$ = κυρτό.
Αντίστοιχα από Θεώρημα ισχύει ότι Καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών συνόλων ≡ συμπαγές σύνολο. Κάθε μοναδιαίο πλέγμα ΔS_i, $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, είναι συμπαγές γιατί είναι κλειστό και φραγμένο (Θ.Heine-Borel) (π.χ. $\Delta = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 \}$)

Άρα $\Delta S = \times_{i=1}^{n} \Delta S_i$ = συμπαγές.

(β) Πρέπει να δείξουμε (από Θ. Kakutani) ότι η ΔS έχει κλειστό γράφημα, δηλ. ότι το γράφημά της είναι κλειστό σύνολο.
Από Θεώρημα αυτό σημαίνει ότι αν
$\{ (\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}_{-i}^{n'}) \}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία στη BR και $(\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}_{-i}^{n'}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (\sigma', \hat{\sigma}')$, τότε $(\sigma', \hat{\sigma}') \in BR$. Αν

$\{ (\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}_i^{n'}) \}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία βέλτιστων αποκρίσεων, τότε:

$$u_i(\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}_{-i}^{n'}) \geq u_i(\sigma, \hat{\sigma}_{-i}^{n'}), \ \forall \sigma.$$

Θεωρώντας ότι επιτρέπεται να πάρουμε όρια καθώς $n \to +\infty$ στα δύο μέλη της παραπάνω ανίσωσης έχουμε:
$\lim_{n \to +\infty} u_i(\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}_{-i}^{n'}) \geq \lim_{n \to +\infty} u_i(\sigma, \hat{\sigma}_{-i}^{n'}) \Rightarrow$

$u_i(\sigma', \hat{\sigma}') \geq u_i(\sigma, \hat{\sigma}')$, $\forall \sigma$. Άρα $\sigma' \in BR$.

Από συμμετρικό επιχείρημα προκύπτει $\hat{\sigma}' \in BR$. Πράγματι έχουμε ότι $u_{-i}(\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}_{-i}^{n'}) \geq u_{-i}(\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma})$, $\forall \hat{\sigma}$

$n \to +\infty$:
$\lim_{n \to +\infty} u_{-i}(\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}_i^{n'}) \geq \lim_{n \to +\infty} u_{-i}(\sigma_i^{n'}, \hat{\sigma}) \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{-i}(\sigma', \hat{\sigma}') \geq u_{-i}(\sigma', \hat{\sigma})$, $\forall \hat{\sigma}$.
Άρα, $\hat{\sigma}' \in BR$, δηλαδή $(\sigma', \hat{\sigma}') \in BR$.

Ισοδύναμα, από θεώρημα, η BR έχει κλειστό γράφημα. Άρα από Θ. σταθερού σημείου του Kakutani η $BR: \Delta S \rightrightarrows \Delta S$ έχει σταθερό σημείο, δηλ. ισορροπία Nash. Η απόδειξη του Θεωρ. είναι πλήρης.