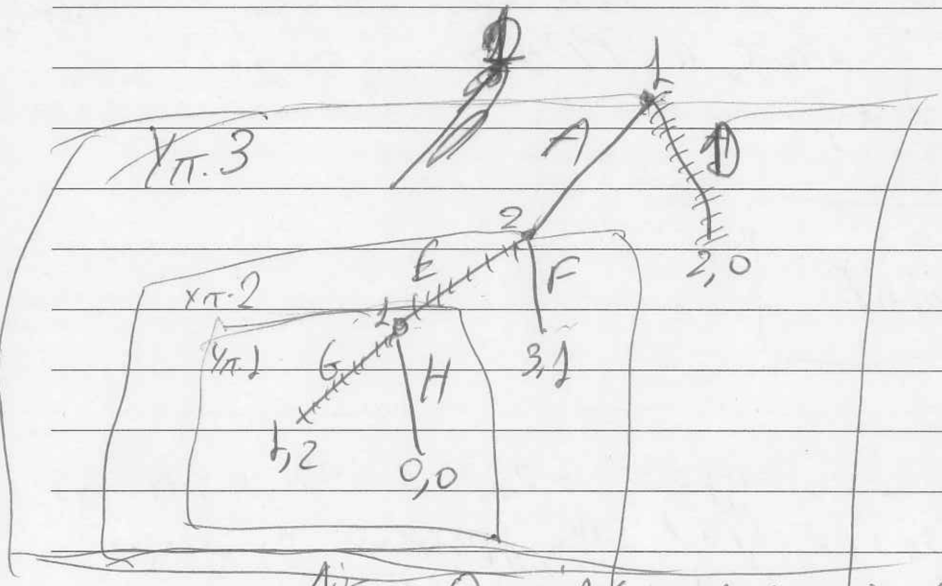
(9) Θεωρία Παιγνίων (18-5-18)

Δίνεται το ακόλουθο δυναμικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή (δένδρο παιγνίου). Να γραφούν οι χώροι στρατηγικής των παικτών 1 κ' 2. Να βρεθεί η SPNE και να υποδειχθεί επάνω στο δένδρο.



Λύση: Ο χώρος στρατηγικής 1, S_1 είναι το ακόλουθο σύνολο: $S_1 = \{(A,G), (A,H), (D,G), (D,H)\}$

Ο χώρος στρατηγικής του παίκτη 2 είναι το δισύνολο $S_2 = \{E, F\}$ (Ο 2 παίζει σε έναν κόμβο απόφασης).

Με δεδομένο ότι το δυναμικό παίγνιο είναι πλήρους πληροφόρησης, τα υποπαίγνια είναι τόσα όσοι και οι κόμβοι απόφασης, δηλ. ∃ 3 υποπαίγνια τα οποία δείχνουμε παρακάτω από το τέλος προς την αρχή.

Υπ.1: Ο 1 παίζει G γιατί $1>0$.
Υπ.2: Ο 2 γνωρίζει ότι ο 1 είναι ορθολογικός. Αν παίξει F τότε η απόδοσή του είναι ίση με 1, ενώ αν παίξει E γνωρίζει ότι στη συνέχεια (Υπ.1) ο 1 θα παίξει G οπότε αυτός (δηλ. ο 2) θα πάρει $2>1$.
Άρα, ο 2 θα παίξει E.

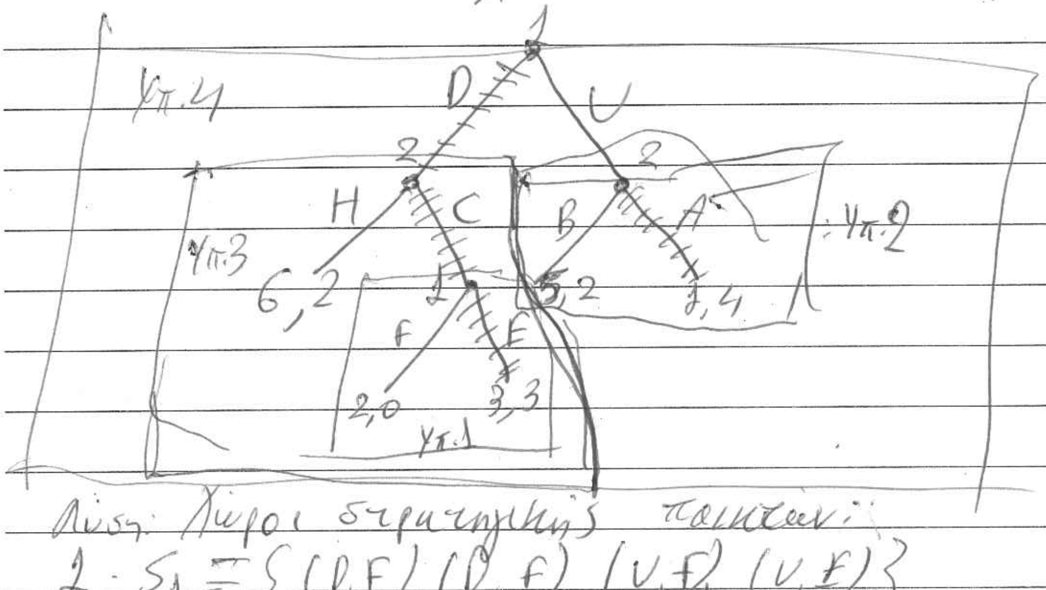
Υπ.3: Αν ο 1 παίξει D θα πάρει 2. Αν παίξει A, τότε στο Υπ.2 ο 2 παίξει Κ μετά ο 1 θα παίξει G παίρνοντας $1<2$. Άρα στο Υπ.3 ο παίκτης 1 θα παίξει D.

Επομένως, η μοναδική στρατηγική για τον 1 η οποία είναι συμβατή με NE σε κάθε υποπαίγνιο είναι η (D, G). Συνεπώς, η SPNE του παιγνίου είναι η {(D, G), E}.

* Ισχύουν: $\boxed{\begin{array}{l} SPNE \Rightarrow NE \\ NE \not\Rightarrow SPNE \end{array}}$

Π.Χ.

Δίνεται το ακόλουθο δυν. παίγνιο πλήρους πληροφόρησης σε εκτεταμένη μορφή (δένδρο): Να γραφούν οι χώροι στρατηγικής των παικτών 1 και 2. Να βρεθεί η SPNE. Να υποδειχθεί επάνω στο δένδρο του παιγνίου.



Λύση: Χώροι στρατηγικής παικτών:

1: $S_1 = \{(D,F), (D,E), (U,F), (U,E)\}$

2: $S_2 = \{(H,B), (H,A), (C,B), (C,A)\}$

(9)

Σημειώνουμε παρακάτω τα υποπαίγνια (σημείωση *)

SPNE (⇔ προς τα πίσω επαγωγή):

Υπ.1: Ο 1 παίζει E (3>2).

Υπ.2: Ο 2 -//- A (4>2).

Υπ.3: Ο 2 αν παίξει H παίρνει απόδοση 2. Αν παίξει C, τότε στο Υπ.1 Ο 1 θα παίξει E, οπότε αυτός (δηλ. ο 2) θα πάρει 3>2.

Άρα στο Υπ.3 ο 2 θα παίξει C.

Υπ.4: Αν ο 1 παίξει D τότε στο Υπ.3 Ο 2 παίζει C κι στη συνέχεια στο Υπ.1 ο 1 παίζει E και παίρνει 3. Αν παίξει U, τότε στο Υπ.2 ο 2 παίζει A και Ο 1 παίρνει 1<3. Άρα η μοναδική στρατηγική για τον 1 η οποία είναι συμβατή με την SPNE είναι η (D,E), ενώ για τον παίκτη 2 η μοναδική στρατηγική η οποία είναι συμβατή με την SPNE είναι η $(C,A) \in S_2$

Συνεπώς, η (μοναδική) SPNE του παιγνίου (δηλ. η μοναδική ισορροπία, η οποία είναι συμβατή με την NE ∀ υποπαίγνιο) είναι η $\{(D,E),(C,A)\}$ την οποία και δείχναμε επάνω στο δένδρο.

Εφαρμογή

2 κανονικό παίγνιο πλήρους πληροφόρησης έχει ως εξής: στο 1ο στάδιο ένας εργοδότης καθορίζει 2 επίπεδα μισθών w_H (υψηλό) και w_L (χαμηλό). Στο 2ο στάδιο, οι εργαζόμενοι πρέπει να επιλέξουν το επίπεδο προσπάθειας e_i, $i \in \{1,2\}$, το οποίο θα καταβάλλουν ώστε να παράγουν προϊόν: $y_i = e_i + \varepsilon_i$, όπου ε_i = θόρυβος με $\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$. Ζητείται να βρεθεί η SPNE του συγκεκριμένου παιγνίου, δηλ. τα e_i και (w_H, w_L).

Ξεκινώντας από το 2ο στάδιο, οι 1 και 2 επιλέγουν το επίπεδο προσπάθειας, το οποίο θα καταβάλλουν λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_{e_i} w_H \cdot P(y_i > y_j) + w_L \cdot P(y_i < y_j) - g(e_i),$$

όπου $g(e_i)$ είναι 1 συνάρτηση η οποία δείχνει τη χρησιμότητα την οποία λαμβάνουν οι 1 και 2 από την προσπάθεια την οποία καταβάλλουν, η οποία είναι "κακό" αγαθό.

Η $g(e_i)$ ικανοποιεί $g'(e_i) > 0$ ($\Rightarrow g$ = γνησίως αύξουσα) και $g''(e_i) > 0$ (g = γνησίως (ή αυστηρά) κυρτή), δηλ. το "disutility" το οποίο παίρνουν οι εργαζόμενοι από την προσπάθεια αυξάνεται ($g' > 0$) με αυξανόμενο ρυθμό ($g'' > 0$) ως προς e.

Το παραπάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης γράφεται ισοδύναμα ($P(y_i < y_j) = 1 - P(y_i > y_j)$)

$$\max_{e_i} w_H \cdot P(y_i > y_j) + w_L \cdot (1 - P(y_i > y_j)) - g(e_i)$$

Ισοδύναμα: $\max_{e_i} (w_H - w_L) P(y_i > y_j) + w_L - g(e_i)$

Βρίσκουμε τη συνθήκη α' τάξης:

$$(w_H - w_L) \frac{\partial P(y_i > y_j)}{\partial e_i} - g'(e_i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w_H - w_L) \frac{\partial P(y_i > y_j)}{\partial e_i} = g'(e_i)$$

Ωστόσο με δεδομένο ότι $y_i = e_i + \varepsilon_i \ \forall i$ (άρα και για $i=j$), τότε: $P(y_i > y_j) = P(e_i + \varepsilon_i > e_j + \varepsilon_j) = P(\varepsilon_i > e_j + \varepsilon_j - e_i)$

Από Θεώρημα (κανόνας του Bayes) ισχύει ότι η παραπάνω πιθανότητα είναι ίση με: $P(\varepsilon_i > e_j + \varepsilon_j - e_i) =$

$$= \int_{\varepsilon_j} P(\varepsilon_i > e_j + \varepsilon_j - e_i \mid \varepsilon_j) f(\varepsilon_j) \, d\varepsilon_j$$

$$(\varepsilon_j \in (-\infty, +\infty))$$

(9)

Ισοδύναμα: $P(\underbrace{\varepsilon_i}_{y_i} > \underbrace{e_j + \varepsilon_j}_{y_j} - e_i) =$

$$= \int_{\varepsilon_j} [1 - P(\varepsilon_i < e_j + \varepsilon_j - e_i \mid \varepsilon_j)] F(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$$

Εξ ορισμού της α.σ.κ.π. συνεπάγεται κι αντίστροφα ότι: $P(\varepsilon_i > e_j + \varepsilon_j - e_i) = \int_{\varepsilon_j} [1 - F(e_j + \varepsilon_j - e_i)] F(\varepsilon_j) d\varepsilon_j$

(Υπενθύμιση: α.σ.κ.π.: $P(X<x) = F(x)$)

Επομένως η συνθήκη α' τάξης: $\frac{\partial P(y_i > y_j)}{\partial e_i} = 0$

~~γράφεται~~ μικρό ($F' = f$) $(w_H - w_L) \frac{\partial P(y_i > y_j)}{\partial e_i} = g'(e_i)$

γράφεται: $(w_H - w_L) \int_{\varepsilon_j} f(e_j + \varepsilon_j - e_i) f(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e_i)$

Σημείωση: Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του Leibniz

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b F(x,\lambda) dx = \int_a^b \frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial \lambda} dx$$

(10) Θεωρία Παιγνίων 25-9-18

(συνέχεια)

Υπόθεση: $e_i = e_j$, δηλαδή η προσπάθεια των 1 και 2 είναι η ίδια, οπότε η ισορροπία Nash λέμε ότι είναι συμμετρική, τότε η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$(w_H - w_L) \int_{\varepsilon_j} f^2(\varepsilon_j) d\varepsilon_j = g'(e)$$

Ωστόσο $\varepsilon_j \sim N(0, \sigma^2)$ συνεπάγεται την πυκνότητα

$$f(\varepsilon_j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon_j^2}{2\sigma^2}}$$

άρα $f^2(\varepsilon_j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\varepsilon_j^2}{\sigma^2}}$ οπότε ζητάμε το

$\int_{\varepsilon_j} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\varepsilon_j^2}{\sigma^2}} d\varepsilon_j$ (το οποίο είναι ίσο με $g'(e)$ σε συμμετρική ισορροπία Nash).

Λέμε το παραπάνω ολοκλήρωμα I και βρίσκουμε το τετράγωνό του:

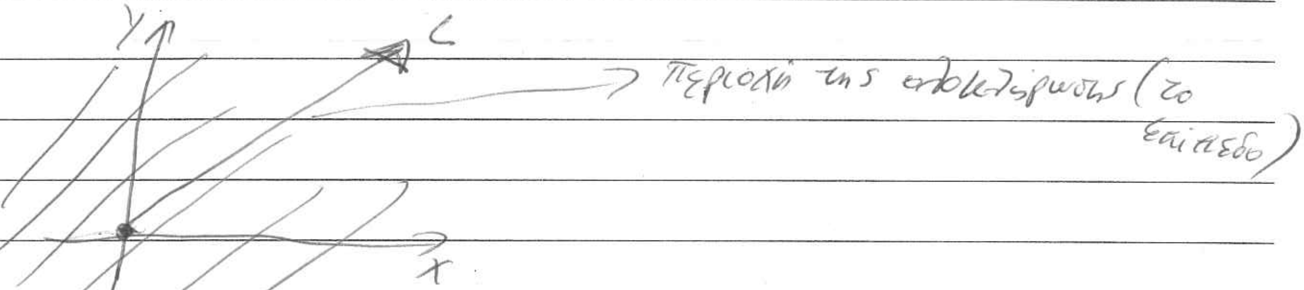
$$I^2 = \left(\int_{\xi_j} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\xi_j^2}{\sigma^2}} d\xi_j\right)\left(\int_{\xi_j} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\xi_j^2}{\sigma^2}} d\xi_j\right)$$

Η μεταβλητή ως προς την οποία ολοκληρώνουμε εν γένει είναι μια ψευδομεταβλητή, δηλ. μπορούμε να της δώσουμε οποιοδήποτε όνομα θέλουμε: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$

Άρα:

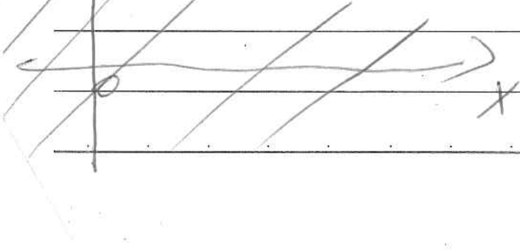
$$I^2 = \frac{1}{4\pi^2\sigma^4}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x^2+y^2)} dA =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sigma^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x^2+y^2)} dx\,dy$$



Θεωρούμε μια ευθεία L από την αρχή των αξόνων στην κατεύθυνση του αυξανόμενου λ. Σημειώνουμε τις λ-τομές στις οποίες η L μπαίνει και βγαίνει από τη δισδιάστατη περιοχή της ολοκλήρωσης (το $\mathbb{R}^2$). Ονομάζοντας $\lambda = r$ έχουμε $r=0$ (είσοδος)
$r=+\infty$ (έξοδος)

Τέλος, βρίσκουμε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη γωνία, έστω θ, η οποία φράσσει την περιοχή της ολοκλήρωσης. Θεωρώντας $0 \le \theta \le 2\pi$. Εν προκειμένω, $\theta=0$ (μικρότερη γωνία), $\theta=2\pi$ (μεγαλύτερη γωνία).



(10) Θ. Παγγίνων $\boxed{25\text{-}5\text{-}18}$

Άρα, $I^2 = \frac{1}{4\pi^2\sigma^4}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} r\,dr\right)d\theta,$

όπου θέτουμε $x := r\cos\theta$, $y := r\sin\theta$ και
$\therefore\ dx\cdot dy = r\,dr\,d\theta$

(Επισήμανση: $\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}\right| =$ (ορίζουσα)

$= \left|\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}\right| = |r\cos^2\theta + r\sin^2\theta| = |r| = r$ (θετική))

Υπολογίζοντας πρώτα το εσωτερικό ολοκλήρωμα (αυτό το οποίο βρίσκεται μέσα στην παρένθεση) βρίσκουμε

$$I^2 = \frac{1}{4\pi^2\sigma^4}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -\frac{\sigma^2}{2}e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\Big|_{r=0}^{r=+\infty} d\theta$$

$$= -\frac{1}{8\pi^2\sigma^2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}(0-1)\,d\theta = \frac{1}{8\pi^2\sigma^2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta = \frac{1}{8\pi^2\sigma^2}\,\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} =$$

$$= \frac{2\pi}{8\pi^2\sigma^2} = \frac{1}{4\pi\sigma^2}$$

Άρα $I^2 = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}$

Σε συμμετρική ισορροπία Nash η πιθανότητα κάθε εργάτης να πάρει w_H ή w_L είναι η ίδια, δηλ. 1/2. Αν u_a είναι η εναλλακτική χρησιμότητα την οποία μπορούν να αποκομίσουν οι 1,2 από άλλη εργασία (δηλ. να μην εργαστούν για το συγκεκριμένο εργοδότη), τότε πρέπει η διαφορά $\frac{1}{2}w_H + \frac{1}{2}w_L - g(e)$ να είναι τουλάχιστον u_a. Στην ισορροπία είναι ακριβώς u_a, δηλ.

$$\frac{1}{2}w_H + \frac{1}{2}w_L - g(e) = u_a$$

Ισοδύναμα $w_L = 2g(e) + 2u_a - w_H$ οπότε το προσδοκώμενο κέρδος του εργοδότη από την προσπάθεια των εργαζομένων με ακριβές

w_H, w_L θα είναι

$$2e - w_H - w_L = 2e - w_H - 2g(e) - 2u_a + w_H =$$

$$= 2e - 2g(e) - 2u_a$$

Ο εργοδότης μεγιστοποιεί τη διαφορά $e - g(e)$ οπότε θέτει $1 - g'(e) = 0$ ή $g'(e) = 1$ οπότε η εξίσωση

$$(w_H - w_L) \int_{\varepsilon_i} f^2(\varepsilon_i)\, d\varepsilon_i = g'(e) \text{ γράφεται}$$

$$(w_H - w_L) \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} = 1 \quad (1)$$

Η λύση της (1), ως προς w_H, w_L μαζί με την Εξ.(2)

$$\frac{1}{2} w_H + \frac{1}{2} w_L - g(e) = u_a$$

δίνουν τα w_H, w_L τα οποία θα επιλέξει στην αρχή (1ο στάδιο) ο εργοδότης.