ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σημειώσεις

ΣΚ

………

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Σημειώσεις

……..

……

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ….

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

Δικαίωμα προαίρεσης: Συμβόλαιο που δίνει δικαίωμα να αγοράσουμε ή να πωλήσουμε ένα αγαθό σε καθορισμένη τιμή, σε συγκεκριμένη τιμή στο μέλλον.

European Call Option

Βασικές Έννοιες

- Υποκείμενο Αγαθό (*underlying*)
- S_t, τιμή του υποκειμένου αγαθού την χρονική στιγμή t
- T, ημερομηνία λήξης (*expiry date*).
- K, τιμή εξάσκησης δικαιώματος (*exercise price* ή *strike price*)
- $V(S_t, t)$, η ανταμοιβή του κατόχου δικαιώματος, την χρονική στιγμή t.
- **Κάτοχος υποκειμένου αγαθού.** Ο κάτοχος έχει υποχρέωση να πουλήσει.
- **Κάτοχος Δικαιώματος.**

ΒΑΣΙΚΗ ΕΡΩΤΗΣΗ: Αν ο κάτοχος δικαιώματος εξασκεί το δικαίωμα, πόσο πρέπει να πληρώσει κάποιος για αυτό το συμβόλαιο; Δηλαδή: $V(S_t, t) = ?$

1.1 Βασικές Σχέσεις

$$\boxed{V(S_T, T) = \begin{cases} S_T - K, & S_T \geq K \\ \\ 0, & S_T \leq K \end{cases} = \max(S_T - K, 0)}$$

$$\boxed{V(S_t, t) = PV(V(S_T, T)) = e^{-rt} V(S_T, T)}$$

Αν η S_T είναι τυχαία μεταβλητή με σπп $f(s)$, τότε:

$$\boxed{V(S_T, T) = E(\max(S_T - K, 0)) = \int_K^{+\infty} (S_T - K) f(s) ds}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$f(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{P(S_i < S < S_i + \Delta s)}{\Delta s} \Rightarrow P(S_i < S < S_i + \Delta s) \approx f(s)\Delta s \Rightarrow$$

$$V(S_T, T) = \sum_{K_i > K} (S_T - K_i) f(s) \Delta S_i = \sum_{K_i > K} (S_T - K_i) P(S_i < S < S_i + \Delta s)$$

1.2 Λυμένες Ασκήσεις

1.1 Αγοράζει κάποιος σήμερα, ένα δικαίωμα να αγοράσει σε 5 μήνες μετοχές για 12 ευρώ. Σήμερα η τιμή της μετοχής είναι 10 ευρώ. Πόσο πρέπει να αγοράσει το δικαίωμα;

Λύση: Έχουμε αρχικά: ημερομηνία λήξης $T = 5$ μήνες, τιμή εξάσκησης $K = 12$ ευρώ και αρχική τιμή $S_0 = 10$ ευρώ. Αν $S_T < 12$ δεν εξασκείται το δικαίωμα, άρα έχουμε κέρδος μηδέν. Αν $S_T > 12$, εξασκούμε το δικαίωμα και το κέρδος είναι $S_T - 12$. Επομένως, τελικά:

$$V(S_5, 5) = \max(S_5 - 12, 0)$$

Δηλαδή, όλα εξαρτώνται από την τιμή S_5, η οποία μεταβάλεται τυχαία.

1.2 Έστω ένα δικαίωμα πώλησης 100 **μετοχών της** IBM **με τιμή εξάσκησης** 90 **χρ. μονάδες ανά μετοχή, το οποίο λήγει σε** 3 **μήνες. Αν σε** 3 **μήνες η τιμή της μετοχής θα είναι** 75 **χρ. μονάδες και η τιμή αγοράς του δικαιώματος τώρα είναι** 7 **χρ. μονάδες ανά μετοχή, πόσα θα κερδίσουμε εξασκώντας το δικαίωμα**;

Λύση: Ακολουθυούμε τα εξής βήματα:

1. Αγοράζουμε τώρα το δικαίωμα. Κόστος αγοράς $= 100 \cdot 7 = 700$.
2. Σε 3 μήνες αγοράζουμε από την αγορά 100 μετοχές IBM. Κόστος αγοράς$=$ $100 \cdot 75 = 7500$.
3. Πουλάμε τις μετοχές που αγοράσαμε στην τιμή εξάσκησης, κάνοντας χρήση του δικαιώματος. Έσοδα$=$ $100 \cdot 90 = 9000$

Οπότε το συνολικό κέρδος είναι:

$$P = 9000 - 7500 - 700 = 800$$

1.3 Μία μετοχή της εταιρείας ΑΒΓ τιμάται. σήμερα 17 **χρ. μονάδες. Σε** 4 **μήνες θα τιμάται** 22 **χρ. μονάδες. Ένα δικαίωμα αγοράς πωλείται για** 2 **χμ και έχει τιμή εξάσκησης** 18 **χμ. Τι συμφέρει, μία αγοροπωλησία των μετοχών ή η εξάσκηση του δικαιώματος**;

Λύση: Στην αγοροπωλησία έχουμε αγορά μετοχής 17 και πώληση 22 και επομένως κέρδος $22 - 17 = 5$. Το ποσοστό κέρδους είναι: $(5/17) \cdot 100 \simeq 30\%$.

Στην περίπτωση ενάσκησηστου δικαιώματος θα αγοράσουμε από τον υπόχρεο σε 18 χμ και θα πωλήσουμε σε 22 χμ. Επομένως το κέρδος θα είναι $22 - 18 - 2 = 2$ χμ. Το ποσοστό κέρδους σε αυτή την περίπτωση, είναι: $(2/2) \cdot 100 = 100\%$. Άρα τα δικαιώματα δίνουν τεράστιο κερδος και δεν απαιτούν την κατοχή περουσιακών στοιχείων.

Κεφάλαιο 2

Αρχικά Υποδείγματα

2.1 Βασικό υπόδειγμα

Έστω S_i μία ακολουθία τιμών μίας μετοχής τις χρονικές στιγμές $i = 1, 2, 3, ...$ Οι ποσότητες:

$$R_{i+1} = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}$$

λέγονται αποδόσεις. Συνήθως ακολουθούν την κανονική κατανομή, δηλαδή $R_{i+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Επομένως

$$\frac{R_{i+1} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \Leftrightarrow \frac{R_{i+1} - \mu}{\sigma} = \varphi, \quad \varphi \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$R_{i+1} = \mu + \sigma \cdot \varphi, \quad \varphi \sim N(0,1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{S_{i+1} = (\mu + 1)S_i + \sigma S_i \varphi}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί το πρωταρχικό βασικό υπόδειγμα σε διακριτό χρόνο και υλοποιείται με μεθόδους $Monte - Carlo$.

2.2 Το Διωνυμικό Υπόδειγμα

Θεωρούμε διακριτό χρόνο $t = 0, 1, 2, 3, ...$ Την χρονική στιγμή $t = 0$ η τιμή μιας μετοχής είναι S_0. Σε κάθε χρονική στιγμή η τιμή της μετοχής είτε αυξάνει κατα $a\%$ με πιθανότητα p είτε φθίνει κατά $b\%$, με πιθανότητα $(1-p)$. Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε την εξέλιξη της τιμής μιάς μετοχής, μέχρι τηνχρονική στιγμή $t = 2$.

$$S_0 = \left[\begin{array}{llll} (p) & \to S_1 = aS_0 & \to & \left[\begin{array}{ll} (p^2) & \to S_2 = a^2 S_0 \\ p(1-p) & \to S_2 = abS_0 \end{array} \right. \\ & & & \\ (1-p) & \to S_1 = bS_0 & \to & \left[\begin{array}{ll} (p(1-p)) & \to S_2 = abS_0 \\ (1-p)^2 & \to S_2 = b^2 S_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Η αύξηση της τιμής της μετοχής, συνήθως συμβολίζεται ως 1, ενώ η μείωση ως 0. Μία ακολουθία από k το πλήθος 1 και 0 ονομάζεται **δρόμος** μήκους k και σημαίνει μία διαδοχή από k αυξήσεις- μειώσεις. Συμβολίζεται με s_k. Παραδείγματος χάριν, $s_6 = 000010$ σημαίνει ότι έχουμε 6 ¨κινήσεις¨, 4 διαδοχικές μειώσεις, μία αύξηση και μία ακόμα μείωση. $s_5 = 11010$, σημαίνει ότι έχουμε 5 ¨κινήσεις¨ της μετοχής, 2 αυξήσεις, μία μείωση, μία αύξηση και μία μείωση.

Βασικοί Συμβολισμοί. $S_k(s_k)$ είναι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή k, μέσω του δρόμου s_k.

$V_k(s_k)$ είναι η αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή k, μέσω του δρόμου s_k.

Παραδείγματα.

$S_2(01) = abS_0$, η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή 2, μέσω του δρόμου 01, δηλαδή μετά από μία μείωση και διαδοχική αύξηση.

$S_2(11) = a^2S_0$, η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή 2, μέσω του δρόμου 11, δηλαδή μετά από δύο διαδοχικές αυξήσεις.

$S_1(0) = bS_0$, η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή 1, μέσω του δρόμου 0, δηλαδή μετά από μία μείωση.

$V_1(0)$, η αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή 1, μέσω του δρόμου 0, δηλαδή μετά από μία μείωση.

2.3 Τιμολόγηση $Call\ Option$ την χρονική στιγμή 1

Έστω δικαίωμα με υποκείμενη τιμή μετοχής S_t και τιμή εξάσκησης δικαιώματος: K. Έστω V_0 η τιμή του δικαιώματος την χρονική στιγμή $t = 0$.

Ερώτηση: Πως ορίζεται το V_0 με δίκαιο τρόπο;

Απάντηση: Διαλέγουμε το V_0 έτσι ώστε, εάν τα χρήματα αυτά τα τοποθετούσαμε σε επενδύσεις λιγώτερου κινδύνου, να είχαμε την ίδια απόδοση.

Έστω ότι αγοράζουμε Δ_0 το πλήθος μετοχές. Εάν $V_0 - \Delta_0 S_0 > 0$, τότε θεωρούμε ότι τοκίζουμε αυτή την ποσότητα (του περισσεύματος των χρημάτων) για μία χρονική περίοδο καιπαίρνουμε τελικά: $(1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$, r το επιτόκιο τοκισμού.

Εάν $V_0 - \Delta_0 S_0 < 0$, τότε θεωρούμε ότι δανειζόμαστε τα χρήματα που χρειαζόμαστε για μία χρονική περίοδο και έχουμε τελικά: $(1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0) < 0$, r το επιτόκιο δανεισμού.

τελικά, το χαρτοφυλάκιο σε 1 χρόμο θα έχει μέση απόδοση:

$$\Delta_0 S_1(1) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0) = \Delta_0 a S_0 + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

ή

$$\Delta_0 S_1(0) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0) = \Delta_0 b S_0 + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

Οι ποσότητες αυτές πρέπει να είναι ίσες με τις αξίες του δικαιώματος την χρονική στιγμή 1. Δηλαδή τις $V_1(1)$, $V_1(0)$. Άρα, έχουμε:

$$V_1(1) = \Delta_0 a S_0 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

ή

$$V_1(0) = \Delta_0 b S_0 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0)$$

Επιλύοντας αυτές τις εξισώσεις, ως προς V_0 και Δ_0 και λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$V_1(1) = \max(S_1(1) - K, 0) = (aS_0 - K)^+$$

$$V_1(0) = \max(S_1(0) - K, 0) = (bS_0 - K)^+$$

έχουμε τελικά:

$$\boxed{\Delta_0 = \frac{(aS_0 - K)^+ - (bS_0 - K)^+}{(a-b)S_0}}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{r+1}\left[\frac{(1+r)-b}{a-b}(aS_0 - K)^+ + \frac{a-(1+r)}{a-b}(bS_0 - K)^+\right]}$$

Οι συντελεστές έχουν άθροισμα 1, είναι δηλαδή σαν πιθανότητες.

Κεφάλαιο 3

Τυχαίοι Περίπατοι - $Random\ Walks$

3.1 Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε ένα σημείο, το οποίο κινείται προς τα επάνω με βήμα $h > 0$ και πιθανότητα p και προς τα κάτω με βήμα $-h$ και με πιθανότητα $1 - p$. Αρχικά θέτουμε $h = +1$, $p = 1/2$. Το όλο φαινόμενο λέγεται **συμμετρικός τυχαίος περίπατος** και για να μελετηθεί ορίζουμε τα εξής:

- t, είναι η χρονική στιγμή, λέγεται και **εποχή**
- $t_2 - t_1$, είναι η διάρκεια ή ο χρόνος
- X_t, είναι μια <u>τυχαία μεταβλητή</u>, η οποία δηλώνει την **απόφαση** ή την δράση την χρονική στιγμή t, το εάν δηλαδή το σημείο θα κινηθεί κατά h ή κατά $-h$.
- S_t, είναι μία <u>τυχαία μεταβλητή</u> την **θέση** του σημείου την χρονική στιγμή t.
- $\{(t, S_t)\}$, είναι το μονοπάτι $(path)$ ή τροχιά την χρονική στιγμή t.

3.2 Ιδιότητες της X_t

- $X_t = \begin{cases} +1, & p = 1/2 \\ -1, & p = 1/2 \end{cases}$
- $E(X_t) = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + (-1) \cdot \dfrac{1}{2} = 0$
- $V(X_t) = E(X_t^2) - E^2(X_t) = 1^2 \cdot \dfrac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \dfrac{1}{2} - 0 = 1$
- X_t είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για τις διάφορες χρονικές στιγμές.

3.3 Ιδιότητες της S_t

- $S_t = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_t$
- $E(S_t) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_t) = 0$
- $V(S_t) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \cdots + V(X_t) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{t-times} = t$
- S_t είναι $martingale$:
$$\boxed{E(S_{t+p}|S_t) = S_t}$$
- S_t έχει την ιδιότητα $Markov$, δηλαδή:
$$\boxed{P(S_{t+p}|S_t = k_t, S_{t-1} = k_{t-1}, \ldots, S_1 = k_1) = P[S_{t+p}|S_t = k_t]}$$
- $S_t = X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{n+t}$ είναι επίσης τυχαίος περίπατος.
-
$$\boxed{\frac{S_t}{\sqrt{t}} \sim N(0,1) \text{ όταν } t \to +\infty}$$

3.4 Περαιτέρω Ορισμοί

Κάποιοι σημαντικοί ορισμοί, των οποίων κρίνεται απαραίτητη η γνώση τους για την κατανόηση των συμετρικών τυχαίων περιπάτων, είναι οι κάτωθι:

Ορισμός 3.1 *Το σύνολο $\{t, s_t\}$, όπου $s_t = S_t$, οι διάφορες ¨θέσεις¨ του σημείου, $t = 0, \ldots, k$, καλείται ¨**μονοπάτι**¨, από 0 έως k.*

Ορισμός 3.2 *Ένα μονοπάτι **επισκέπτεται** την θέση k την εποχή t, εάν ισχύει η ισότητα $s_t = k$.*

Ορισμός 3.3 *Αν για μια θέση (t, k), υπάρχει κάποιο μονοπάτι που την επισκέπτεται, τότε η συγκεκριμένη θέση καλείται ¨**προσιτή θέση**¨.*

Ορισμός 3.4 *Αν $(t_0, k_0), (t_1, k_1)$ ανήκουν στο ίδιο μονοπάτι, τότε η θέση (t_1, k_1) λέγεται **προσιτή από την** (t_0, k_0), όταν $t_1 > t_0$.*

Ορισμός 3.5 *Ως $N_{t,k}$ ορίζεται το **πλήθος των μονοπατιών**, τα οποία επισκέπτονται την θέση (t, k).*

Ορισμός 3.6 *Ένας τυχαίος περίπατος ή ένα μονοπάτι **επιστρέφει στην θέση** 0 **την εποχή** t, εάν ισχύει ότι $S_t = 0$ ή $0 \in S_t$.*

Ορισμός 3.7 *Ένας τυχαίος περίπατος **επιστρέφει στην θέση** 0 **για <u>πρώτη φορά</u> την εποχή** t**,** όταν $S_1, S_2, \ldots S_{t-1} \neq 0$ και $S_t = 0$.*

Ορισμός 3.8 *Με u_{2m} συμβολίζουμε την πιθανότητα να επιστρέψει το σημείο στο 0, την χρονική στιγμή $2m$.*

Ορισμός 3.9 *Με f_{2m} συμβολίζουμε την πιθανότητα να επιστρέψει το σημείο <u>για πρώτη φορά</u> στο 0, την χρονική στιγμή $2m$.*

3.4.1 Ιδιότητες Τυχαίων Περιπάτων

Ιδιότητα 3.1 *Προκειμένου ένα ζεύγος (t, k) να είναι προσιτό, πρέπει να υπάρχουν ακέραιοι ϕ και θ έτσι ώστε:*

$$t + k = 2\phi \text{ και } t - k = 2\theta$$

Συνεπώς, οι αριθμοί $t + k$ και $t - k$ να είναι άρτιοι.

Ιδιότητα 3.2 *Ισχύει η σχέση:*

$$N_{t,k} = \binom{t}{\frac{t+k}{2}} = \binom{t}{\frac{t-k}{2}} \text{ όπου } t + k > 0 \text{ και } t - k > 0$$

Ιδιότητα 3.3 *Ισχύει η σχέση:*

$$u_{2m} = \frac{N_{2m,0}}{2^{2m}} = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \geq 0$$

Ιδιότητα 3.4 *Ισχύει η σχέση:*

$$f_{2m} = u_{2m-2} - u_{2m} = \frac{1}{2m-1}\binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} = \frac{u_{2m}}{2m-1}, \quad m \geq 0$$

Ιδιότητα 3.5 *Οι παρακάτω πιθανότητες είναι ίσες.*

- $P(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2m} \neq 0)$
- $P(S_1 \geq 0, \ldots, S_{2m} \geq 0)$
- $P(S_1 \leq 0, \ldots, S_{2m} \leq 0)$
- $2P(S_1 > 0, \ldots, S_{2m} > 0)$
- $2P(S_1 < 0, \ldots, S_{2m} < 0)$

Θεώρημα 3.1 *Με πιθανότητα 1, ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος επιστρέφει στο 0.*

Θεώρημα 3.2 *Με πιθανότητα 1, ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος επιστρέφει στο 0, απείρως συχνά.*

3.5 Ασκήσεις

3.1 Εάν S_t συμμετρικός τυχαίος περίπατος, να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

1. $\boldsymbol{P\Big(-\sqrt{t} \leq S_t \leq \sqrt{t}\Big)}$

2. $\boldsymbol{P\Big(10 \leq S_{100} \leq 15\Big)}$

Λύση:

1. Διαιρούμε με την ρίζα του t και θα έχουμε ότι,

$$P\Big(-\sqrt{t} \leq S_t \leq \sqrt{t}\Big) = P\Big(-1 \leq \frac{S_t}{\sqrt{t}} \leq 1\Big) = P\Big(-1 \leq \frac{S_1}{\sqrt{1}} \leq 1\Big)$$
$$= P(-1 \leq z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,6827$$

2. Διαιρούμε με την ρίζα του 100 και θα έχουμε ότι,

$$P(10 < S_{100} < 15) = P\Big(\frac{10}{\sqrt{100}} < \frac{S_{100}}{\sqrt{100}} < \frac{15}{\sqrt{100}}\Big) = P(1 < z < 1,5)$$
$$= \Phi(1,5) - \Phi(1) = 0,9332 - 0,8413 = 0,0919$$

3.2 Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ο τυχαίος περίπατος επιστρέφει στο 0.

Λύση:

$$P(\textit{κάποτε επιστρέφει στο 0}) = P\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} \textit{πρώτη επιστροφή την στιγμή } 2m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} [u_{2m-2} - u_{2m}] = u_0 = 1$$

3.3 Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1, ο τυχαίος περίπατος επιστρέφει στο 0, απείρως συχνά, δεδομένου ότι $u \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi m}}$.

Λύση:

$$E[(\textit{πρώτη επιστροφή 0 })] = \sum_{m=1}^{0} 2m f_{2m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{2m-1} u_{2m} \quad (1)$$

, αλλά δεδομένου ότι:

$$\frac{2m}{2m-1} u_{2m} = \frac{2m}{2m-1} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$$

,καθώς και από την χρήση των σειρών και συγκεκριμένα της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων καταλήγουμε στο ζητούμενο του παραδείγματος,

$$(1) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} 2m f_{2m} = \infty$$

3.4 Έστω δύο παίκτες A και B, παίζουν το παιχνίδι κορώνα ή γράμματα με κέρδος ± 1. Ο πρώτος παίκτης A έχει τρία ευρώ στο πορτοφόλι του και ο δεύτερος παίκτης B έχει έξι ευρώ στο πορτοφόλι του. Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος παίκτης να κερδίσει στον δέκατο γύρο του παιχνιδιού;

Λύση: Δηλώνουμε ότι η απόφαση, που αντιπροσωπεύει το κέρδος του πρώτου παίκτη A

$$X_t = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Ο τύπος που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το κέρδος είναι:

$$P_p = \frac{\binom{t}{\frac{t+k}{2}}}{2^t} = \frac{\binom{10}{\frac{10+6}{2}}}{2^{10}} = \frac{\frac{10!}{8!(10-8)!}}{2^{10}} = \frac{\frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10}{1*2*3*4*5*6*7*8*1*2}}{2^{10}} \Rightarrow$$

$$P_p = \frac{9*10}{2^{11}} \simeq 0$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι στο βρισκόμαστε σημείο $(0,3)$ και θέλουμε να μετακινηθούμε στο σημείο $(10,9)$, που είναι η θέση του πρώτου παίκτη. Επιπροσθέτως, λόγω της συμμετρίας είμαστε στο σημείο $(0,0)$ και θέλουμε να μετακινηθούμε στο σημείο $(10,6)$, που είναι η θέση του δεύτερου παίκτη.

3.5 Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ενός τυχαίου περιπάτου.

Λύση: Είναι γνωστό ότι εάν γνωρίζει την ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής X_1, τότε το άθροισμα είναι το γινόμενο των ροπογεννητριών.

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_t = M_{S_t}(\theta) \Rightarrow M_{X_1}(\theta) * \cdots * M_{X_t}(\theta)$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι,

$$M_{X_1}(\theta) = E\left[e^{\theta X_1}\right] = e^{\theta 1}\frac{1}{2} + e^{\theta(-1)}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})$$

Ως αποτέλεσμα των δύο προηγούμενων εξισώσεων εξάγουμε τον τελικό τύπο, ο οποίος αναπαριστά την πιθανογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου περιπάτου,

$$M_{S_t} = \left[\frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}\right]^t$$

Τέλος, εάν θέλουμε να βρούμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση πρέπει να αντικαταστήσουμε την μεταβλητή θ με $\ln\theta$ και θα έχουμε ότι,

$$P_{S_t} = M_{S_t}(\ln\theta) = \left[\frac{1}{2}(\theta + \theta^{-1})\right]^t$$

3.6 Έστω X_i είναι η απόφαση ενός τυχαίου περιπάτου και $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Να δείξετε ότι η $S_n^2 - n$ είναι *martingale*.

Λύση:

$$E\Big[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\Big] = E\Big[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\Big]$$

$$= E\Big[S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\Big]$$

$$= E\Big[S_n^2|\mathcal{F}_n\Big] + E[2S_nX_{n+1}|\mathcal{F}_n] + E\Big[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\Big] - (n+1)$$

$$= S_n^2 + 2S_nE[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + 1^2\frac{1}{2} + (-1)^2\frac{1}{2} - (n+1)$$

$$= S_n^2 + 2S_n * 0 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n$$

3.7 Έστω το ζεύγος (n,k) είναι προσιτό. Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη επίσκεψη στο k να συμβεί την εποχή $t = n$·

Λύση:

$$P(\textit{πρώτης επίσκεψης στο } k \textit{ την εποχή } n) = \frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n-k}{2}}\frac{1}{2^n}$$

3.8 Δύο παίκτες Α και Β παίζουν το παιχνίδι κορρόνα ή γράμματα με ένα δίκαιο κέρμα με κέρδος - ζημία$= \pm 1$. Ο Α έχει 3 ευρώ και ο Β έχει 6 ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης Α στην 10η ρίψη;

Λύση: Είναι κατανοητό ότι η άσκηση αναφέρεται σε έναν τυχαίο περίπατο της μορφής,

$$X_t = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Θέλουμε ξεκινώντας από το σημείο $(0,3)$ να πιάσουμε το σημείο $(10,9)$, που συνεπάγεται ότι ξεκινώντας από το σημείο εκκίνησης $(0,0)$, να πιάσουμε το σημείο $(10,6)$.

$$P[\textit{πιάνει το σημείο (10,6)}] = \frac{\textit{πατης φρομ (10,6)}}{\textit{τοταλ νυμβερ οφ πατης}} = \frac{N_{10,6}}{2^{10}} = \frac{\binom{10}{\frac{10-6}{2}}}{2^{10}} = \frac{\binom{10}{2}}{2^{10}}$$

$$\frac{10!}{2!8!2^{10}} = \frac{90}{2^{11}} \simeq 0$$

3.6 Ασκήσεις για λύση

3.9 Να υπολογιστεί η πιθανότητα του φαινομένου της καταστροφής του τζογαδόρου ή $gambler's ruin$ **εάν ο τυχαίος περίπατος δεν είναι συμμετρικός, δηλαδή εάν** $P(Y_j = 1) = p$ **και** $P(Y_j) = -1) = 1 - p$ **για** $0 < p < 1, p \neq 1/2$**. Για την δική σας βοήθεια ψάξτε για ένα** $martingale$ **που θα είναι της μορφής** $Z_n = r^{X_n}$**.**

3.10 Να δείξετε ότι με πιθανότητα ίση με την μονάδα, ο απλό συμμετρικός τυχαίος περίπατος περνάει από όλους τους ακεραίους απείρως συχνά.

3.11 Να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα απλό συμμετρικού τυχαίου περιπάτου με βήμα $\pm h$ **και πιθανότητα** p **και** $1 - p$**, και να το ερμηνεύσετε.**

3.12 Δίνεται ένας απλός τυχαίος περίπατος Ποια είναι η πιθανότητα $10 < S_{100} < 15$**;**

3.13 Δεδομένου ενός τυχαίου περιπάτου της μορφής,

$$X_t = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Ποια είναι η πιθανότητα το σημείο (n, k) **να είναι προσιτό;**

3.14 Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία έχει αρχικό κεφάλαιο X_0**, σε κάθε ¨εποχή¨ λαμβάνει** $Y_1, Y_2, \ldots$ **και πληρώνει** $W_1, W_2, \ldots$**. Να βρείτε ποθα είναι η πιθανότητα να πάψει την λειτουργία της η εταιρεία.**

Κεφάλαιο 4

Κίνηση *Brown*

Η βασική ιδέα της κίνησης *Brown* είναι:

> Η κίνηση *Brown* δεν είναι παρά ένας συμμετρικός τυχαίος περίπατος με ¨ απειροστό ¨ βήμα, που υλοποιείται σε ¨απειροστές¨ χρονικές στιγμές.

Η κίνηση *Brown* είναι το δομικό στοιχείο, ο θεμέλιος λίθος της στοχαστικότητος.

4.1 Κατασκευή κίνησης *Brown*

Η κίνηση *Brown* ορίζεται ¨κατασκευαστικά¨, ακολουθώντας τα εξής βήματα:

- Έστω $[0, T]$ μία χρονική περίοδος.
- Την χωρίζουμε σε n διαστήματα μήκους: $\boxed{\Delta t = \frac{T}{n}}$.
- Ισχύει η σχέση: $\boxed{t_k = k\Delta t}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.
- Ορίζουμε τον συμμετρικό τυχαίο περίπατο:

$$X_k = \begin{cases} y, & p = 1/2 \\ -y, & p = 1/2 \end{cases} \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

- Για την απόφαση X_k, ισχύει:

$$E\left[x_k\right] = y \cdot \frac{1}{2} + (-y) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$Var\left[X_k\right] = E\left[X_k^2\right] - E^2\left[X_k\right] = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(-y)^2 - 0 = y^2$$

- Για την μέση τιμή της θέσης S_n, ισχύει:

$$E\left[S_n\right] = E\left[X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] = n \cdot 0 = 0$$

- Για την διακύμανση της θέσης S_n, ισχύει:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left[S_n\right] = \mathrm{Var}\left[X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right] = \\
&= Var\left[X_1\right] + \mathrm{Var}\left[X_2\right] + \cdots + \mathrm{Var}\left[X_n\right] = ny^2 = \\
&= \frac{T}{\Delta t} y^2 = \boxed{T\frac{y^2}{\Delta t}}
\end{aligned}$$

- Θέλουμε να ορίσουμε το y έτσι ώστε η παραπάνω ποσότητα να έχει νόημα όταν $\Delta t \to 0$. Ένας τρόπος να το πετύχουμε είναι με $y = \sqrt{\Delta t}$.

Ορισμός 4.1 *Έστω ένα διάστημα $[0, T]$, διαμοιρασμένο σε n υποδιαστήματα, μήκους Δt. Ονομάζουμε κίνηση $Brown$ στο διάστημα $[0, T]$, έναν συμμετρικό τυχαίο περίπατο, με τυχαία μεταβλητή απόφασης:*

$$X_k = \begin{cases} \sqrt{\Delta t} & , \ p = 1/2 \\ -\sqrt{\Delta t} & , \ p = 1/2 \end{cases} \quad , \quad k = 0, 1, 2, ..., n$$

με $\Delta t = T/n \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$.

Ιδιότητα 4.1 *Σε μία κίνηση $Brown$, ισχύουν οι σχέσεις: $E[S_T] = 0$, $Var[S_T] = T$.*

4.2 Κατανομή κίνησης $Brown$

Για να βρούμε την κατανομή της κίνησης $Brown$ θα χρησιμοποιήσουμε ροπογεννήτριες. Θα υπολογίσουμε την ροπογεννήτρια της θέσης S_n, την $M_{S_n}(\theta)$ και θα πάρουμε το όριο της όταν $\Delta t \to 0$. Αυτή θα είναι η ροπογεννήτρια $M(\theta)$ της κίνησης $Brown$ την χρονική στιγμή T.
Διαδοχικά έχουμε:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow M_{S_n}(\theta) = M_{X_1}(\theta) \cdot M_{X_2}(\theta) \cdots M_{X_n}(\theta) = \left[M_{X_k}(\theta)\right]^n$$

αφού όλες οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$, έχουν την ίδια κατανομή. Αλλά,

$$M_{X_k}(\theta) = E\left[e^{\theta X_k}\right] = \frac{1}{2} e^{\theta\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2} e^{-\theta\sqrt{\Delta t}}$$

Από το θεώρημα $Taylor$ γνωρίζουμε ότι:

$$e^w = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \cdots$$

οπότε

$$e^{\theta\sqrt{\Delta t}} = 1 + \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{1!} + \frac{(\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2!} + \cdots = 1 + \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{1!} + \frac{(\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2!}$$

$$e^{-\theta\sqrt{\Delta t}} = 1 + \frac{-\theta\sqrt{\Delta t}}{1!} + \frac{(-\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2!} + \cdots = 1 - \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{1!} + \frac{(\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2!}$$

επειδή παραλείψαμε τους παραπάνω όρους, λόγω του ότι $\Delta t \to 0$. Αντικαθιστώντας, έχουμε για την ροπογεννήτρια:

$$M_{X_k}(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{1!} + \frac{(\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2!}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \theta\sqrt{\Delta t} + \frac{(\theta\sqrt{\Delta t})^2}{2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \theta\frac{\sqrt{\Delta t}}{2} + \frac{\theta^2\Delta t}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\theta\sqrt{\Delta t}}{2} + \frac{\theta^2\Delta t}{4} = 1 + \frac{1}{2}\theta^2\Delta t \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\quad M_{S_n}(\theta) = \left(1 + \frac{1}{2}\theta^2\Delta t\right)^n}$$

Καθώς $n \to +\infty$, η κατανομή του S_n συγκλίνει στην κατανομή που ορίζεται από το όριο της ροπογεννήτριας. Για να το υπολογίσουμε εργαζόμαστε ως εξής:

$$M_{S_n}(\theta) = \left(1 + \frac{1}{2}\theta^2\Delta t\right)^n \Rightarrow \ln M_{S_n}(\theta) = n\ln\left(1 + \frac{1}{2}\theta^2\Delta t\right)$$

Γνωρίζουμε ότι όταν $y \to 0$, τότε $\ln(1+y) \approx y$, επομένως, επειδή $\Delta t \to 0$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \ln M(\theta) &= n\frac{1}{2}\theta^2\Delta t \\ T &= n\Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ln M(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta^2 T}}$$

Αυτή είναι η ροπογεννήτρια της κίνησης $Brown$και είναι και η ροπογεννήτρια μίας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά T, άρα τελικά:

$$\boxed{B(T) \sim N(0,T)}$$

για κάθε χρονική στιγμή T.

Κεφάλαιο 5

Ορισμός Κίνησης $Brown$

Έστωσαν οι άπειρες τυχαίες μεταβλητές $B(t)$, $t \geq 0$. Αυτές αποτελούν μία συνεχή α-νέλιξη. Η συνεχής ανέλιξη $B(t)$, λέγεται **τυπική κίνηση** $Brown$ ή **ανέλιξη** $Wiener$, εάν πληροί τις κάτωθι ιδιότητες:

1. $B(0) = 0$

2. $B(t)$ συνεχής, για κάθε $t \geq 0$.

3. Έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** (*independent indreaments*). Δηλαδή, για οποιεσδήποτε n χρονικές στιγμές: $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές:

   $$B(t_2) - B(t_1), \quad B(t_3) - B(t_2), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

   είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

4. Έχει **σταθμισμένες προσαυξήσεις** (*stationary increments*). Δηλαδή, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής: $B(t+h) - B(t)$, $t \geq 0, h > 0$, εξαρτάται μόνο από το h και όχι από το t. Ισοδύναμα, αν $0 < t < s$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές: $B(s) - B(t)$, $B(s-t)$, έχουν τις ίδιες κατανομές ή επίσης ισοδύναμα, η τυχαία μεταβλητή $B(s) - B(t)$, δεν εξαρτάται από τον χρόνο.

5. $$\begin{gathered} B(t) \sim N(0,t) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B(t+\Delta t) - B(t) \sim N(0, \Delta t), \quad t \geq 0, \Delta t > 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B(t_2) - B(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 < t_2 \end{gathered}$$

5.1 Ιδιότητες

Ιδιότητα 5.1 *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει η σχέση:*

$$P[B(t) \leq a] = \int_{-\infty}^{\frac{a}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dt = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}}\right)$$

όπου $\Phi(.)$ η αθροιστική συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Ιδιότητα 5.2 *Η ροπογεννήτρια της κίνησης Brown είναι:*

$$\boxed{M_{B(t)}(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta t}}$$

Ιδιότητα 5.3 *Η συνδιακύμανση της κίνησης Brown είναι:*

$$\boxed{Cov[B(s), B(t)] = \min(s,t) \quad , \quad t, s \in \mathbb{R}}$$

Ιδιότητα 5.4 *Η αυτοσυσχέτιση (correlation) της κίνησης Brown είναι:*

$$\boxed{\mathrm{Corr}\,(B(s), B(t)) = \frac{\mathrm{Cov}\,(B(s), B(t))}{\sigma_{B(s)}\sigma_{B(t)}} = \frac{s}{\sqrt{st}} = \sqrt{\frac{s}{t}}, \quad s < t}$$

Ιδιότητα 5.5 *Η κίνηση Brown δεν είναι πουθενά διαφορίσιμη.*

Ιδιότητα 5.6 *Ισχύουν οι σχέσεις:*

$$E[B^2(t)] = t \quad \Leftrightarrow \quad E[\Delta B^2(t)] = \Delta t$$

5.2 Λυμένες Ασκήσεις

5.1 Έστω ότι η $B(t)$ είναι κίνηση *Brown*. Υπολογίσατε την πιθανότητα: $P(1 < B(1) < 2)$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή: $B(1)$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή: $\mathcal{N}(0,1)$. Άρα,

$$P(1 < B(1) < 2) = P\left(\frac{1-0}{1} < \frac{B(1)-0}{1} < \frac{2-0}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.136$$

5.2 Έστω ότι η $B(t)$ είναι κίνηση *Brown*. Υπολογίσατε την πιθανότητα:

$$P[B(2) < 3 | B(1) = 1]$$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $B(2)$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{N}(0,2)$. Επίσης,

$$B(2) = 1 \Rightarrow B(2) \mid B(1) = 1 = 1 + [B(2) - 1]$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή $Z = B(2)|B(1) = 1$, θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή:

$$E(Z) = E[1+[B(2)-1]] = E[1+[B(2)-B(1)]] = 1+E[B(2-1)] = 1+E[B(1)] = 1+0 = 1$$

και διασπορά:

$$V(Z) = V(1 + [B(2) - 1]) = V(B(2) - B(1)) = V(B(2-1)) = V(B(1)) = 1$$

Άρα, τελικά $Z \sim \mathcal{N}(1,1)$ και επομένως,

$$P[Z < 3] = P\left[\frac{Z-1}{1} < \frac{3-1}{1}\right] = P[Z < 2] = \Phi(2) = 0.98$$

5.3 Έστω $B(t)$ μία τυπική κίνηση $Brown$. Βρείτε την πιθανότητα:

$$P[B(1)+B(2)>2]$$

Λύση: Παρατηρούμε καταρχάς ότι τα χρονικά διαστήματα $[0,1]$ και $[0,2]$ αλληλοεπικαλύπτονται,άρα οι τυχαίες μεταβλητές $B(1)$ και $B(2)$ δεν είναι ανεξάρτητες. Πρέπει να ορίσουμε την κατανομή που ακολουθεί το άθροισμα: $B(1)+B(2)$. Ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή:

$$E[B(1)+B(2)]=E[B(1)]+E[B(2)]=0+0=0$$

και διασπορά:

$$V[B(1)+B(2)]=V[B(1)]+V[B[(2)]+2\,\mathrm{Cov}[B(1),B(2)]=1+2+2=5$$

Η συνδιακύμανση χρησιμοποιήθηκε στον τύπο, επειδή τα $B(1),B(2)$ δεν είναι ανεξάρτητα. Επομένως

$$B(1)+B(2)\sim\mathcal{N}(0,5)$$

Άρα, αν θέσουμε $U=B(1)+B(2)$, έχουμε:

$$P[B(1){+}B(2)>2]=P[U>2]=P\left[\frac{U-1}{\sqrt{5}}>\frac{2-0}{\sqrt{5}}\right]=P\left[Z>\frac{2}{\sqrt{5}}\right]=1{-}\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=0.1$$

5.4 Δείξατε ότι η κίνηση $Brown$ δεν είναι διαφορίσμη, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Λύση: Έστω $t_0\geq 0$, ένα τυχαίο σημείο του πεδίου ορισμού της κίνησης $Brown$. Θα δείξουμε ότι το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{B\left(t_0+h\right)-B\left(t_0\right)}{h}$$

δεν υπάρχει. Επειδή η $B(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή, το παραπάνω κλάσμα κλίσεων παίρνει τυχαίες τιμες. Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα το κλάσμα αυτό να πάρει αυθαίρετα μεγάλες τιμές είναι ίση με 1, δηλαδή το γεγονός αυτό είναι βέβαιο.
Εάν $h=1/n$, τότε, το ότι $h\to 0$ είναι ισοδύναμο με το $n\to+\infty$ και

$$\frac{B\left(t_0+h\right)-B\left(t_0\right)}{h}=\frac{B\left(t_0+\frac{1}{n}\right)-B\left(t_0\right)}{\frac{1}{n}}=n\left[B\left(t_0+\frac{1}{n}\right)-B\left(t_0\right)\right]=X_n$$

Η X_n είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους:

$$E\left[X_n\right]_1=nE\left[B\left(t_0+\frac{1}{n}\right)-B\left(t_0\right)\right]=n\cdot 0=0$$

και

$$V\left[X_n\right]=n^2V\left[B\left(t_0+\frac{1}{n}\right)-B\left(t_0\right)\right]=n^2\cdot\frac{1}{n}=n$$

Έστω τώρα $K > 0$ αυθαίρετα μεγάλο, τότε:

$$\begin{aligned}
&P\left[|X_n| > K\right] = 1 - P\left[|X_n| \leq K\right] = \\
&= 1 - P\left[-K \leq X_n \leq K\right] = \\
&= 1 - P\left[\frac{-K-0}{\sqrt{n}} = \frac{X_n - 0}{\sqrt{n}} \leq \frac{K-0}{\sqrt{n}}\right] = \\
&= 1 - \left[\Phi\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-K}{\sqrt{n}}\right)\right]\Bigg]
\end{aligned}$$

καθώς όμως $n \to +\infty$, έπεται ότι $\dfrac{K}{\sqrt{n}} \to 0$ και άρα, τελικά:

$$P\left[|X_n| > K\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \left[\Phi(0) - \Phi(0)\right] = 1$$

Επομένως το πηλίκο των διαφορών γίνεται με βεβαιότητα μεγαλύτερο του οποιουδήποτε αριθμού, άρα αποκλείεται να συγκλίνει και η παράγωγος δεν υπάρχει.

5.5 Αν $B(t)$ είναι μια κίνηση $Brown$, δείξατε ότι και η $-B(t)$ είναι μια κίνηση $Brown$.

Λύση: Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι πέντε ιδιότητες μιας κίνησης $Brown$. Ορίζουμε $X(t) = -B(t)$ και έχουμε ότι,

1. $X(0) = -B(0) = -0 = 0$,

2. η $X(t)$ είναι συνεχής για κάθε $t \geq 0$,

3. για οποιεσδήποτε n χρονικές στιγμές: $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές:

$$X(t_2) - X(t_1) = -B(t_2) - (-B(t_1)) = B(t_1) - B(t_2),$$

$$X(t_3) - X(t_2) = -B(t_3) - (-B(t_2)) = B(t_2) - B(t_3),$$

$$\ldots$$

$$X(t_n) - X(t_{n-1}) = -B(t_{n-1}) - (-B(t_n)) = B(t_n) - B(t_{n-1})$$

   είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, επειδή η $B(t)$ είναι κίνηση $Brown$. Άρα έχουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

4. Έστωσαν οι χρονικές στιγμές t, s έτσι ώστε: $0 < t < s$. Η ποσότητα:

$$X(s) - X(t) = -B(s) - \Big(-B(t)\Big) = -\Big(B(s) - B(t)\Big)$$

   δεν εξαρτάται από τον χρόνο, άρα έχουμε την ιδιότητα των σταθμισμένων προσαυξήσεων.

5. η τυχαία μεταβλητή $X(t) = -B(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή, επίσης:

$$E[X(t)] = E[-B(t)] = -E[B(t)] = -0 = 0$$

$$V[X(t)] = V[-B(t)] = (-1)^2 V[B(t)] = t$$

άρα ισχύει και η ιδιότητα της κανονικής κατανομής.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $-B(t)$ είναι κίνηση $Brown$.

5.6 Έστω $B(t) = B_t$ μία τυπική κινηση $Brown$. Ορίζουμε την στοχαστική ανέλιξη: $X_t = e^{B_t}$. Υπολογίσατε τις ποσότητες:

1. $E[X_t]$

2. $V[X_t]$

3. $Cov[X_s, X_t]$**,** $0 \leq s \leq t$**.**

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι Y είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή: $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, τότε η ροπογεννήτρια της δίνεται από τον τύπο: $M_Y(\theta) = e^{\theta\mu + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}}$, γνωρίζουμε όμως ότι: $M_Y(\theta) = E\left[e^{\theta Y}\right]$, άρα τελικά:

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \quad \Rightarrow \quad E\left[e^{\theta Y}\right] = e^{\theta\mu + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}} \tag{5.1}$$

για κάθε μ, σ και θ. Επομένως, για το πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$E\left[X_t\right] = E\left[e^{B_t}\right] \text{ με } B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

άρα, θέτοντας στην σχέση (6.1) $Y = B_t, \mu = 0, \theta = 1, \sigma^2 = t$, παίρνουμε: $E\left[X_t\right] = e^{t/2}$.

Για το δεύτερο ερώτημα έχουμε διαδοχικά:

$$E\left[X_t^2\right] = E\left[e^{2B_t}\right] \Rightarrow E\left[X_t^2\right] = e^{2t}$$

όπου θέσαμε στην σχέση (6.1) $Y = B_t, \mu = 0, \theta = 2, \sigma^2 = t$. Άρα,

$$V\left[X_t\right] = E\left[X_t^2\right] - E^2\left[X_t\right] == e^{2t} - \left(e^{t/2}\right)^2 = e^{2t} - e^t$$

Για το τρίτο ερώτημα, υποθέτουμε ότι $0 \leq s \leq t$ και έχουμε:

$$\operatorname{Cov}\left(X_s, X_t\right) = E\left[X_s X_t\right] - E\left[X_s\right] E\left[X_t\right]$$

με

$$E\left[X_s\right] = e^{s/2}, E\left[X_t\right] = e^{t/2}$$

Επίσης,

$$E\left[X_s X_t\right] = E\left[e^{B_t + B_s}\right] = E\left[e^{B_t + B_s + B_s - B_s}\right] = E\left[e^{2B_s}\right] E\left[e^{B_t - B_s}\right] = E\left[e^{2B_s}\right] E\left[e^{B_{t-s}}\right] = e^{2s}$$

Η παραπάνω διαδικασία έγινε για να περάσουμε από τα αλληλοεπικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα $[0, t]$, $[0, s]$, στα ξένα διαστήματα: $(0, s)$, (s, t) στα οποία οι τυχαίες μεταβλητές B_t, B_{t-s} είναι ανεξάρτητες. Άρα, τελικά, με αντικατάσταση:

$$\operatorname{Cov}\left(X_s, X_t\right) = e^{\frac{3s+t}{2}} - e^{\frac{s+t}{2}}$$

5.7 *Εάν η* $B(t)$ *είναι τυπική κίνηση* $Brown$, *δείξατε ότι:*

$$E[B^2(t)] = t \quad , \quad V[B^2(t)] = 2t^2$$

Λύση: 1ος Τρόπος (Με ροπογεννήτριες). Γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτρια της $B(t)$ είναι $M_{B(t)}(\theta) = e^{\frac{\theta^2 t}{2}}$. Γνωρίζουμε επίσης ότι: $E[B^2(t)] = M''_{B(t)}(0)$, αλλά

$$M''_{B(t)}(t) = \theta^2 t^2 e^{\frac{\theta^2 t}{2}} + te^{\frac{\theta^2 t}{2}}$$

οπότε

$$E[B^2(t)] = M''_{B(t)}(0) = 0^2 t^2 e^{\frac{0^2 t}{2}} + te^{\frac{0^2 t}{2}} = t$$

Για την διακύμανση έχουμε:

$$V[B^2(t)] = E[(B^2(t))^2] - E^2[B^2(t)] = E[B^4(t)] - t^2$$

αλλά $E[B^4(t)] = M''''_{B(t)}(0)$, με

$$M''''_{B(t)}(\theta) = \theta^4 t^4 e^{\frac{\theta^2 t}{2}} + 6\theta^2 t^3 e^{\frac{\theta^2 t}{2}} + 3t^2 e^{\frac{\theta^2 t}{2}}$$

οπότε, τελικά:

$$E[B^4(t)] = M''''_{B(t)}(0) = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad V[B^2(t)] = 3t^2 - t^2 = 2t^2$$

2ος Τρόπος (Με κατανομή $\mathcal{X}_1^2$). Γνωρίζουμε ότι εάν μία τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, τότε η X^2 ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{X}_1^2$, με $E[\mathcal{X}_1^2] = 1$ και $V[\mathcal{X}_1^2] = 2$.

Διαδοχικά τώρα έχουμε:

$$B(t) \sim \mathcal{N}(0,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{B(t)}{\sqrt{t}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Rightarrow \quad \frac{B^2(t)}{t} \sim \mathcal{X}_1$$

άρα, $B^2(t) = Z \cdot t$, όπου Z μία τυχαία μεταβλητή, με $Z \sim \mathcal{X}_1$ και $E[Z] = 1$, $V[Z] = 2$. Επομένως τελικά

$$E[B^2(t)] = E[Z] \cdot t = 1 \cdot t = t$$

και

$$V[B^2(t)] = V(Z) \cdot t^2 = 2t^2$$

5.8 Υπολογίσατε την συνδιακύμανση: $Cov[B(s), B(t)]$

Λύση: Θεωρούμε ότι $0 < s \leq t$. Διαδοχικά έχουμε:

$$Cov[B(s), B(t)] = Cov[B(s), B(t)+B(s)-B(s)] = Cov[B(s), B(s)] + Cov[B(s), B(t)-B(s)]$$

$$= Var[B(s)] + Cov[B(s), B(t) - B(s)] = s + Cov[B(s), B(t) - B(s)]$$

Τα διαστήματα $s = s - 0$ και $t - s$ είναι μη αλληλοεπικαλυπτόμενα και επομένως οι τυχαίες μεταβλητές: $B(s)$, $B(t) - B(s) \sim B(t-s)$ είναι ανεξάρτητες και επομένως $Cov[B(s), B(t) - B(s)] = 0$. Άρα, τελικά

$$Cov[B(s), B(t)] = s + 0 = s$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $Cov[B(s), B(t)] = t$, όταν $0 < t \leq s$. Επομένως, συνδυαστικά, έχουμε:

$$Cov[B(s), B(t)] = \min\{s, t\}$$

5.9 Έστωσαν $B(t)$ και $B^*(t)$ δύο ανεξάρτητες κινήσεις $Brown$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός, έτσι ώστε: $-1 \leq \rho \leq 1$. Δείξατε ότι η στοχαστική ανέλιξη:

$$Z(t) = \rho B(t) + \sqrt{1-\rho^2} B^*(t)$$

είναι επίσης κίνηση $Brown$.

Λύση: Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι πέντε ιδιότητες μιας κίνησης $Brown$.

1. $Z(0) = \rho B(0) + \sqrt{1-\rho^2} B^*(0) = 0$,
2. η $Z(t)$ είναι συνεχής για κάθε $t \geq 0$,
3. για οποιεσδήποτε n χρονικές στιγμές: $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} Z(t_2) - Z(t_1) &= \rho[B(t_2) - B(t_1)] + \sqrt{1-\rho^2}[B^*(t_2) - B^*(t_1)], \\ Z(t_3) - Z(t_2) &= \rho[B(t_3) - B(t_2)] + \sqrt{1-\rho^2}[B^*(t_3) - B^*(t_2)], \\ &\vdots \\ Z(t_n) - Z(t_{n-1}) &= \rho[B(t_n) - B(t_{n-1})] + \sqrt{1-\rho^2}[B^*(t_n) - B^*(t_{n-1})], \end{aligned}$$

   είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, επειδή οι $B(t), B^*(t)$ είναι κινήσεις $Brown$. Άρα έχουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

4. Έστωσαν οι χρονικές στιγμές t, s έτσι ώστε: $0 < t < s$. Η ποσότητα:

$$Z(s) - Z(t) = \rho[B(s) - B(t)] + \sqrt{1-\rho^2}[B^*(s) - B^*(t)],$$

   δεν εξαρτάται από τον χρόνο, άρα έχουμε την ιδιότητα των σταθμισμένων προσαυξήσεων.

5. η τυχαία μεταβλητή $Z(t) = \rho B(t) + \sqrt{1-\rho^2} B^*(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή ως άθροισμα δύο τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή, επίσης:

$$E[Z(t)] = \rho E[B(t)] + \sqrt{1-\rho^2} E[B^*(t)] = \rho \cdot 0 + \sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} V[Z(t)] &= \rho^2 V[B(t)] + (\sqrt{1-\rho^2})^2 V[B^*(t)] = \rho^2 \cdot t + (\sqrt{1-\rho^2})^2 \cdot t = \\ &= \rho^2 \cdot t + 1 \cdot t - \rho^2 \cdot t = t \end{aligned}$$

   άρα ισχύει και η ιδιότητα της κανονικής κατανομής.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $Z(t)$ είναι κίνηση $Brown$.

5.10 Εάν Z_t είναι η στοχαστική ανέλιξη:

$$Z_t = \rho B_t + (\sqrt{1-\rho^2})B_t^* \quad , \quad -1 \le \rho \le 1$$

υπολογίσατε την ποσότητα: $Corr[Z_t, B_t]$.

Λύση: Έχουμε ότι:

$$\mathrm{Corr}[Z_t, B_t] = \frac{\mathrm{Cov}[Z_t, B_t]}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z_t))} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(B_t)}}$$

Αλλά,

$$\mathrm{Cov}\,[Z_t, B_t] = \mathrm{Cov}\left[\rho B_t + (\sqrt{1-\rho^2})B_t^*, B_t\right] = \mathrm{Cov}\,[\rho B_t, B_t] + \mathrm{Cov}\left[(\sqrt{1-\rho^2})B_t^*, B_t\right] =$$

$$= \rho\,\mathrm{Cov}\,[B_t, B_t] + (\sqrt{1-\rho^2})\,\mathrm{Cov}\,[B_t^*, B_t] = \rho\,\mathrm{Var}\,(B_t, B_t) + \sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 = \rho t$$

$Cov[B_t^*, B_t] = 0$ επειδή οι κινήσεις $Brown$, B_t, B_t^* είναι ανεξάρτητες. Άρα, τελικά:

$$Corr[Z_t, B_t] = \frac{\rho t}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z_t))} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(B_t)}} = \frac{\rho t}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{t}} = \frac{\rho_t}{t} = \rho$$

5.11 Έστω $B(t)$ μία τυπική κίνηση $Brown$ και $t_1, t_2 > 0$ δύο χρονικές στιγμές. Βρείτε την κατανομή της ανέλιξης: $B(t_1) + B(t_1 + t_2)$.

Λύση: Αφού οι $B(t_1)$, $B(t_1 + t_2)$ ακολουθούν τις κανονικές κατανομές: $\mathcal{N}(0, t_1)$, $\mathcal{N}(0, t_1 + t_2)$ και το άθροισμα τους θα ακολουθεί κανονική κατανομή. Πρέπει να βρούμε την μέση τιμή της και την διακύμανση της.

$$E[B(t_1) + B(t_1 + t_2)] = E[B(t_1)] + E[B(t_1 + t_2)] = 0 + 0 = 0$$

$$V[B(t_1) + B(t_1 + t_2)] = V[B(t_1)] + V[B(t_1 + t_2)] + 2Cov[B(t_1), B(t_1 + t_2)] =$$

$$= t_1 + (t_1 + t_2) + 2\min\{t_1, t_1 + t_2\} = 2t_1 + t_2 + 2t_1 = 4t_1 + t_2$$

Άρα, τελικά $B(t_1) + B(t_1 + t_2) \sim \mathcal{N}(0, 4t_1 + t_2)$.

5.12 Έστω $B(.)$ μία κίνηση $Brown$. Βρείτε την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $B(s)$ όταν $B(t) = \rho$, όπου t, s δεδομένες χρονικές στιγμές με $t > s$ και ρ συγκεκριμένος αριθμός.

Λύση: Προκειμένου να βρούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής:

$$B(s)|B(t) = \rho, \quad t > s$$

πρέπει να προσδιορίσουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος της (σππ), $f_{s|t}(x \mid \rho)$. Ισχύει:

$$f_{s|t}(x \mid \rho) = \frac{f(x, \rho)}{f_t(\rho)} \tag{5.2}$$

όπου $f(x,\rho)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος των τυχαίων μεταβλητών $B(s), B(t)$ και $f_t(\rho)$ η περιθώρια σππ. Γνωρίζουμε ότι η κίνηση $Brown$ ακολουθεί την $\mathcal{N}(0,t)$. Άρα η σππ της $Brown$ είναι η

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\dfrac{x^2}{2t}} \text{ επομένως } f_t(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\dfrac{\rho^2}{2t}} \tag{5.3}$$

Για να υπολογίσουμε την από κοινού σππ $f(x,\rho)$, εργαζόμαστε ως εξής: θέτουμε,

$$\left.\begin{array}{l} B(s) = x \\ \\ B(t) = \rho \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B(s) = x \\ \\ B(t) - B(s) = \rho - x \end{array}$$

Η $B(s)$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{N}(0,s)$, άρα έχει σππ:

$$f_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\dfrac{x^2}{2s}} \tag{5.4}$$

Η $B(t-s)$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{N}(0,t-s)$, άρα έχει σππ:

$$f_{t-s}(\rho - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\dfrac{(\rho-x)^2}{2(t-s)}} \tag{5.5}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των στασίμων αυξήσεων και της ανεξαρτησίας, έχουμε συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.2),(5.3),(5.4),(5.5):

$$f(x,\rho) = f_s(x) \cdot f_{t-s}(\rho - x) \Rightarrow f_{s|t}(x \mid \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \dfrac{s(t-s)}{t}}} \cdot e^{-\dfrac{\left(x - \dfrac{s\rho}{t}\right)^2}{2\dfrac{s(t-s)}{t}}}$$

και άρα τελικά

$$B(s)|B(t) = \rho, \quad t > s \quad \sim \quad \mathcal{N}\left(\frac{s\rho}{t}, \frac{s}{t}(t-s)\right)$$

5.13 (ΘΕΛΕΙ ΠΡΟΣΟΧΗ) Ορίζουμε $X(t) = B(t) - 5$, όπου $B(t)$, τυπική κίνηση $Brown$. Άν T_0 είναι η πρώτη χρονική στιγμή που η ανέλιξη συναντά τον άξονα των x, δηλαδή $X(T_0) = 0$, βρείτε την πιθανότητα: $P(T_0 \leq 25)$.

Λύση: Αφού T_0 είναι η πρώτη χρονική στιγμή που η $X(t)$ πιάνει τον άξονα των x, έχουμε:

$$X(T_0) = 0 \Rightarrow B(T_0) - 5 = 0 \Rightarrow B(T_0) = 5$$

Άρα η T_0 συμπίπτει με την T_5, που είναι η πρώτη χρονική στιγμή που η τυπική κίνηση $Brown$ ¨ πιάνει ¨ την τιμή 5. Δηλαδή,

$$T_5 = \min\{t : B(t) = 5\}$$

Πρέπει να βρούμε την αθροιστική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής T_5, για να υπολογίσουμε μετά την πιθανότητα: $P[T_5 \leq 25]$. Για να υπολογίσουμε την αθροιστική κατανομή πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(T_5 \leq t)$, για κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Από το ΘΟΠ έχουμε:

$$P[B(t) \geq 5] =$$

$$= P[B(t) \geq 5 \mid T_5 \leq t]\, P\left[T_5 \leq t\right] + P\left[B(t) \geq 5 \mid T_5 > t\right] P\left[T_5 > t\right]$$

Όταν $B(t) \geq 5$, αυτό σημαίνει, λόγω της συνέχειας της $B(t)$, ότι προηγουμένως η κίνηση $Brown$ έχει διέλθει από το 5. Δηλαδή, υπάρχει $t^* \leq t$ με $B(t^*) = 5$, άρα ή T_5, που είναι η πρώτη χρονική στιγμή που περνάμε από το 5, πρέπει να είναι μικρότερη του t. Επομένως, τελικά $P\left[B(t) \geq 5 \mid T_5 > t\right] = 0$ Επίσης,

$$P\left[B(t) \geq 5 \mid T_5 \leq t\right] = P[B(t) \geq 5 | B(T_5) = 5] = P\left[B(t) - B\left(T_5\right) \geq 0\right] =$$

$$= P\left[B\left(t - T_5\right) \geq 0\right] = 1 - \Phi\left(\frac{0}{\sqrt{t - T_5}}\right) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$P[B(t) \geq 5] = \frac{1}{2} P\left[T_5 \leq t\right] \Leftrightarrow P\left[T_5 \leq t\right] = 2P[B(t) \geq 5] =$$

$$= 2(1 - P[B(t) \leq 5]) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

Τελικά,

$$P\left[T_5 \leq \ 25\right] = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{25}}\right)\right) = 2(1 - \Phi(1)) = 2 \cdot 0.1587 = 0.3174$$

Κεφάλαιο 6

Ειδικές Κινήσεις *Brown*

6.1 Γενικευμένη Κίνηση *Brown*

Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ λέγεται γενικευμένη κίνηση $Brown$, αν και μόνον αν:

$i)$	$X(0) = 0$	
$ii)$	$X(t)$	έχει στασιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις
$iii)$	$X(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 t\right)$	

Εάν $\sigma = 1$ μεταπίπτει στην τυπική κίνηση $Brown$. Προκύπτει με την διαδικασία του τυχαίου περιπάτου, θέτοντας για προσαύξηση την $y = \sigma\sqrt{\Delta t}$.

6.2 Κίνηση *Brown* με *Drift*

Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ λέγεται γενικευμένη κίνηση $Brown$ με $drift$, αν και μόνον αν έχει τύπο:

$$\boxed{X(t) = \mu t + \sigma B(t)}$$

$B(t)$ μία τυποποιημένη κίνηση $Brown$. Ο όρος μt ονομάζεται $drift$ ενώ ο $\sigma B(t)$, $diffusion$. Για αυτήν την κίνηση ισχύουν οι σχέσεις:

$$E(X(t)) = E(\mu t) + E(\sigma B(t)) = \mu t + \sigma \cdot 0 = \mu t$$

$$V(X(t)) = V(\sigma B(t)) = \sigma^2 V(B(t)) = \sigma^2 t$$

6.3 Γεωμετρική Κίνηση *Brown*

Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ λέγεται γεωμετρική κίνηση $Brown$, αν και μόνον αν έχει τύπο:

$$\boxed{X(t) = e^{B(t)}}$$

$B(t)$ μία τυποποιημένη κίνηση $Brown$.

6.4 Γεωμετρική κίνηση $Brown$ με $drift$

Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ λέγεται γεωμετρική κίνηση $Brown$ με $drift$, αν και μόνον αν έχει τύπο:

$$\boxed{X(t) = e^{\mu t + \sigma B(t)}}$$

$B(t)$ μία τυποποιημένη κίνηση $Brown$. Ισχύουν οι ιδιότητες:

$$E[X(t)] = e^{\mu t + \frac{t \cdot \sigma^2}{2}}$$

$$V[X(t)] = e^{2\mu t + t\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

6.5 Λυμένες Ασκήσεις

6.1 Αν X_t είναι μια γενικευμένη κίνηση $Brown$ με παράμετρο σ, δείξατε ότι η $Y_t = X_t/\sigma$ είναι μια τυπική κίνηση $Brown$.

Λύση: Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι πέντε ιδιότητες μιας κίνησης $Brown$. Διαδοχικά έχουμε ότι,

1. $Y_0 = \dfrac{X_0}{\sigma} = \dfrac{0}{\sigma} = 0$,
2. η Y_t είναι συνεχής για κάθε $t \geq 0$, αφού X_t είναι συνεχής.
3. για οποιεσδήποτε n χρονικές στιγμές: $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές:
$$Y_{t_2} - Y_{t_1} = \frac{X_{t_2} - X_{t_1}}{\sigma},$$
$$Y_{t_3} - Y_{t_2} = \frac{X_{t_3} - X_{t_2}}{\sigma},$$
$$\cdots$$
$$Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}} = \frac{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}{\sigma},$$
είναι στοχαστικά ανεξάρτητες, επειδή η X_t είναι γενικευμένη κίνηση $Brown$. Άρα έχουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
4. Έστωσαν οι χρονικές στιγμές t, s έτσι ώστε: $0 < t < s$. Η ποσότητα:
$$U_s - Y_t = \frac{1}{\sigma}(X_s - X_t)$$
δεν εξαρτάται από τον χρόνο, άρα έχουμε την ιδιότητα των σταθμισμένων προσαυξήσεων.

5. η τυχαία μεταβλητή X_t ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(o, \sigma^2 t)$, άρα:

$$E[Y_t] = E[X_t/\sigma] = E[X_t]/\sigma = 0$$

$$V[Y_t] = V[X_t/\sigma] = (1/\sigma)^2 V[X_t] = (1/\sigma)^2 \cdot \sigma^2 t = t$$

άρα ισχύει και η ιδιότητα της κανονικής κατανομής.

Από όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $-B(t)$ είναι κίνηση $Brown$.

6.2 Έστω $Y(t) = \sigma B(t) + \mu t$ μία κίνηση $Brown$ με $drift$. Ορίζουμε $X(t) = e^{Y(t)}$, βρείτε την $E[X(t)]$ και την $Var[X(t)]$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$E[X(t)] = E[e^{Y(t)}] = E[e^{\sigma B(t) + \mu t}] = e^{\mu t} E[e^{\sigma B(t)}]$$

Γνωρίζουμε ότι αν μια τυχαία μεταβλητή W, ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \tilde{\sigma}^2)$, τότε η ροπογεννήτρια της δίνεται από τον τύπο:

$$E[e^{\theta W}] = e^{\theta\mu + \frac{\tilde{\sigma}^2\theta^2}{2}} \tag{6.1}$$

επειδή λοιπόν $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ από την (6.1) έχουμε με $\mu = 0$,$\theta = \sigma$ και $\tilde{\sigma}^2 = t$

$$E[e^{\sigma B(t)}] = e^{\sigma \cdot 0 + \frac{t \cdot \sigma^2}{2}}$$

και άρα τελικά:

$$E[X(t)] = e^{\mu t + \frac{t \cdot \sigma^2}{2}}$$

Για την διασπορά έχουμε:

$$V[X(t)] = E[X^2(t)] - E^2[X(t)]$$

αλλά

$$E[X^2(t)] = E[e^{2Y(t)}] = E[e^{2\mu t + 2\sigma B(t)}] = e^{2\mu t} E[e^{2\sigma B(t)}]$$

Χρησιμοποιώντας την (6.1) με $\mu = 0$,$\theta = 2\sigma$ και $\tilde{\sigma}^2 = t$, έχουμε:

$$E[X^2(t)] = e^{2\mu t} E[e^{2\sigma B(t)}] = e^{2\mu t} e^{2\sigma \cdot 0 + \frac{t \cdot 4\sigma^2}{2}} = e^{2\mu t + 2te\sigma^2}$$

και τελικά:

$$V[X(t)] = e^{2\mu t + 2t\sigma^2} - (e^{\mu t + \frac{t \cdot \sigma^2}{2}})^2 = e^{2\mu t + t\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

6.3 Έστω $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$ μία κίνηση $Brown$ με $drift$. Ορίζουμε: $\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t)$. Βρείτε, $E[\Delta X], V[\Delta X], E\left[\Delta X^2\right]$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(t + \Delta t) + \sigma(B(t + \Delta t)) - \mu t - \sigma B(t) =$$

$$= \mu\Delta t + \sigma(B(t+\Delta t) - B(t)) \Rightarrow \Delta X = \mu\Delta t + \sigma\Delta B$$

Επομένως,

$$E[\Delta x] = \mu\Delta t + \sigma E(\Delta B) = \mu\Delta t + \sigma \cdot 0 = \boxed{\mu\Delta t}$$

Επίσης, αφού η διαφορά $\Delta B = B(t+\Delta t) - B(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή: $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, έπεται ότι:

$$V[\Delta X] = \sigma^2 V(\Delta B) = \boxed{\sigma^2\Delta t}$$

Τέλος,

$$E\left[\Delta X^2\right] = E\left[(\mu\Delta t + \sigma\Delta B)^2\right] =$$
$$= E\left[\mu^2\Delta t^2 + \sigma^2(\Delta B)^2 + 2,\sigma\Delta B \cdot \Delta t\right]$$

αλλά $(\Delta t)^2 \simeq 0$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$E\left[\Delta X^2\right] = \sigma^2 E\left(\Delta B^2\right) + 2\mu\sigma E(\Delta B \cdot \Delta t)$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι, $E\left(\Delta B^2\right) = \Delta t$ και $E[\Delta B \cdot \Delta t] = \Delta t E[\Delta B] = 0$, έχουμε τελικά,

$$E\left[\Delta X^2\right] = \sigma^2\Delta t$$

6.4 Έστω $X(t) = \mu t + \sigma B(t)$ μία κίνηση $Brown$ με $drift$. Ορίζουμε:

$$T = \inf\{t \geq 0, x(t) = a \textbf{ ή } x(t) = b\}$$

δηλαδή, το T αντιπροσωπεύει την πρώτη χρονική στιγμή που η ανέλιξη εγκαταλείπει το διάστημα (a, b). Βρείτε την πιθανότητα:

$$P[X(T) = b | X(0) = x] \quad , \quad a < x < b$$

Δηλαδή την πιθανότητα διαφυγής από το σημείο b, όταν ξεκινάμε μέσα από το διάστημα (a, b).

Λύση: Ορίζουμε:

$$u(x) = P[X(T) = b \mid X(0) = x]$$

Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος, έχουμε:

$$u(X) = P\left[X(T) = b \mid X(0) = x + x_2\right] P\left[X(0) = x + x_1\right] +$$
$$+ P\left[X(T) = b \mid X(0) = x + x_2\right] P\left[X(0) = x + x_2\right] + \cdots +$$
$$\cdots\cdots = \sum_{\Delta x} p[X(T) = b \mid X(0) = x + \Delta x] \cdot P[X(0) = x + \Delta x] =$$
$$= \sum_{\Delta x} u(x + \Delta x) P[X(0) = x + \Delta x] = E[u(x + \Delta x)]$$

όπου τα $x_1, x_2, ...$ είναι ¨κοντά¨ στο x. Άρα τελικά έχουμε: $u(x) = E[u(x + \Delta x)]$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $Taylor$, παίρνουμε:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + u'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} u''(x)(\Delta x)^2 + \cdots$$

Υπολογίζοντας την μέση τιμή και στα δύο μέρη, έχουμε:

$$E[u(x+\Delta x)] = u(x) + u'(x)E[\Delta x] + \frac{1}{2}u''E\left[\Delta x^2\right] + \cdots$$

Επειδή η $X(t)$ ακολουθεί κίνηση $Brown$ με $drift$, από προηγούμενη άσκηση, ισχύει:

$$E[\Delta x] = \mu\Delta t \quad , \quad E\left[\Delta X^2\right] = \sigma^2\Delta t$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$u(x) = u(x) + u'(x)\mu\Delta t + \frac{1}{2}u''(x)\sigma^2\Delta t \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x)\mu + \frac{1}{2}u''(x)\sigma^2 = 0$$

η οποία είναι γραμμική διαφορική εξίσωση, ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\lambda\mu + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 = 0$ με ρίζες, $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$, άρα:

$$u(x) = c_1e^{0t} + c_2e^{(-2\mu x/\sigma^2)} = c_1 + c_2e^{(-2\mu x/\sigma^2)}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $u(a) = 0$, $u(b) = 1$, έχουμε τελικά:

$$P[X(T) = b \mid X(0) = x] = \frac{e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}} - e^{-\frac{2\mu a}{\sigma^2}}}{e^{-\frac{2\mu b}{\sigma^2}} - e^{-\frac{2\mu \alpha}{\sigma^2}}}$$

6.5 Μία μετοχή ακολουθεί κίνηση $Brown$ με $drift$, με $\mu = 1/10$, $\sigma^2 = 4$. Κάποιος αγοράζει στην τιμή 100 και πουλάει είτε στα 110 είτε στα 95. Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει;

Λύση: Ζητάμε την πιθανότητα:

$$P[X(T) = 110|X(0) = 100]$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της προηγούμενης άσκησης, έχουμε

$$P[X(T) = 110|X(0) = 100] = \frac{e^{-\frac{100}{20}} - e^{-\frac{95}{20}}}{e^{-\frac{110}{20}} - e^{-\frac{95}{20}}} = 0.419$$

6.6 Σε έναν αγώνα ποδηλάτου με δύο αθλητές, η στοχαστική ανέλιξη $Y(t)$ συμβολίζει τα πόσα δευτερόλεπτα προηγείται ο αθλητής Α, όταν το $100t\%$, του αγώνα έχουν διεξαχθεί, με $0 \leq t \leq 1$. Εάν $Y(t)$ είναι μία γενικευμένη κίνηση $Brown$ με παράμετρο διασποράς σ, βρείτε:

1. **Την πιθανότητα να κερδίσει ο αθλητής Α, εάν στα μισά του αγώνα προηγείται σ δευτερόλεπτα.**
2. **Εάν ο αθλητής Α κερδίσει τον αγώνα με διαφορά σ δευτερολέπτων, την πιθανότητα να προηγείτο στα μισά του αγώνα.**

6.7 Εάν $X(t)$ γεωμετρική κίνηση $Brown$ με $drift$, βρείτε την ποσότητα: $E[X(t)|X(u)]$ **όταν** $0 \leq u \leq s \leq t$**.**

Λύση: Προφανώς $X(t) = e^{\mu t + \sigma B(t)} = e^{Y(t)}$, με $Y(t) = \mu t + \sigma B(t)$. Διαδοχικά τώρα, έχουμε:

$$E[X(t)|X(u)] = E\left[e^{Y(t)}|X(u)\right] = E\left[e^{Y(s)+Y(t)-Y(s)}|X(u)\right] =$$

$$= e^{Y(s)}E\left[e^{Y(t)-Y(s)}|X(u)\right] = e^{Y(s)}E\left[e^{Y(t)-Y(s)}\right]$$

η τελευταία σχέση προκύπτει από την ανεξαρτησία των κινήσεων $Brown$ στα χρονικά διαστήματα: $[0,u]$ και $[s,t]$, αφού $0 \leq u \leq s \leq t$. Η τυχαία μεταβλητή $Y(t) - Y(s)$ έχει την ίδια κατανομή με την $Y(t-s)$. Ακόμα η $Y(t) = \mu t + \sigma B(t)$ ακολουθεί την $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$, άρα τελικά:

$$Y(t) - Y(s) \sim \mathcal{N}(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$$

Επομένως, από ροπογεννήτριες, έχουμε:

$$E\left[e^{Y(t)-Y(s)}\right] = e^{1\cdot\mu(t-s)+\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}$$

και τέλος:

$$E[X(t)|X(u)] = e^{Y(s)}\left(e^{\mu(t-s)+\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}\right)$$

Κεφάλαιο 7

$Monte-Carlo$

Κεφάλαιο 8

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

8.1 Προαπαιτούμενα

Έστωσαν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y και R_X το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβητής X. Η **Δεσμευμένη Μέση Τιμή** του X, όταν η τυχαία μεταβλητή Y, πάρει την σταθερή τιμή $Y = y^*$, δίδεται από την σχέση:

$$E[X \mid Y = y*] = \sum_{x \in R_X} x f_{X|Y}(x \mid y*)$$

όταν η X είναι διακριτή και

$$E\left[X \mid Y = y^*\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}\left(x \mid y^*\right) dx$$

όταν η X είναι συνεχής.

8.1.1 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Μέσω αυτής της διαδικασίας μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση $m(y)$, αντιστοιχούσα σε κάθε τιμή $y \in \mathbb{R}$ την Δεσμευμένη Μέση Τιμή του X, όταν η τυχαία μεταβλητή Y, πάρει την σταθερή τιμή $Y = y$. Δηλαδή:

$$\boxed{m(y) = E[X \mid Y = y]}$$

όταν το y παίρνει τυχαίες τιμές, δηλαδή είναι τυχαία μεταβλητη Y, τότε η συνάρτηση $m(Y)$ είναι τυχαία μεταβλητή, ονομαζομένη **Δεσμευμένη Μέση Τιμή** και συμβολίζουμε:

$$\boxed{E[X \mid Y]}$$

8.1.2 Βασική Σχέση

Ισχύει η σχέση:

$$\boxed{E[E[X \mid Y]] = E[X]}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως το **θεώρημα του πύργου**.

8.1.3 Ιδιότητες

Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

1. $E[E[(aX+b)|Y]] = aE[X] + b$
2. $E[E[g(X)+h(X)|Y]] = E[g(X)] + E[h(X)]$
3. $E[E[g(X)|Y]] = E[g(X)]$
4. $E[E[h(Y)|X]] = E[h(Y)]$

όπου $g(.), h(.)$ συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 9

Γενικευμένο Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος

Κεφάλαιο 10

Δεσμευμένη Διακύμανση

Κεφάλαιο 11

Martingales

11.1 Λυμένες Ασκήσεις

11.1 Έστω S_n τυχαίος συμμετρικός περίπατος, δείξατε ότι είναι *martingale***.**

Λύση: Διαδοχικά έχουμε

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[S_n|\mathcal{F}_n] + E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$

Αλλά όταν $\mathcal{F}_n$, δεδομένο το S_n είναι αιτιοκρατικό και άρα, $E[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$, επίσης $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}] = 0$, αφού το τι αποτέλεσμα θα φέρουμε στην $n+1$ ρίψη, δεν εξαρτάται από την ιστορία-μνήμη του φαινομένου. Άρα τελικά:

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + 0 = S_n$$

και ο τυχαίος περίπατος είναι *martingale*.

11.2 Έστω S_n τυχαίος συμμετρικός περίπατος, δείξατε ότι η στοχαστική ανέλιξη S_n^2 δεν είναι *martingale***.**

Διαδοχικά έχουμε

$$E[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = E[(S_n + X_{n+1})^2|\mathcal{F}_n] = E[S_n^2|\mathcal{F}_n] + 2E[S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + E[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]$$

Αλλά, όταν $\mathcal{F}_n$ δεδομένο, το S_n είναι αιτιοκρατικό και άρα $E[S_n^2|\mathcal{F}_n] = S_n^2$, ακόμα $E[S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 2S_n E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, επίσης $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}] = 0$, αφού το τι αποτέλεσμα θα φέρουμε στην $n+1$ ρίψη, δεν εξαρτάται από την ιστορία-μνήμη του φαινομένου, άρα $E[S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 2S_n \cdot 0 = 0$. Επιπλέον,

$$E[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Άρα τελικά:

$$E[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] = S_n^2 + 1 \neq S_n^2$$

και ο S_n^2 δεν είναι *martingale*.

11.3 *Δείξατε ότι η κίνηση* Brown *είναι* martingale.

Λύση: Έστωσαν δύο χρονικές στιγμές t, s με $t > s$. Διαδοχικά έχουμε:

$$E[B(t) \mid \mathcal{F}(s)] = E[B(s) + B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}(s)] =$$
$$= E[B(s) \mid \mathcal{F}(s)] + E[B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}(s)]$$

αλλά

$$E[B(s) \mid \mathcal{F}(s)] = B(s)$$

και

$$E[B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}(s)] = E[B(t) - B(s)] = E[B(t-s)] = 0$$

Αφού $B(t-s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Επομένως, τελικά

$$E[B(t) \mid \mathcal{F}(s)] = B(s)$$

που σημαίνει ότι η κίνηση $Brown$ είναι $martingale$.

11.4 ***Δείξατε ότι η στοχαστική ανέλιξη:*** $e^{B(t)-\frac{1}{2}t}$, $B(t)$ ***μία κίνηση*** $Brown$***, είναι*** $martingale$**.**

Λύση: Έστω s μία χρονική στιγμή, με $t > s$ και $\mathcal{F}(s)$ μία ιστορία (φίλτρο) μέχρι την στιγμή s. Διαδοχικά έχουμε:

$$E\left[e^{B(t)-\frac{1}{2}t}|\mathcal{F}(s)\right] = E\left[e^{B(s)+(B(t)-B(s))-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}(t-s)}|\mathcal{F}(s)\right] =$$
$$= e^{B(s)-\frac{1}{2}s}E\left[e^{B(t)-B(s)-\frac{1}{2}(t-s)}|\mathcal{F}(s)\right]$$

Αφού η τυχαία μεταβλητή $B(t)-B(s)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή: $\mathcal{N}(0, t-s)$, αφαιρώντας μία σταθερά θα ακολουθούμε πάλι την κανονική κατανομή, άρα

$$W = B(t) - B(s) - \frac{1}{2}(t-s) \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}(t-\sigma), t-\sigma\right)$$

Χρησιμοποιώντας ροπογεννήτριες, έχουμε την σχέση:

$$E\left[e^{Y(t)}\right] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{όταν} \quad Y(t) \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$$

και άρα,

$$E\left[e^{\cdot B(t)-B(\sigma)-\frac{1}{2}(t-s)}\right] = E[e^W] = e^{E[W]+\frac{1}{2}Var[W]} =$$
$$= e^{-1/2(t-s)+1/2(t-s)} = e^0 = 1$$

και τελικά,

$$E\left[e^{B(t)-\frac{1}{2}t} \mid F(s)\right] = e^{B(s)-\frac{1}{2}s} \cdot 1$$

όθεν, η δεδομένη στοχαστική ανέλιξη είναι $martingale$.

11.2 Ασκήσεις προς επίλυση

11.5 *Έστω S_n τυχαίος συμμετρικός περίπατος, δείξατε ότι η στοχαστική ανέλιξη: $S_n^2 - n$, είναι* $martingale$*.*

Κεφάλαιο 12

Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

12.1 Βασικό Παράδειγμα

Έστω $[0, T]$, δεδομένο χρονικό διάστημα, που χωρίζεται σε n ισομήκη υποδιαστήματα,

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n] \quad , \quad t_0 = 0, t_n = T$$

μήκους $\Delta t = T/n$. Προφανώς,

$$t_k = k\Delta t, \qquad k = 0, 1, 2, 3, ..., n$$

Θεωρούμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή t_k κατέχουμε, μέσω συναλλαγής, μία ποσότητα $q(t_k)$ από μία μετοχή, που έχει τιμή μονάδος αυτή την χρονική στιγμή, ίση με$S(t_k)$. Θεωρούμε ότι την χρονική στιγμή T, όλα ρευστοποιούνται. Το συνολικό κέρδος θα είναι:

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} q\left(t_k\right) \left[S\left(t_{k+1}\right) - S\left(t_k\right)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} q\left(t_k\right) \Delta S_k$$

Θεωρούμε ότι οι ποσότητες $q(.)$ είναι τυχαίες μεταβλητές και ότι:

$$\Delta S_k = \mu S\left(t_k\right) \Delta t + \sigma S\left(t_k\right) \Delta B_k$$

οπότε

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-2} q\left(t_k\right) \left[\mu S\left(t_k\right) \Delta t + \sigma S\left(t_k\right) \Delta B_k\right] =$$

$$== \mu \sum_{k=0}^{n-1} q\left(t_k\right) S\left(t_k\right) \Delta t + \sigma \sum_{k=0}^{n-1} q\left(t_k\right) S(t) \Delta B_k$$

όταν $n \to +\infty \Rightarrow \Delta t \to 0$ και

$$\sum_{k=0}^{H} q\left(t_k\right) \delta\left(t_k\right) \Delta t \rightsquigarrow \int_0^T \varphi(t) dt,$$

όπου $\varphi(.)$ τυχαία μεταβλητή. Επίσης,

$$\sum_{k=0}^{k} q\left(t_k\right) S\left(t_k\right) \Delta B_k \rightsquigarrow \int_0^T h(.) dB(t)$$

Το τελευταίο αυτό ολοκλήρωμα ονομάζεται **στοχαστικό ολοκλήρωμα.**

Κεφάλαιο 13

Στοχαστικό Ολοκλήρωμα του Ito

Ορίζεται σαν το όριο, σύμφωνα με την ευκλείδια $norm$, ολοκληρωμάτων Ito στοχαστικών διακλαδωτών συναρήσεων.

$$I(f) = \int_0^T f(t,\omega)dB(t)$$

όπου ω είναι μία τυχαία μεταβλητή και $B(t)$ μία κίνηση $Brown$. Εάν η f δεν περιέχει τυχαία μεταβλητή, τότε το ολοκλήρωμα μεταπίπτει σε στοχαστική ανέλιξη. Συμβολίζουμε $I(T)$.

13.1 Ιδιότητες

Ιδιότητα 13.1

$$\int_0^T [\alpha f + bg]dB(t) = \alpha \int_0^T f dB(t) + b \int_0^T g dB(t)$$

Ιδιότητα 13.2

$$E[I(f)] = 0$$

Ιδιότητα 13.3

$$Var[I(f)] = \int_0^T E\left[f^2(t,\omega)\right]dt$$

Ιδιότητα 13.4 *Η στοχαστική ανέλιξη* $I(T)$ *είναι* $martingale$.

Ιδιότητα 13.5

$$E[I(f)I(g)] = \int_0^T E[f \cdot g]dt$$

Ιδιότητα 13.6

$$E\left[I^2(t)\right] = \int_0^T E\left[f^2\right]dt$$

Ιδιότητα 13.7 *Η στοχαστική ανέλιξη:* $I(T) = \int_0^T p(s)dB(s)$, *όπου* $p(s)$ *αιτιοκρατική συνάρτηση, ακολουθεί την κανονική κατονομή με μέση τιμή* 0 *και διασπορά ίση με* $\int_0^T p^2(s)ds$,*δηλαδή*

$$I(T) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T p^2(s)ds\right)$$

Κεφάλαιο 14

Ο Τύπος του Ito

14.1 Βασικές ιδιότητες διαφορικών.

Έστω $B(t)$ μία κίνηση $Brown$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{(dt)^2 \approx 0} \quad , \quad \boxed{dtdB \approx 0} \quad , \quad \boxed{(dB)^2 \approx dt}$$

14.2 Τύπος του Ito

Έστω S μία στοχαστική ανέλιξη που ακολουθεί τον τύπο: $dS = \mu dt + \sigma dB$, όπου μ, σ ποσότητες που μπορούν να περιέχουν το $t, B(t)$ και $f = f(t, S)$ μία συνάρτηση διαφορίσιμη και ως προς τις δύο μεταβλητές της. Ισχύει ο τύπος:

$$\boxed{df = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right] dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial S} dB}$$

14.3 Λυμένες Ασκήσεις

14.1 Αποδείξατε τις βασικές ιδιότητες των διαφορικών.

Λύση: (α) Η σχέση $(dt)^2 \approx 0$ προκύπτει από το ότι η ποσοότητα dt θεωρείται απειροστή.
(β) Η ποσότητα $dtdB$ είναι τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή της είναι:

$$E[dtdB] = dtE[dB] = dt \cdot 0 = 0$$

η διασπορά της είναι:

$$V[dtdB] = (dt)^2 V[dB] = (dt)^2 dt = (dt)^3 \simeq 0$$

άρα η ποσότητα $dtdB$ έχει κατα μέσο όρο την τιμή 0, με διασπορά 0, άρα είναι πρακτικά μηδέν.
(γ) Η ποσότητα $(dB)^2$ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή. Έχουμε δείξει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι η μέση τιμή της είναι $E[(dB)^2] = dt$, ενώ η διασπορά της είναι: $V[(dB)^2] = \simeq 0$, άρα η ποσότητα $(dB)^2$ έχει κατα μέσο όρο την τιμή dt, με διασπορά 0, άρα είναι πρακτικά ίση με dt.

14.2 Αποδείξατε τον τύπο του Ito.

Λύση: Από τον τύπο του $Taylor$ για συνάρτηση δύο μεταβλητών, έχουμε για την $f(t,S)$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial S}dtdS \quad \Longrightarrow$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}(\mu dt+\sigma dB)+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\mu dt+\sigma dB)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial S}dt(\mu dt+\sigma dB)$$

·όπου αντικαταστήσαμε το dS με το ίσο του. Εκτελώντας τις πράξεις, έχουμε:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}\mu dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma dB + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\mu^2(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2(dB)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\mu\sigma dtdB +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial S}\mu(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial S}\sigma dtdB$$

χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των διαφορικών έχουμε:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}\mu dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma dB + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\mu^2\cdot 0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2\cdot dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\mu\sigma\cdot 0 +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial S}\mu\cdot 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial t\partial S}\sigma\cdot 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow df = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial S}dB$$

14.3 Έστω $B(t)$ μία τυπική κίνηση $Brown$. Υπολογίσατε το διαφορικό $dB^4(t)$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Ito. Ορίζουμε την συνάρτηση:

$$F(t,S) = S^4 \text{ με } S = B(t) \Rightarrow dS = dB(t) = 0\cdot dt + 1\cdot dB(t)$$

και άρα $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Για να εφαρμόσουμε τον τύπο του Ito, υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial S} = 4S^3 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 12S^2$$

Επομένως:

$$dF = \left[0 + 0\cdot 4S^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 12S^2\right]dt + 1\cdot 4S^3 dB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dB^4(t) = 6B^2(t)dt + 4B^3(t)dB(t)$$

όπου θέσαμε $S = B(t)$.

14.4 Έστω $B(t)$ μία τυπική κίνηση $Brown$ και $f(t,B(t) = e^{\mu t+\sigma B(t)}$, υπολογίσατε την ποσότητα: df/f.

Λύση: ορίζουμε $S = \mu t + \sigma B(t)$, οπότε $dS = \mu dt + \sigma dB(t)$ και $f = e^S$. Άρα,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial S} = e^S \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = e^S$$

Από τον τύπο του Ito έχουμε:

$$df = \left[\mu e^S + \frac{1}{2}\sigma e^S\right] dt + \sigma e^S dB = e^S \left(\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma\right] dt + \sigma dB\right) = f\left(\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma\right] dt + \sigma dB\right) \Rightarrow$$

$$\frac{df}{f} = \left[\mu + \frac{1}{2}\sigma\right] dt + \sigma dB$$

14.5 Έστω $B(t)$ μία τυπική κίνηση $Brown$ και $f(t, B(t)) = 2B^3(t) + t$, υπολογίσατε την ποσότητα: df.

Λύση: Ορίζουμε $S = B(t)$, οπότε $dS = 0 \cdot dt + 1 \cdot dB(t) = \mu dt + \sigma dB(t)$ με $\mu = 0$, $\sigma = 1$ και $f = 2S^3 + t$. Άρα,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 6S^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 12S$$

Από τον τύπο του Ito έχουμε:

$$df = \left[1 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 12B(t)\right] dt + 1 \cdot 6 \cdot B^2(t)dB(t) = [1 + 6B(t)]dt + 6B^2(t)dB(t)$$

14.6 Εάν ένα περουσιακό στοιχείο ακολουθεί την επανερχόμενη στο μέσο, στοχαστική ανέλιξη $W(t)$, δηλαδή ικανοποιεί την σχέση:

$$dW(t) = \lambda(\hat{\mu} - W(t))dt + \hat{\sigma} W(t)dB(t)$$

Βρείτε μία σχέση για το διαφορικό της ποσότητας:

$$F = \frac{1}{1-t} + e^{W(t)} + t^2$$

Λύση: Έχουμε ότι: $dW(t) = \mu dt + \sigma dB(t)$ με $\mu = \lambda(\hat{\mu} - W(t))$ και $\sigma = \hat{\sigma} W(t)$. Για να εφαρμόσουμε τον τύπο του Ito, υπολογίζουμε κατ' αρχάς τις παραγώγους:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{(1-t)^2} + 2t \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial W} = e^W \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial W^2} = e^W$$

και άρα

$$dF = \left[\frac{1}{(1-t)^2} + 2t + \lambda(\hat{\mu} - W(t))e^{W(t)} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 W^2(t) e^{W(t)}\right] dt +$$

$$+ \hat{\sigma} W(t) e^{W(t)} dB(t)$$

14.7 Βρείτε στοχαστική ανέλιξη $X(t)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$dX(t) = X^3(t)dt - X^2(t)dB(t)$$

$\mu\varepsilon$ $X(0) = 1$.

Λύση: Θεωρούμε ότι $X(t) = F(t, S)$, όπου F άγνωστη συνάρτηση προς προσδιορισμόν, με $S = B(t)$, οπότε $dS = 0 \cdot dt + 1 \cdot dB(t) =\mu dt + \sigma dB(t)$ με $\mu = 0$, $\sigma = 1$. Από τον τύπο του Ito έχουμε:

$$dX(t) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + 0 + \frac{1}{2}1^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right] dt + 1 \cdot \frac{\partial F}{\partial S} dB(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dX(t) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right] dt + \frac{\partial F}{\partial S} dB(t)$$

ακόμα ισχύει από τα δεδομένα της άσκησης, ότι: $dX(t) = F^3(t, S)dt - F^2(t, S)dB(t)$, άρα

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = F^3(t, S) \tag{14.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = -F^2(t, S) \tag{14.2}$$

Επιλύοντας την 14.2 έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = -F^2(t, S) \Rightarrow \frac{\partial F}{F^2} = -\partial S \Rightarrow \frac{\partial F}{F^2} = - \Rightarrow \int \frac{\partial F}{F^2} = - \int \partial S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F^{-1}}{-1} = -S + C \Rightarrow F(t, S) = \frac{1}{S - C}$$

Αντικαθιστώντας στην 14.1 έχουμε:

$$0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(S - C)^3} = \frac{1}{(S - C)^3}$$

που ισχύει. Άρα η ζητουμένη ανέλιξη είναι:

$$X(t) = F(t, S(t)) = \frac{1}{S - C} = \frac{1}{B(t) - C}$$

Για να προσδιορίσουμε την σταθερά, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχική συνθήκη. Διαδοχικά έχουμε:

$$X(0) = 1 \Rightarrow X(0) = \frac{1}{B(0) - C} = 1 \Rightarrow \frac{1}{0 - C} = 1 \Rightarrow C = -1$$

οπότε τελικά:

$$\boxed{X(t) = \frac{1}{B(t) + 1}}$$

Κεφάλαιο 15

Υπολογισμός Στοχαστικών Ολοκληρωμάτων

Για να υπολογίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα: $\int \varphi(s)dB$ ακολουούμε τα εξής βήματα:

1. Διαλέγουμε μία συνάρτηση $F(t,S)$ έτσι ώστε:
   (α΄) Το $\int_0^T \frac{\partial F}{\partial S} dB(t)$ να είναι το ολοκλήρωμα που θέλουμε, δηλαδή $\frac{\partial F}{\partial S} = \varphi(S)$.
   (β΄) Τα ολοκληρώματα $\int_0^T \frac{\partial F}{\partial t} dt$, $\int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dB(t)$ να είναι υπολογίσιμα.
2. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Ito και αντικαθιστούμε το διαφορικό με ολοκλήρωμα.

Κεφάλαιο 16

$Black - Sholes$

16.1 $Portfolio$

Ένα απλό χαρτοφυλάκειο ($portfolio$) αποτελείται από μία μετοχή και ένα παράγωγο. Έχει την γενική μορφή:

$$P = P(t, S, F)$$

ή ειδικότερα:

$$P = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j S_j + \sum_{k=1}^{m} b_k F_k$$

όπου a_j οι χρηματικές μονάδες ανά μετοχή S_j και b_k οι χρηματικές μονάδες ανά παράγωγο F_k. ενα χαρτοφυλάκιο είναι θετικό όταν αγοράζουμε και αρνητικό όταν πουλάμε. Ένα χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο εάν

$$dP = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j dS_j + \sum_{k=1}^{m} b_k dF_k$$

Ένα χαρτοφυλάκιο είναι ακίνδυνο, ($risk - less$) εάν οι μεταβολές dP είναι προβλέψιμες, δηλαδή

$$dP = rPdt$$

όπου r, το αιτιοκρατικό επιτόκιο.

16.2 Υπολογισμός dP

Έστω ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί μία Γεωμετρική $Brown$:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

Τότε, για ένα παράγωγο $F = F(t, S)$, θα έχουμε:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dB$$

και άρα για ένα χαρτοφυλάκειο, αποτελούμενο από μία μετοχή και ένα παράγωγο, $P = P(t, S, F)$, θα ισχύει:

$$dP = \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S\frac{\partial P}{\partial S} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mu S\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\partial P}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2\right] dt +$$
$$+ \sigma S\frac{\partial P}{\partial S}dB + \sigma S\frac{\partial F}{\partial S}\frac{\partial P}{\partial F}dB + \sigma S\frac{\partial F}{\partial S}\cdot\sigma S\frac{\partial^2 P}{\partial S\partial F}dBdB$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι: $(dB)^2 = dt$, η προηγούμενη παράσταση γίνεται:

$$dP = \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S\left(\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S}\right) +\right.$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial F}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2$$
$$\left.\left(\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2\right)\right] dt +$$
$$+ \sigma S\left(\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial S}\right) dB(t)$$

16.3 Δ Χαρτοφυλακίου

Ορισμός 16.1 *Έστω $P = P(t, S, F)$ ένα χαρτοφυλάκιο. Η ποσότητα dP/dS ονομάζεται δέλτα του χαρτοφυλακίου.*

Ιδιότητα 16.1 *Ένα χαρτοφυλάκιο είναι χωρίς κίνδυνο εάν $\Delta = 0$.*

Απόδειξη: Το χαρτοφυλάκιο είναι χωρίς κίνδυνο, εάν το dP δεν έχει στοχαστικό μέρος. Δηλαδή εάν

$$\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} = 0$$

αλλά

$$\frac{dP}{dS} = \frac{\partial P}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial S}\cdot\frac{\partial S}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} = 0$$

16.4 Πρωταρχική $Black - Sholes$

Όταν ένα χαρτοφυλάκιο δεν έχει κίνδυνο θα ισχύει ότι: $dP = rPdt$. Εξισώνοντας με τον συντελεστή του dt από την προηγούμενη εξίσωση έχουμε και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\Delta = 0$, έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial P}{\partial F}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2\right) = rP$$

Θεωρώντας ότι $P = F - \lambda S$, έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial F} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial S} = -\lambda, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial F^2} = 0$$

αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = r(F - \lambda S)$$

αλλά επειδή έχουμε όχι-κίνδυνο, έχουμε:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial S} = 0 \Rightarrow -\lambda + 1 \cdot \frac{\partial F}{\partial S} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial F}{\partial S}$$

αντικαθιστώντας έχουμε τελικά:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF}$$

Ορισμός 16.2 *Κάθε παράγωγο $F(t, S)$, που ικανοποιεί την πρωταρχική $Black-Sholes$, λέγεται $tradeable$.*

16.5 Λυμένες Ασκήσεις

16.1 Δείξατε ότι το παράγωγο $F(t, S) = ce^{rt}$ είναι $tradeable$.

16.2 Βρείτε όλες τις σταθερες a, έτσι ώστε το παράγωγο $F(t, S) = S^a$ να είναι $tradeable$.

Λύση: Υπολογίζουμε καταρχάς τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \alpha S^\alpha \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = \alpha(\alpha - 1)S^{\alpha-2}$$

και αντικαθιστώντας στην πρωταρχική BS, έχουμε:

$$rS\alpha S^{\alpha-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \alpha(\alpha-1)S^{\alpha-2} = rS^\alpha \Rightarrow ra + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha(\alpha-1) = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha\right) = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{ή} \quad a = -\frac{2r}{\sigma^2}$$

16.3 Έστω $F = F(S)$ ένα χρονικά αμετάβλητο παράγωγο. Εάν είναι $tradeable$, τότε:

$$F(S) = c_1 S + c_2 S^{-\frac{r}{\sigma^2}}$$

Λύση: Αφού $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ η εξίσωση $Black - Sholes$ θα γίνει:

$$rS\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF \quad \Leftrightarrow \quad rSF'(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''(S) = rF$$

Για να την επιλύσουμε, θέτουμε $S = e^x$ και έχουμε:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dS} \cdot \frac{dS}{dx} = \frac{dF}{dS} \cdot e^x = \frac{dF}{dS} \cdot S = F'(S)S \tag{16.1}$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dS}\right)S + \frac{dF}{dS}\frac{dS}{dx} = \frac{d}{dS}\left(\frac{dF}{dS}\right)\frac{dS}{dx}S + \frac{dF}{dS}\frac{dS}{dx} =$$

$$= \frac{d^2F}{dS^2}\frac{dS}{dx}S + \frac{dF}{dS}\frac{dS}{dx} = \frac{d^2F}{dS^2}e^x S + \frac{dF}{dS}e^x = F''(S)S^2 + F'(S)S \tag{16.2}$$

Αντικαθιστώντας τις 16.1 και 16.2 στην $Black - Sholes$ έχουμε:

$$r\frac{dF}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx}\right) = rF(e^x)$$

Θέτοντας $G(x) = F(e^x)$ η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 G''(x) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)G'(x) - rG(x) = 0$$

πρόκειται για γραμμική ομογενή, δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Επιλύοντας, έχουμε για την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda - r = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad , \quad \lambda = -\frac{r}{\sigma^2}$$

οπότε τελικά:

$$G(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{r}{\sigma^2}x} \quad \Rightarrow \quad F(S) = c_1 S + c_2 S^{-\frac{r}{\sigma^2}}$$

Κεφάλαιο 17

Επίλυση $Black - Sholes - I$

17.1 Μετασχηματισμός $Black - Sholes$

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F}{\partial S} = rF$$

και την αρχική συνθήκη:

$$F\left(T, S_T\right) = f_T\left(S_T\right) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

Ζητάμε να βρούμε την συνάρτηση: $F(t, S)$. Θα την επιλύσουμε μέσω διαδοχικών κινήσεων που θα μας οδηγήσουν σε μία απλούστερη μορφή.

17.1.1 Κίνηση 1η

Θέτουμε

$$S = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln S$$

και η άγνωστη συνάρτηση γίνεται:

$$F(t, S) = F(t, e^x)$$

την τελευταία συνάρτηση την ονομάζουμε $V(t, x)$, δηλαδή $F(t, e^x) = V(t, x)$ και έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial S} \cdot e^x = \frac{\partial F}{\partial S} \cdot S$$

και

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right) \cdot S + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial S} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \frac{\partial S}{\partial x}\right) S + + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot S =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} S^2 + \frac{\partial F}{\partial S} \cdot S$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$ και αντικαθιστώντας, η πρωταρχική $Black - Sholes$ γίνεται:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial x} = rV$$

με άγνωστη πλέον την συνάρτηση $V(t,x)$.

17.1.2 Κίνηση 2η

Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό:

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \quad \Leftrightarrow \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

ορίζουμε:

$$W(\tau,x) = V\left(T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, x\right) = V(t,x)$$

και οι παράγωγοι γίνονται:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial t}\cdot\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right) + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot 0 = \frac{\partial V}{\partial t}\cdot\left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t}\cdot 0 + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot 1 = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Αντικαθιστώντας η πρωταρχική $Black - Sholes$ γίνεται:

$$\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial W}{\partial x} = rW \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial \tau} + \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial W}{\partial x} = \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right)rW \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1-k)\frac{\partial W}{\partial x} = -kW$$

με $k = 2r/\sigma^2$. Οπότε, τελικά, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial W}{\partial x} - kW \tag{17.1}$$

17.1.3 Κίνηση 3η

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

$$W(\tau,x) = e^{\alpha x + \beta \tau}u(\tau,x)$$

όπου α, β σταθερές προς προσδιοριαμό και $u(\tau, x)$ μία νέα άγνωστη συνάρτηση. Προκειμένου να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (17.1) υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = e^{\alpha x+\beta\tau}\left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)$$

αντικαθιστώντας στην (17.1) έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2\alpha + k - 1)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\alpha^2 + \alpha(k-1) - k - \beta\right) u = 0$$

Διαλέγω τα α, β έτσι ώστε

$$2\alpha + k - 1 = 0 \quad , \quad \alpha^2 + \alpha(k-1) - k - \beta = 0$$

οπότε

$$\alpha = \frac{1-k}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

και η (17.1) γίνεται:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{17.2}$$

με αρχική συνθήκη:

$$\begin{aligned} u(0,x) &= e^{-\alpha x - \beta\cdot 0} W(0,x) = \\ &= e^{-\alpha x} V(T,x) = \\ &= e^{-\alpha x} F\left(T, e^x\right) = \\ &= e^{-\alpha x} F(T,S) = e^{-\alpha x} f_T(S) \end{aligned}$$

17.2 Τελική Λύση

Η εξίσωση 17.2 είναι η γνωστή από την φυσική εξίσωση της διάδοσης της θερμότητος και η λύση της δίνεται από την συνέλιξη:

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{\frac{-(y-x)^2}{4\tau}} \cdot u(0,y)dy$$

οπότε διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} F(t,S) &= F\left(t, e^x\right) = V(t,x) = \\ &= W(\tau, x) = e^{ar+\beta x} u(\tau, x) = \end{aligned}$$

$$= e^{\alpha\tau+\beta x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{\frac{-(y-x)^2}{4\tau}}u(0,y)dy =$$

$$= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\cdot e^{-\frac{\left(z-\ln S-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\cdot F\left(T,S_T\right)dz$$

και τελικά έχουμε την λύση της εξίσωσης $Black - Sholes$

$$\boxed{F(t,S) = e^{-r(T-t)}E[f_T(S_T)]}$$

Κεφάλαιο 18

Ευρωπαϊκό δικαίωμα

Στο κεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε την λύση της *Black-Sholes* στην περίπτωση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος, με τα εξής στοιχεία:

- T, *maturity time*
- K, *strike price*
- S_t ακολουθεί την γεωμετρική *Brown*.

Γνωρίζουμε ότι το κέρδος f_T, την χρονική στιγμή T, είναι $S_T - K$, όταν $S_T > K$ και μηδέν όταν $S_T < K$. Δηλαδή:

$$f_T = F(T, S_T) = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$$

Γνωρίζουμε ακόμα, ότι όταν η S_t ακολουθεί την γεωμετρική *Brown*, τότε:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right]$$

Ζητάμε να υπολογίσουμε την τιμή:

$$F(t, S) = c(t) = e^{-r(T-t)}E[f_T], \quad 0 \le t \le T$$

Δηλαδή, ουσιαστικά την μέση τιμή $E[f_T]$. Διαδοχικά, έχουμε:

$$E[f_T] = E[\max\{S_T - K, 0\}] = E[\max\{S_t e^x - K, 0\}]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι:

$$x = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad S_T = e^x S_t$$

επομένως

$$E[\max\{S_t e^x - K, 0\}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{S_t e^x - K, 0\} p(x) dx \tag{18.1}$$

όπου $p(x)$ η συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος της κανονικής κατανομής με μέση τιμή και διασπορά ίσες με:

$$\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \quad , \quad \sigma^2(T-t)$$

αντίστοιχα, δηλαδή

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \cdot e^{-\dfrac{\left[x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}$$

Δεδομένου τώρα ότι $S_t e^x - K > 0$ εάν και μόνο εάν $x > \ln(K/S_t)$, η 18.1 γίνεται:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \max\{S_t e^x - K, 0\} p(x)dx = \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{+\infty} (S_t e^x - K)p(x)dx =$$

$$= \underbrace{\int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{+\infty} (S_t e^x)p(x)dx}_{I_2} - \underbrace{\int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{+\infty} Kp(x)dx}_{I_1} = I_2 - I_1$$

18.1 Υπολογισμός Ολοκληρώματος I_1

Ας υπολογίσουμε πρώτα το ολοκλήρωμα I_1. Θα χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση:

$$y = \frac{x - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{18.2}$$

οπότε για $x = \ln(K/S_t)$, το κάτω άκρο του ολοκληρώματος γίνεται:

$$\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = \frac{-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = -d_2$$

όπου για d_2 θέσαμε

$$\boxed{d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}}$$

και επίσης:

$$dy = \frac{dx}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \sigma\sqrt{T-t}dy$$

άρα, αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα τελικά γίνεται:

$$I_1 = K\int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{+\infty} p(x)dx = K\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{y^2}{2}} dy =$$

$$= K(1 - \Phi(-d_2)) = K(1 - (1 - \Phi(d_2))) = K\Phi(d_2)$$

18.2 Υπολογισμός Ολοκληρώματος I_2

Ας υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα I_2.

$$I_2 = S_t \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{+\infty} e^x p(x)dx = S_t \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{+\infty} \frac{\exp\left(x - \frac{\left(x-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}}dx$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση 18.2 ή ισοδύναμα:

$$x = \sigma y\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\left(2r - \sigma^2\right)(t-T) \Leftrightarrow dx = \sigma\sqrt{T-t}dy$$

και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$I_2 = S_t \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{\exp\left(r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-T) + \sigma y\sqrt{T-t} - \frac{y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}dy =$$

$$= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2\sigma y\sqrt{T-t} + \sigma^2(t-T))} dy =$$

$$= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T-t})^2} dy$$

χρησιμοποιώντας έναν νέο μετασχηματισμό: $z = y - \sigma\sqrt{T-t}$, το κάτω όριο της ολοκλήρωσης θα γίνει $-d_2 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1$, όπου

$$\boxed{d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}}$$

το διαφορικο θα γίνει $dz = dy$ και το ολοκλήρωμα:

$$I_2 = S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = S_t e^{r(T-t)}(1 - \Phi(-d_1)) =$$

$$= S_t e^{r(T-t)}(1 - (1 - \Phi(d_1))) = S_t e^{r(T-t)}\Phi(d_1)$$

18.3 Τελικός τύπος

$$\boxed{c(t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)}$$

Ευρετήριο