ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Η $X(t)$ λέγεται γενική κίνηση Brown

εάν:

i) $X(0)=0$

ii) $X(t)$ stationary independent increments

iii) $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$

Εάν $\sigma=1$ έχουμε την τυπική κίνηση Brown.

Προκύπτει εάν στον τυχαίο περίπατο θέσουμε

$$y = \sigma \sqrt{\Delta t}$$

ΚΙΝΗΣΗ BROWN ΜΕ DRIFT

$$X(t) = \underbrace{\mu t}_{\text{drift}} + \sigma B(t)$$

$$E(X(t)) = E(\mu t) + E(\sigma B(t)) = \mu t + \sigma \cdot 0 = \boxed{\mu t}$$

$$V(X) = V(\sigma B(t)) = \sigma^2 V(B(t)) = \boxed{\sigma^2 t}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ
ΚΙΝΗΣΗ BROWN

$$\boxed{X(t) = e^{B(t)}}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ BROWN ΜΕ DRIFT

$$\tilde{X} = \mu t + \sigma B(t)$$

$$\boxed{X(t) = e^{\tilde{X}(t)} = e^{\mu t + \sigma B(t)}}$$

Άσκηση: Εάν $\tilde{X}(t) = \mu t + \sigma B(t)$, βρείτε $E[X(t)]$, όπου $X(t) = e^{\tilde{X}(t)}$.

Άσκηση: Έστω $Y(t) = \mu t + \sigma B(t)$ και $X(t) = e^{Y(t)}$. Βρείτε: $E[X(t) \mid X(u)]$ όταν $0 \leq u \leq s$.

Άσκηση: Έστω $B(t)$ τυπική κίνηση Brown και $t_1, t_2 > 0$ δύο χρονικές στιγμές. Βρείτε την κατανομή της κίνησης:

$$B(t_1) + B(t_1 + t_2)$$

Άσκηση: Έστω $X(t)=\mu t+\sigma B(t)$ μία Brownian με drift. Εάν $\Delta X = X(t+\Delta t)-X(t)$ Βρείτε $E[\Delta X]$, $V[\Delta X]$, $E[\Delta X^2]$

Λύση: $\Delta X = X(t+\Delta t)-X(t) = \mu(t+\Delta t)+\sigma(B(t+\Delta t))$
$-\mu t-\sigma B(t) \;=\; \mu\Delta t+\sigma\left(B(t+\Delta t)-B(t)\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta X = \mu\Delta t+\sigma\Delta B}$$

$$E[\Delta X] = \mu\Delta t+\sigma E(\Delta B) = \mu\Delta t+\sigma\cdot 0 = \boxed{\mu\Delta t}$$

$$V[\Delta X] = \sigma^2 V(\Delta B) = \boxed{\sigma^2\Delta t}$$

(αφού $\Delta B = B(t+\Delta t)-B(t) \sim N(0,\Delta t)$)

$$E[\Delta X^2] = E\left[(\mu\Delta t+\sigma\Delta B)^2\right] =$$
$$= E\left[\mu^2\Delta t^2+\sigma^2(\Delta B)^2+2\mu\sigma\Delta B\cdot\Delta t\right]$$

αλλά $(\Delta t)^2 \simeq 0 \Rightarrow \;=\; \sigma^2 E(\Delta B^2)+2\mu\sigma E(\Delta B\cdot\Delta t)$

$$\left.\begin{array}{l} E(\Delta B^2) = \Delta t \\ E[\Delta B\cdot\Delta t] = \Delta t\, E[\Delta B] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{E[\Delta X^2] = \sigma^2\Delta t}$$

Άσκηση Έστω $X(t)=\mu t+\sigma B(t)$ μια κίνηση Brown με drift. Ορίζουμε

$$T=\min\{t\geq 0,\ X(t)=a \text{ ή } X(t)=b\}$$

Δηλαδή την πρώτη χρονική στιγμή που η ανέλιξη εγκαταλείπει ένα διάστημα (a,b). Βρείτε την $P[\cancel{X}(T)=b\,|\,X(0)=x]$ με $a<x<b$. Δηλαδή η "έξοδος" να γίνει από το σημείο b.

ΛΥΣΗ: Ορίζουμε: $u(x)=P[X(T)=b\,|\,\cancel{X}(0)=x]$

$$\Rightarrow u(x)\overset{\text{Θ.Ο.Π}}{=}P[X(T)=b\,|\,X(0)=x+x_1]\,P[X(0)=x+x_1]+$$

$$+P[X(T)=b\,|\,X(0)=x+x_2]\,P[X(0)=x+x_2]+\dots$$

$$\dots = \sum_{\Delta X} P[X(T)=b\,|\,X(0)=x+\Delta X]\cdot$$

x_1,x_2 "κοντά" στο x

$$\cdot P[X(0)=x+\Delta X]=$$

$$=\sum_{\Delta X} u(x+\Delta x)\,P[X(0)=x+\Delta x]=E[u(x+\Delta x)]$$

άπειρο άθροισμα

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(x) = E\left[u(x+\Delta X)\right]}$$

Taylor $\Rightarrow \quad u(x+\Delta x) = u(x) + u'(x)\cdot\Delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\Delta x)^2 + \dots$

$$\Rightarrow \quad E\left\{u(x+\Delta X)\right\} = u(x) + u'(x)\,E[\Delta X] + \frac{1}{2}u''\,E[\Delta X^2] + \dots$$

$$= u(x) + u'(x)\,\mu\Delta t + \frac{1}{2}u''(x)\,\sigma^2\Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{u(x)} = \cancel{u(x)} + u'(x)\,\mu\cancel{\Delta t} + \frac{1}{2}u''(x)\,\sigma^2\cancel{\Delta t} \quad \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u'(x)\,\mu + \frac{1}{2}u''(x)\,\sigma^2 = 0$$ γραμμική ΔΕ ομογενής

λύνουμε διαφορική εξίσωση $\lambda\mu + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{2\mu}{\sigma^2} \quad \Longrightarrow$$

$$u(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}x} \quad \Longrightarrow$$

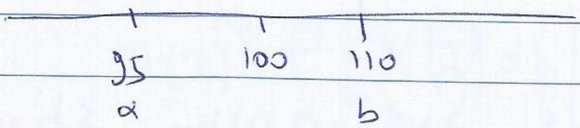
αλλά $u(a) = 0$, $u(b) = 1$

$$\boxed{P\left[X(T)=b \,\middle|\, X(0)=x\right] = \frac{e^{-\frac{2\mu x}{\sigma^2}} - e^{-\frac{2\mu a}{\sigma^2}}}{e^{-\frac{2\mu b}{\sigma^2}} - e^{-\frac{2\mu a}{\sigma^2}}}}$$

Άσκηση Μια μετοχή ακολουθεί Brownian με drift, με $\mu = \frac{1}{10}$, $\sigma^2 = 4$
Κάποιος αγοράζει στην τιμή 100 και πουλάει είτε πά 110 ή πά 95.
Ποιά είναι η πιθανότητα νά κερδίσει;

Λύση: Ζητάμε $P[X(T)=110 \mid X(0)=100]$

άρα $\mu = 0.1$, $\sigma = 2$, $\alpha = 95$, $b = 110$,
$x = 100$



$\Downarrow$

$$P[X(T)=110 \mid X(0)=100] = \frac{e^{-\frac{100}{20}} - e^{-\frac{95}{20}}}{e^{-\frac{110}{20}} - e^{-\frac{95}{20}}} = \boxed{0.419}$$

Άσκηση: Σε έναν αγώνα ποδηλάτου με δύο αθλητές, $Y(t)$ συμβολίζει τα πόσα δευτερόλεπτα προηγείται ο αθλητής A, όταν $100t\%$, του αγώνα έχουν διεξαχθεί. $\boxed{0 \le t \le 1}$

Εάν $Y(t)$ γενικευμένη κίνηση Brown με παράμετρο διασποράς σ, βρείτε:

① Την πιθανότητα να κερδίσει ο αθλητής A, εάν <u>στα μισά του αγώνα</u> προηγείται σ δευτερόλεπτα

② Αν ο αθλητής A κερδίσει τον αγώνα, με διαφορά σ δευτερολέπτων, ποιά είναι η πιθανότητα να προηγείτο στα μισά του αγώνα;