Risk-less Portfolio

Από Black-Sholes έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF - rS\frac{\partial F}{\partial S}$$

πρωταρχική Black-Sholes $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{\partial P}{\partial F}\left(rF - rS\dfrac{\partial F}{\partial S}\right) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \\ \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial F^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial S}\right)^2\right) = rP \\ \text{risk-less} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial S} = -\dfrac{\partial P}{\partial F}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial S} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + rF\frac{\partial P}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left[\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2\right] = rP$$

αλλά

$$\frac{\partial P}{\partial S} = -\frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial F\partial S} = -\frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\frac{\partial F}{\partial S} - \frac{\partial P}{\partial F}\frac{\partial^2 F}{\partial F\partial S}$$

και $\dfrac{\partial^2 F}{\partial F\partial S} = \dfrac{\partial}{\partial S}\left(\dfrac{\partial F}{\partial F}\right) = \dfrac{\partial}{\partial S}(1) = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial F\partial S} = -\frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{+\frac{\partial^2 P}{\partial F\partial S}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} = -\frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2}$$

και αντικαθιστώντας:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial S} + rF\frac{\partial P}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left[\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial F\partial S}\cdot\frac{\partial F}{\partial S}\right] = rP}$$

Black-Sholes για Call options

Call-option: δικαίωμα να αγοράσει την στιγμή T στην τιμή K. (δικαίωμα όχι υποχρέωση)

T: maturity time , K: strike price

S_t η τιμή της μετοχής την στιγμή t.

$S_T < K$ δεν εξασκείται το δικαίωμα.

$S_T > K$, εξασκείται $\Rightarrow$ κέρδος $= S_T - K$.

$\Rightarrow$ payoff $f_T = \max(S_T - K, 0)$

S_t ακολουθεί την γεωμετρική Brown

$\Downarrow$ από ιδιότητες

$$x = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right]$$

r σταθερό.

Από θεώρημα Black-Scholes έχουμε

$$F(t, S_t) = C(t) = e^{-r(T-t)} E[f_T]$$

↑ τιμή call (δικαιώματος) την $0 \le t \le T$

$$E[f_T] = E[\max(S_T - K, 0)] =$$

$$E[\max(S_t e^x - K, 0)] \quad , \text{αφού } x = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \max(S_t e^x - K, 0)\, p(x)\, dx =$$

$$= \int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{+\infty} (S_t e^x - K)\, p(x)\, dx =$$

διότι $S_t e^x - K > 0 \Rightarrow x > \ln\frac{K}{S_t}$

$$= I_2 - I_1$$

όπου:

$$I_2 = \int_{\ln(K/S_t)}^{+\infty} S_t e^x p(x) dx$$

$$I_1 = \int_{\ln(K/S_t)}^{+\infty} K p(x) dx$$

και $p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\dfrac{\left(x-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}$

θέτουμε $y = \dfrac{x-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ και

$I_1 = K\displaystyle\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$ ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\boxed{d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}$$

$= K\displaystyle\int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy = K\,\Phi(d_2)$

$I_2 = S_t \displaystyle\int_{\ln(K/S_t)}^{+\infty} e^{x} p(x)\, dx = \ldots$

$= S_t e^{r(T-t)} \displaystyle\int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(y-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2} dy =$

$$= S_t e^{r(T-t)} \int_{-d_2 - \sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1) \qquad \boxed{d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}}$$

ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$$c(t) = e^{-r(T-t)} (I_2 - I_1) =$$

$$= S_t \Phi(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

$$\Downarrow \text{ Black-Sholes}$$

Η τιμή του European call option την στιγμή t δίδεται από:

$$\boxed{c(t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)}$$

Black-Sholes

Άσκηση: Έστω ότι η τιμή της μετοχής είναι σταθερά 40 με strike 45 και mature time 4 μηνώ. Το επιτόκιο είναι $r = 0.03$ / έτος.

Μέσο κέρδος = 7% και τυπική απόκλιση 40%
Βρείτε την αξία του την στιγμή 0.

Λύση: $S_t = 40$, $K = 45$, $r = 0.03$

$T = 4/12$, $t = 0$, $\sigma = 0.4$

$$d_2 = \frac{\ln(40/45) + \left(0.03 - \frac{0.4^2}{2}\right)\left(\frac{4}{12} - 0\right)}{0.4\sqrt{4/12}} = -0.582184$$

$$d_1 = d_2 + 0.4\sqrt{1/3} = -0.351244$$

$$\Downarrow$$

$$c(t) = 40\,\Phi(-0.351244) - 45\,e^{-0.03(1/3)}\,\Phi(-0.582184) =$$

$$= 40 \cdot 0.3627 - 44.55 \cdot 0.2802213 =$$

$$= 2.023617$$