Portfolio

Αποτελείται από options και securities (derivative)

$$P = P(t, S, F)$$

$$P = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j S_j + \sum_{k=1}^{m} b_k F_k$$

α_j units of stock S_j, b_k units of the derivatives F_k

Θετικά όταν αγοράζουμε (long position)

αρνητικά όταν πουλάμε (short position)

π.χ. $P = 2F - 3S$

Ένα portfolio είναι αυτοχρηματοδοτούμενο εάν:

$$\boxed{dP = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, dS_j + \sum_{k=1}^{m} b_k \, dF_k}$$

2

Ένα χαρτοφυλάκιο είναι risk-less

εάν οι μεταβολές dP είναι προβλέψιμες

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{dP = rP\,dt}$$

r: ακινδυνο... επιτόκιο

Μία μετοχή S ακολουθεί μία G Brown:

$$\boxed{dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dB}$$

Ένα παράγωγο $F = F(t, S) \Longrightarrow$

$$dF = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial F}{\partial S}\,dB$$

Έστω $P = P(t, S, F)$ χαρτοφυλάκιο

μιάς μετοχής και ενός παραγώγου $\Longrightarrow$

$$dP=\Bigg[\frac{\partial P}{\partial t}+\underbrace{\mu S}_{\mu_1}\frac{\partial P}{\partial S}+\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\mu S\frac{\partial F}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)}_{\mu_2}$$

$$\cdot\frac{\partial P}{\partial F}+\frac{1}{2}\underbrace{\sigma^2S^2}_{\sigma_1^2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+\frac{1}{2}\underbrace{\sigma^2S^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)^2}_{\sigma_2^2}\Bigg]dt+$$

$$+\sigma S\frac{\partial P}{\partial S}dB+\sigma S\frac{\partial F}{\partial S}\frac{\partial P}{\partial F}dB+$$

$$+\sigma S\frac{\partial F}{\partial S}\cdot\sigma S\frac{\partial^2 P}{\partial S\partial F}dB\,dB$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $(dB)^2=dt$

Η παράσταση γίνεται:

$$dP=\Bigg[\frac{\partial P}{\partial t}+\mu S\left(\frac{\partial P}{\partial S}+\frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial F}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2\right)\Bigg]dt\quad+$$

$$+\sigma S\left(\frac{\partial P}{\partial S}+\frac{\partial P}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial S}\right)dB(t) \qquad (E)$$

④

<u>Ιδιότητα</u>: Το χαρτοφυλάκιο είναι risk-less εάν και μόνο εάν

$$\boxed{\frac{dP}{dS} = 0}$$

Πράγματι:

$$\frac{dP}{dS} = \frac{\partial P}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial S}\cdot\frac{\partial S}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S}$$

που είναι το diffusion στο dP

$\Rightarrow \frac{dP}{dS} = 0 \Rightarrow$ το dP δεν έχει στοχαστικό μέρος.

<u>Ορισμός</u>: Το $\frac{dP}{dS}$ ονομάζεται δέλτα του χαρτοφυλακίου P.

$\Rightarrow$ δέλτα $= 0 \Leftrightarrow$ δεν υπάρχει κίνδυνος όταν δεν υπάρχει κίνδυνος το

$dP = rPdt$ άρα από E

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial F}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)^2\right) = rP$$

πρωταρχική Black-Sholes.

Έστω $P = F - \lambda S$ τότε:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \,, \quad \frac{\partial P}{\partial F} = 1 \,, \quad \frac{\partial P}{\partial S} = -\lambda$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial F^2} = 0$$

αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = r(F - \lambda S)$$

αλλά επειδή έχουμε risk-less

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial F}\cdot\frac{\partial F}{\partial S} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda + 1\cdot\frac{\partial F}{\partial S} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\partial F}{\partial S}}$$

αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + rS\frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = rF}$$

Εξίσωση Black-Scholes

Κάθε παράγωγο $F(t,S)$ που είναι λύση της εξίσωσης BS λέγεται tradeable

Άσκηση: Το παράγωγο $F = c_1 e^{rt}$ είναι tradeable.

Άσκηση: Βρείτε όλες τις σταθερές α έτσι ώστε S^{a} tradeable

ΛΥΣΗ: $\frac{\partial F}{\partial S} = \alpha S^{\alpha-1}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = \alpha(\alpha-1) S^{\alpha-2}$

$$\Rightarrow r S \alpha S^{\alpha-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \alpha(\alpha-1) S^{\alpha-2} = r S^{\alpha}$$

$$\Rightarrow ra + \frac{1}{2}\sigma^2 \alpha(\alpha-1) = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha-1)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \text{ ή } \boxed{a = -\frac{2r}{\sigma^2}}$$

Άσκηση: Έστω $F=F(S)$ ένα παράγωγο που δεν εξαρτάται από τον χρόνο, τότε:

$$F(S)=c_1 S + c_2 S^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

Λύση: Η εξίσωση Black-Sholes είναι:

$$rS\frac{\partial F}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}=rF \iff$$

$$\iff rSF'+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''=rF$$

Θέτουμε $S=e^x$ και έχουμε

$$\frac{dF}{dx}=\frac{dF}{dS}\cdot\frac{dS}{dx}=\frac{dF}{dS}\cdot e^x=\frac{dF}{dS}S=F'S \quad (1)$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dS}\right)\cdot S+\frac{dF}{dS}\frac{dS}{dx}=$$

$$=\frac{d^2F}{dS^2}\cdot\frac{dS}{dx}\cdot S+\frac{dF}{dS}e^x=\frac{d^2F}{dS^2}\cdot e^x S+$$

$$+\frac{dF}{dS}e^x=F''S^2+F'S \quad (2)$$

$$(1), (2) \Longrightarrow r\frac{dF}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{d^2F}{dx^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{dF}{dx}\right) = rF(e^x) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 G''(x) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)G'(x) - rG(x) = 0$$

Γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda - r = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -r/\sigma^2$$

$$\Longrightarrow G(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{r}{\sigma^2}x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{F(S) = c_1 S + c_2 S^{-r/\sigma^2}}$$