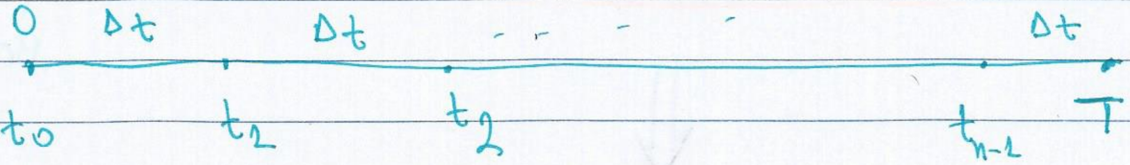
Στοχαστικά Ολοκληρώματα

Παράδειγμα

Χρονικό διάστημα $[0,T]$, χωρίζεται σε n υποδιαστήματα, μήκους $\Delta t = \frac{T}{n}$.



$t_k = k\Delta t \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Σε κάθε στιγμή t_k, γίνεται συναλλαγή.

Ποσότητα μετοχών που κατέχουμε	Τιμή μίας μετοχής
$q(t_0)$	$S(t_0)$
$q(t_1)$	$S(t_1)$
$\vdots$	$\vdots$
0	$S(t_n) = S(T)$

Την στιγμή T ρευστοποιούνται ΟΛΑ.

$$\text{Συνολικό κέρδος} = I_n = \sum_{k=0}^{n-1} q(t_k)\left[S(t_{k+1}) - S(t_k)\right]$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \sum_{k=0}^{n-1} q(t_k)\, \Delta S_k$$

Θεωρούμε ότι $q(\cdot)$ τυχαία μεταβλητή

και $\boxed{\Delta S_k = \mu S(t_k)\Delta t + \sigma S(t_k)\Delta B_k}$

Brown

$$\Downarrow$$

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} q(t_k)\left[\mu S(t_k)\Delta t + \sigma S(t_k)\Delta B_k\right] =$$

$$= \mu \boxed{\sum_{k=0}^{n-2} q(t_k) S(t_k)\Delta t} + \sigma \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} q(t_k) S(t_k)\Delta B_k}$$

Όταν $n \to \infty \Rightarrow \Delta t \to 0$ και

$$\sum_{k=0}^{n-1} q(t_k) S(t_k)\Delta t \longrightarrow \int_0^T \varphi(t)\, dt$$, φ τυχαία μεταβλητή

$$\sum_{k=0}^{n-1} q(t_k) S(t_k)\Delta B_k \longrightarrow \boxed{\int_0^T h(\cdot)\, dB(t)}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα του Ito

~~Είναι~~ Ορίζεται σαν το όριο, σύμφωνα με την Ευκλείδια norm, ολοκληρωμάτων Ito στοχαστικών step-functions.

$$I(f) = \int_{t=0}^{T} \overset{\text{τ.μ.}}{f(t,\omega)}\, \underset{\text{κίνηση Brown}}{dB(t)}$$

Για σταθερό f
Είναι μια στοχαστική ανέλιξη ως προς T.
Συμβολίζουμε $I(T)$.

Ιδιότητες: Γραμμική

$$\boxed{\int_0^T [\alpha f + b g]\, dB(t) = \alpha \int_0^T f\, dB(t) + b \int_0^T g\, dB(t)}$$

Κατανομή: Αν f non-random ακολουθεί την κανονική κατανομή.
Γενικά:

$$\boxed{E[I(f)] = 0}$$

$$\boxed{Var[I(f)] = \int_0^T E[f^2(t,\omega)]\, dt \quad \leftarrow \text{κανονικό ολοκλήρωμα}}$$

Ιδιότητα: η $I(T)$ είναι martingale:

$$\boxed{E\left[I(T) \mid \mathcal{F}(s)\right] = I(s) = \int_0^s f(t,\omega)\, dB(t), \text{ για } T>s}$$

Ιδιότητα:
product

$$\boxed{E\left[I(f)\,I(g)\right] = \int_0^T E[f\cdot g]\, dt}$$

non-random

$\Downarrow$

Ιδιότητα:

$$E\left[I^2(f)\right] = \int_0^T E[f^2]\, dt$$

Στοχαστικά Ολοκληρώματα μη τυχαίας μεταβλητής

$$I(t) = \int_0^t \rho(s)\, dB(s) \quad , \rho(s) \text{ συνάρτηση}$$

$\Rightarrow I(t) \sim N\left(0, Var(I(t))\right)$ όπου

$$\boxed{E\left[I(t)\right] = 0}$$

$$Var\left[I(t)\right] = \int_0^t \rho^2(s)\, ds$$

Υπολογισμός Στοχ. Ολοκληρωμάτων

① Διαφορικός συμβολισμός

$$G(x)=\int_0^x f(t)\,dt \Leftrightarrow \frac{dG}{dx}=f(x) \Leftrightarrow \boxed{dG=f(x)\,dx}$$

$$\Updownarrow$$

$$I(T)=\int_0^T f(t,\omega)\,dB(t) \Leftrightarrow \boxed{dI=f(T,\omega)\,dB(T)}$$

② Τύπος **Taylor**:

$$f(x)\simeq f(\overset{x_0}{a})+f'(\overset{x_0}{a})(x-\overset{x_0}{a})+\frac{f''(a)}{2!}(x-\underset{x_0}{a})^2+$$

$$\Updownarrow \quad x\to \overset{x_0}{\cancel{a}}+h$$

$$f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)\,h+\frac{f''(a)}{2!}\,h^2+\cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta f(x_0)\simeq f'(x_0)\,\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\cdots$$

Στην περίπτωση ~~των~~ δύο μεταβλητών έχουμε:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot\cdot)(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f = f(x_0,y_0) + \frac{1}{p!}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x} \cancel{+\frac{\partial}{\partial y}}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^p}$$

$$\Updownarrow \quad \begin{matrix} x \to x_0 + h \\ y \to y_0 + k \end{matrix}$$

$$f(x_0+h, y_0+h) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk$$

$$\Updownarrow \quad \begin{matrix} h = \Delta x \\ k = \Delta y \end{matrix} \qquad \Delta f = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0,y_0)$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy}$$

Απορίες

4/2,4,5   5η/4

Τύπος του Ito

Έστω $f(t,S)$ και $dS = \mu dt + \sigma dB$

$$\Downarrow$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial S} dt\, dS \Longrightarrow$$

$$df = f_S(\mu dt + \sigma dB) + f_t dt + \frac{1}{2} f_{SS}(\mu dt + \sigma dB)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} f_{tt}(dt)^2 + f_{tS}\, dt(\mu dt + \sigma dB) =$$

$$= f_S \mu dt + f_S \sigma dB + f_t dt + \frac{1}{2} f_{SS}\, \mu^2 \underbrace{(dt)^2}_{\to 0} + \frac{1}{2} f_{SS}$$

$$\sigma^2 \underbrace{(dB)^2}_{dt} + f_{SS}\mu\sigma \underbrace{dt\,dB}_{\to 0} + \frac{1}{2} f_{tt} \underbrace{(dt)^2}_{\to 0} + f_{tS}\mu \underbrace{(dt)^2}_{\to 0} +$$

$$+ \sigma f_{tS} \underbrace{dt\,dB}_{\to 0}.$$

αλλά $(dt)^2 \simeq 0$

$$E[dt\,dB] = dt\,E[dB] = \Delta t\,E[\Delta B] = \Delta t\,E\left[\underset{u \to 0}{B(t+u) - B(t)}\right] = 0$$

$$V[dt\,dB] = (dt)^2 Var[dB] = (dt)^2 dt = (dt)^3 \simeq 0$$

άρα η ποσότητα $dt \cdot dB$ είναι πρακτικά <u>μηδέν</u>

Από <u>άσκηση</u>: $E[B^2] = t$, $Var[B^2] = 2t^2$

$\Rightarrow E[(dB)^2] = dt$

$V[(dB)^2] = 2(dt)^2 \simeq 0$ $\Rightarrow$ άρα κατά μέσο όρο

$\boxed{(dB)^2 \simeq dt}$

όλα μαζί είναι:

	dt	dB
dt	0	0
dB	0	dt

Αντικαθιστώντας

$\Downarrow$

$$\boxed{df = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right] dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial S} dB}$$

$\Uparrow$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΙΤΟ

<u>Προσοχή</u>: τα μ και σ μπορεί να είναι συναρτήσεις των S, t ή $B(t), t$