

Μάθημα 7^ο

Η μετάβαση στη Νεοκλασική Θεωρία του Finance -Συνέχεια

Νίκος Στραβελάκης

ΤΟΕ –ΕΚΠΑ

Φθινόπωρο 2024

Σκοπός και Περιεχόμενα του Μαθήματος

Την προηγούμενη φορά είδαμε το πρώτο βασικό υπόδειγμα ένταξης της αποτίμησης κεφαλαιακών τίτλων στη νεο-κευνσιανή και κατ' επέκταση τη νεοκλασική θεωρία.

Αφορμή ήταν η προσπάθεια προσδιορισμού της Κευνσιανής καμπύλης ζήτησης «προτίμησης ρευστότητας» και κατ' επέκταση ζήτησης χρήματος. Σε αυτό το πλαίσιο είδαμε πώς η αποστροφή στο κίνδυνο συνδυάζεται με την υποκειμενική θεωρία της χρησιμότητας και την κανονική κατανομή των τιμών. Δύο ιδέες που πηγαινούν πίσω στο 18^ο αιώνα με το άρθρο του Bernoulli και τις αρχές του 20^ο με τη διατριβή του Bachelier.

Όπως είναι φυσιολογικό η όλη συζήτηση δεν ξέφυγε από την αντιπαράθεση νεοκλασικών-νεοκευνσιανών για το σχήμα της καμπύλης ζήτησης χρήματος και στην ουσία για την έννοια του «φυσικού» ή του «κανονικού» επιτοκίου. Αυτό εξηγεί και την αποστασιοποίηση του Friedman από τα στοχαστικά υποδείγματα αποστροφής στο κίνδυνο.

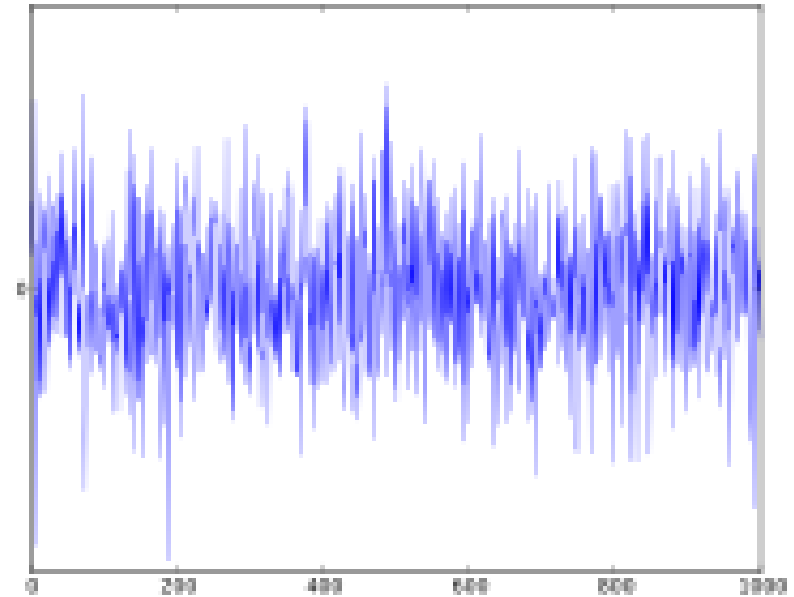
Σήμερα θα δούμε ότι παρόλο που σημαντικοί νεοκλασικοί οικονομολόγοι όπως ο Samuelson δεν συμμερίζονται τις απόψεις του Friedman για το στοχαστικό προσδιορισμό των τιμών των χρηματοπιστωτικών τίτλων χρησιμοποίησαν μοντέλα «ουδετερότητας στον κίνδυνο» στην προσπάθειά τους να εντάξουν τη νεοκλασική ισορροπία στις αγορές χρήματος και κεφαλαίου.

Παράλληλα τα μοντέλα αποστροφής στον κίνδυνο CAPM και APT έδωσαν μια διαφορετική διάρθρωση των αποδόσεων. Το τελευταίο πυροδότησε μια μεγάλη συζήτηση γύρω από τη «υπόθεση των αποτελεσματικών αγορών» όπως θα δούμε ακροθιγώς σήμερα την αναλυτικά την επόμενη φορά. Ας τα πάρουμε από την αρχή.

Το Υπόδειγμα Martingale του Samuelson

Η Martigue είναι μια πόλη στη Προβηγκία οι κάτοικοι της οποίας διπλασιάζουν το στοίχημα κάθε φορά που χάνουν σε ένα παιχνίδι κορώνα γράμματα. Στα Γαλλικά η λέξη Martigue είναι συνώνυμη του arbitrage.

“White Noise” είναι ένα τυχαίο «σήμα» που έχει την ίδια ένταση σε διαφορετικές συχνότητες. Σε μορφή κύματος το «White Noise» μοιάζει όπως στη φωτογραφία όταν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Με άλλα λόγια είναι συνώνυμο του Brownian Motion που συζητήσαμε στο προηγούμενο μάθημα.



The Law of Iterated Expectations (ο νόμος της επαναλαμβανόμενη μαθηματικής ελπίδας): ο νόμος της επαναλαμβανόμενης μαθηματικής ελπίδας μας λέει ότι η προσδοκώμενη αξία μιας τυχαίας μεταβλητής είναι ίση με το άθροισμα των προσδοκώμενων τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής υπό τη συνθήκη μιας δεύτερης τυχαίας μεταβλητής. Ο νόμος μας λέει ότι η προσδοκώμενη έκβαση ενός γεγονότος μπορεί να υπολογιστεί από τις πιθανές εκβάσεις του γεγονότος αυτού.

Ας πάρουμε το παράδειγμα των κατοίκων της Martigue. Η πιθανότητα ένα νόμισμα να έρθει κορώνα ή γράμματα είναι $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι οι κάτοικοι παίζουν ένα ευρώ στοίχημα και αποχωρούν από το παιχνίδι μόλις κερδίσουν ενώ διπλασιάζουν άμα χάσουν τότε μετά από η επαναλήψεις οι πιθανότητες του πλούτου ενός παίκτη είναι οι ακόλουθες : 1) Είναι 1 ευρώ με πιθανότητα 50%, 2) $-2^n + 1$ με πιθανότητα 50% (γιατί;).

Ποια είναι η μαθηματική ελπίδα του παιγνίου την περίοδο W_{n+1} με δεδομένη την περίοδο W_n .

Αν έχουμε κερδίσει ισχύει $E(W_{n+1}|W_n = 1) = 1 = W_n$

Αν δεν έχουμε κερδίσει και παίζουμε ακόμα $P(W_{n+1} = 1|W_n = -2^n + 1) = \frac{1}{2}$

ή $P(W_{n+1} = -2^{n+1} + 1 | W_n = -2^n + 1) = \frac{1}{2}$

Άρα η μαθηματική ελπίδα στη δεύτερη περίπτωση είναι

$$E(W_{n+1}|W_n) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-2^{n+1} + 1) = -2^n + 1 = W_n$$

Σε όλες τις περιπτώσεις η μαθηματική ελπίδα της μελλοντικής τιμής είναι η τρέχουσα τιμή. Αυτό κάνει το συγκεκριμένο στοίχημα Martingale. Για να υπάρξει αυτό το αποτέλεσμα έχουμε υποθέσει ότι οι μεταβλητές ακολουθούν τυχαίο περίπατο και οι κατανομές των μεταβλητών είναι iid (identically independently distributed).

Ο Samuelson επιχειρεί να επεκτείνει αυτές τις υποθέσεις στην αποτίμηση μετοχών.

Στο άρθρο του “Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly” (1965) γράφει

“In competitive markets there is a buyer for every seller. If one could be sure that a price will rise, it would have already risen.” Arguments like this are used to deduce that competitive prices must display price changes over time, $X_{t+1} - X_t$, that perform a random walk with no predictable bias.

Στο άρθρο του “Proof That Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly” (1973)
ο Samuelson ισχυρίζεται ότι:

variability or riskiness). The present contribution shows that such observable patterns can be deduced rigorously from a model which hypothesizes that a stock's present price is set at the expected discounted value of its future dividends, where the future dividends are supposed to be random variables generated according to any general (but known) stochastic process. This fundamental theorem follows by

Μέχρι εδώ τα πράγματα είναι προφανή. Αφού τα μερίσματα είναι μια τυχαία μεταβλητή και ο συντελεστής προεξόφλησης είναι το φυσικό επιτόκιο που είναι σταθερό ή σχετικά σταθερό τότε η τιμή ενός χρηματοπιστωτικού τίτλου είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών της ροών.

Όμως στο υπόδειγμα του Samuelson οι επενδυτές αυτοί είναι «αδιάφοροι στο κίνδυνο». Ο λόγος είναι ότι οι επενδυτές ενδιαφέρονται για τις τιμές της επόμενης περιόδου και όχι τις τιμές στο διηνεκές. Αυτό μπορεί να ισχύει στη στρατηγική τοποθέτησης στοιχημάτων σε ένα παιχνίδι κορώνα γράμματα αλλά όχι στο υπόδειγμα (Samuelson 1965, 1973).

Επενδυτές με αποστροφή στο κίνδυνο ενδιαφέρονται για την έλλειψη σειριακής συσχέτισης ανάμεσα στις τιμές στο διηνεκές και όχι μόνο στην επόμενη περίοδο. Η λογική είναι ότι προσπαθούν να υπολογίσουν το συνολικό κίνδυνο που συνοδεύει τη διακράτηση ενός χρηματοπιστωτικού τίτλου και όχι μόνον το κίνδυνο της επόμενης περιόδου.

Η μεθοδολογία που ακολούθησε ο Samuelson βόλευε στην επέκταση της νεοκλασικής ισορροπίας στις αγορές χρηματοπιστωτικών τίτλων γιατί η εξίσωση των αποδόσεων γίνεται γύρω από το φυσικό επιτόκιο. Άρα οι αποδόσεις όλων των τίτλων εξισώνονται και οι τιμές αντανακλούν τα θεμελιώδη μεγέθη.

Αν πάμε σε επενδυτές που «αποστρέφονται το κίνδυνο» οι ιδιότητες Martingale δεν ισχύουν κατ' ανάγκη. Συγκεκριμένα, ισχύουν μόνο στην περίπτωση που οι ρυθμοί μεγέθυνσης των μερισμάτων είναι «σειριακά ασυσχέτιστοι» τότε οι συντελεστές προεξόφλησης παραμένουν σταθεροί (Ohlson 1977).

Είναι μια ιδέα που προσομοιάζει τη «διαχρονική ισορροπία» (intertemporal equilibrium) των υποδειγμάτων Arrow-Debreu. Ο λόγος είναι ότι στα υποδείγματα αυτά η ισορροπία είναι η μέση τιμή όλων των πιθανών καταστάσεων σταθμισμένων με την πιθανότητα εμφάνισής τους. Μια διαδικασία που προσομοιάζει με το παιχνίδι που περιγράψαμε.

Όμως αυτή η διαδικασία υποθέτει ότι το μέλλον είναι μια επανάληψη του παρελθόντος. Είναι μια έννοια γνωστή ως το «εργώδες αξίωμα» (Davinson) <https://www.youtube.com/watch?v=YAbnuwsid4Q>. (Ποιες είναι οι αναλυτικές επιπτώσεις αυτής της υπόθεσης;)

Ας δούμε τώρα πώς δουλεύουν αυτές οι υποθέσεις στα υποδείγματα αποστροφής στο κίνδυνο CAPM και APT.

To Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Είναι ένα υπόδειγμα που αναπτύχθηκε στα μέσα της δεκαετία του 60 το διάστημα που κυκλοφόρησε το άρθρο του Samuelson με την ανεξάρτητη εργασία των Sharp, Lintner και Mossin.

Παρόλο που κατά γενική ομολογία είναι ένα υπόδειγμα που έχει απορριφθεί εμπειρικά (Fama 2004) συνεχίζει να αποτελεί τη βάση των προγραμμάτων MBA σε όλο το κόσμο.

Το υπόδειγμα είναι μια προσπάθεια επέκτασης της θεωρίας «επιλογής χαρτοφυλακίου» του Harry Markowitz σε ένα υπόδειγμα ισορροπίας.

Βασίζεται σε τρεις υποθέσεις:

Η πρώτη υπόθεση λέει ότι οι επενδυτές παίρνουν αποφάσεις με βάση το μέσο και την «τυπική απόκλιση» (standard deviation) κάθε τίτλου. Αυτό σημαίνει ότι οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν την κανονική κατανομή (γιατί;).

Για αρκετούς θεωρητικούς της «σύγχρονης θεωρίας των επενδύσεων» η υπόθεση αυτή σημαίνει ότι όσο προσθέτουμε τίτλους σε ένα χαρτοφυλάκιο λόγω του «νόμου των μεγάλων αριθμών» η απόδοση του χαρτοφυλακίου θα ακολουθεί την κανονική κατανομή. Είναι μια αιτιολόγηση που βασίζεται στην παραδοχή ότι οι αποδόσεις των τίτλων που συμμετέχουν στο χαρτοφυλάκιο είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες. (τι συνεπάγεται αυτό για τη θεωρία του ανταγωνισμού;)

Με βάση την πρώτη υπόθεση η επιλογή τίτλων εμφανίζεται σαν μια άσκηση μεγιστοποίησης χρησιμότητας παρεμφερής αυτή που είδαμε στο άρθρο του Tobin (1958)

Συγκεκριμένα χρησιμοποιούν την ακόλουθη εξίσωση χρησιμότητας δευτέρου βαθμού (είναι σταθερή η αποστροφή στον κίνδυνο στο πλαίσιο αυτής της συνάρτησης χρησιμότητας;).

$$2.1 \quad U_j = a_0 + a_1 \cdot V_j + a_2 \cdot V_j^2$$
$$a_0, a_1 > 0, \quad -2 < a_2 < 0$$

Η εξίσωση ισοδυναμεί με την υπόθεση της κανονικής κατανομής. Αν την μετατρέψουμε σε εξίσωση μαθηματικής ελπίδας αφού τότε ισχύει

$$2.2 \quad E(u) = \sum_{j=1}^n h_j \cdot u_j, \quad \sum_{j=1}^n h_j = 1, \quad \text{substituting 2.1}$$
$$\rightarrow E(u) = \sum_{j=1}^n h_j \cdot (a_0 + a_1 \cdot V_j + a_2 \cdot V_j^2) = a_0 + a_1 \cdot E(V) + a_2 \cdot E(V^2)$$

Επειδή το άθροισμα των πιθανοτήτων ισούται με τη μονάδα, τότε από τη στατιστική ταυτότητα

$$E(V^2) \equiv (E(V))^2 + \sigma^2(V)$$

Η εξίσωση 2.2 παίρνει την ακόλουθη μορφή που είναι ανάλογη της κανονικής κατανομής (γιατί;)

$$2.3 \quad E(u) = a_0 + a_1 \cdot E(V) + a_2 \cdot (E(V))^2 + a_2 \cdot \sigma^2(V)$$

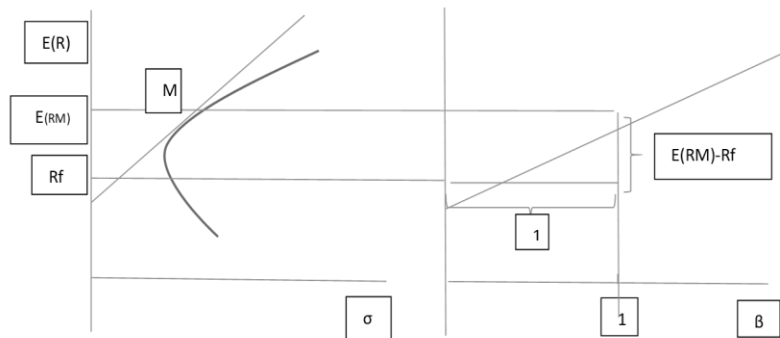
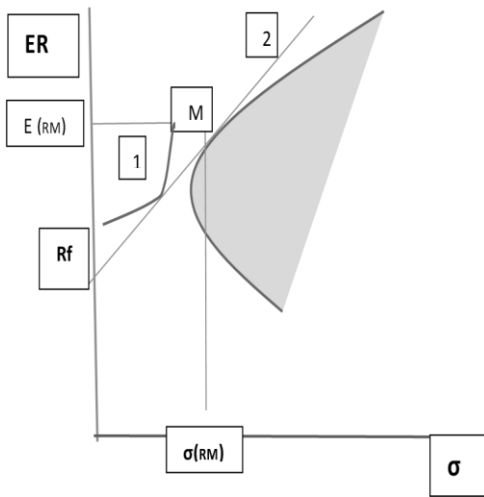
Η πρώτη υπόθεση του CAPM εξασφαλίζει ότι οι επενδυτές με βάση τις προτιμήσεις τους απέναντι στο κίνδυνο θα διαλέξουν ανάμεσα σε «αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια μέσης διακύμανσης». Με άλλα λόγια δεν θα αναλάβουν επιπλέον κίνδυνο χωρίς να εξασφαλίζουν τη μεγαλύτερη απόδοση

Όμως δεν φτάνει για να κλείσει το υπόδειγμα. Χρειάζονται δύο επιπλέον υποθέσεις.

Η δεύτερη υπόθεση λέει ότι όλοι οι επενδυτές έχουν τον ίδιο επενδυτικό ορίζοντα και οι κατανομές πιθανότητας των αποδόσεων είναι κοινές και γνωστές σε όλους.

Αυτή η ηρωική υπόθεση έχει ένα εξίσου ηρωικό αποτέλεσμα. Είναι το λεγόμενο «θεώρημα του διαχωρισμού». Αφού όλοι επενδυτές γνωρίζουν τις κατανομές των αποδόσεων και αποφασίζουν με βάση τη μέση απόδοση και την «τυπική απόκλιση» τότε όλοι οι επενδυτές θα έχουν **το ίδιο** χαρτοφυλάκιο τίτλων μεταβλητού εισοδήματος. Τα διαφορετικά επίπεδα αποστροφής στον κίνδυνο θα εκφραστούν στην αναλογία στην οποία θα διατηρήσουν τους τίτλους μεταβλητού εισοδήματος (risky assets) με έναν τίτλο σταθερού εισοδήματος χωρίς κίνδυνο (risk free asset). (τι σημαίνει αυτή η υπόθεση για τους συμμετέχοντες στην αγορά;)

Η τρίτη και τελευταία υπόθεση που «κλείνει» το υπόδειγμα απομακρύνει τους όποιους περιορισμούς στη ρευστότητα. Υπάρχει απεριόριστος δανεισμός στο «συντελεστή απόδοσης χωρίς κίνδυνο». Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι συμμετέχοντες στην αγορά δεν έχουν κίνδυνο default αλλά και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο παραμένει αμετάβλητο ανεξάρτητα από τη ζήτηση για δάνεια.



Έτσι φτάνουμε τα γνωστά σχήματα
και την εξίσωση του CAPM

$$2.5 \ E(R_j) = R_f + [E(RM) - R_f] \cdot \beta_j$$

Το Arbitrage Pricing Theory (APT)

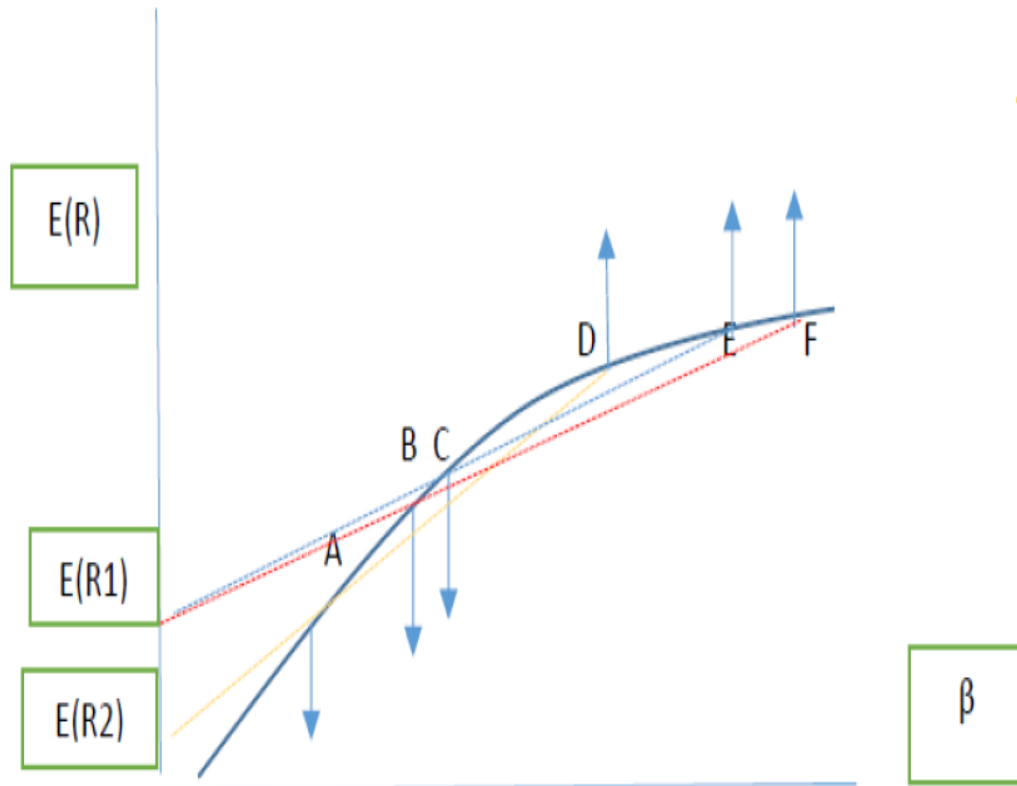
Το CAPM υπήρξε αντικείμενο κριτικής πριν ακόμη μαζευτούν τα δεδομένα της εμπειρικής του διάψευσης. Στις αρχές της δεκαετίας του 1970 ο Richard Roll έθεσε δύο σημαντικά ζητήματα που έθεταν εν αμφιβόλω την αξιοπιστία του CAPM.

Το πρώτο θεωρητικό. Ο Roll παρατήρησε ότι η θεωρία δεν προσδιορίζει ποιοι τίτλοι εξαιρούνται από το CAPM. Το δεύτερο εμπειρικό. Λόγω των περιορισμών στη διαθεσιμότητα στατιστικών δεδομένων δεν είναι δυνατό να συμπεριληφθούν όλοι οι επιθυμητοί τίτλοι στο «χαρτοφυλάκιο» αγοράς.

Προσπερνώντας το δεδομένο ότι είναι δύσκολο να χωνέψει κανείς ότι το «χαρτοφυλάκιο αγοράς» που υποτίθεται ότι διατηρούν όλοι οι επενδυτές είναι δύσκολο να προσδιοριστεί οι Roll και Ross πρότειναν εναλλακτικά το APT που διατηρεί την υπόθεση του “no arbitrage” σε συνθήκες ισορροπίας χωρίς να προσδιορίζει κάποιο χαρτοφυλάκιο αγοράς. (τι σημαίνει no arbitrage).

Η κεντρική ιδέα του APT είναι ότι οι αποδόσεις όλων των τίτλων μπορεί να προσδιοριστεί από έναν περιορισμένο αριθμό **κοινών** παραγόντων. Μάλιστα οι διαφοροποιήσεις στις τιμές και αποδόσεις χρηματοπιστωτικών τίτλων οφείλονται στη διαφορετική επίδραση απρόβλεπτων μεταβολών στους κοινούς παράγοντες στις τιμές των τίτλων.

Figure 2.3



Αν δεχθούμε για λόγους απλούστευσης ότι τις αποδόσεις του APT τους προσδιορίζει ένας κοινός παράγοντας αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση των αποδόσεων θα έχει την ακόλουθη μορφή.

$$2.9 R_j = E_j + \beta_j \cdot f + e_j$$

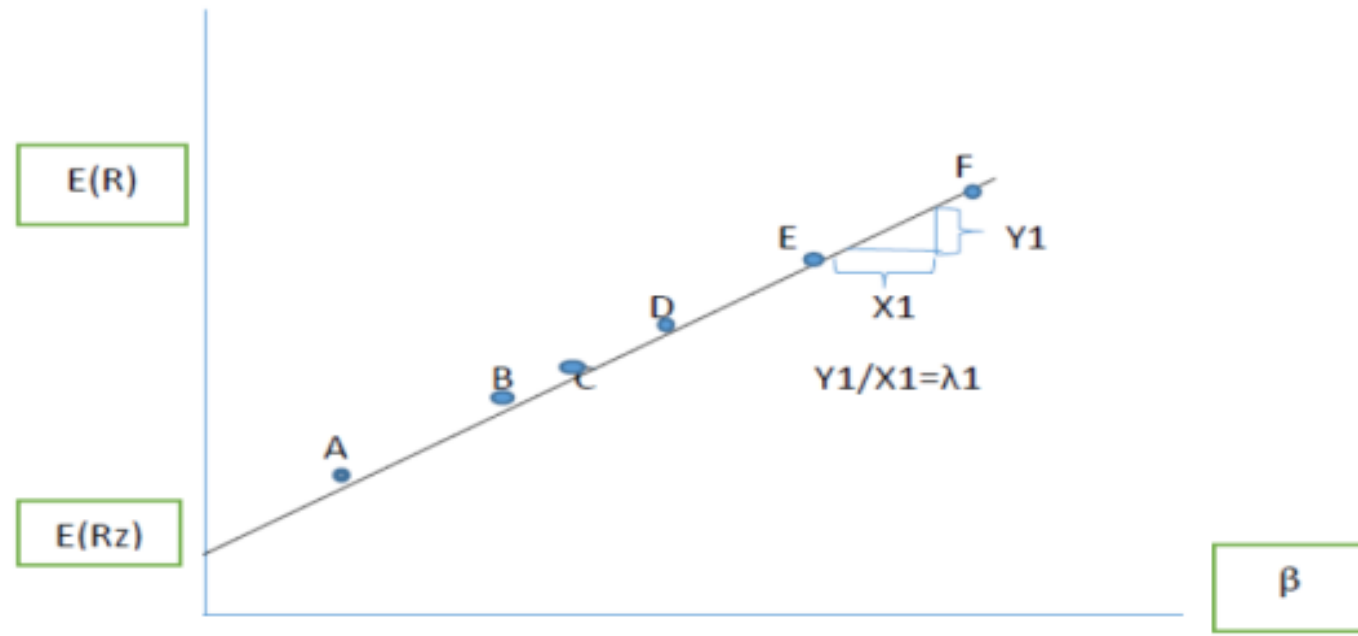
Άρα έχουμε αποκλείσει καθ' υπόθεση (by assumption) την επίδραση των αποδόσεων μιας μετοχής στις αποδόσεις των υπόλοιπων μετοχών αλλά ούτε και συσχέτιση ανάμεσα στις μεταβολές των αποδόσεων και στα υπόλοιπα που αντιπροσωπεύουν τον «ειδικό κίνδυνο».. Διαφορετικά δεν μπορεί να στοιχειοθετηθεί μια γραμμική σχέση της προηγούμενης μορφής ούτε ο υπολογισμός αμερόληπτων εκτιμητών (γιατί;)

Αυτό σημαίνει ότι ο ανταγωνισμός ανάμεσα στις επιχειρήσεις είναι «τέλειος ανταγωνισμός». Αν μια επιχείρηση επιτίθεται συστηματικά στο μερίδιο αγοράς των ανταγωνιστών της μια εξίσωση όπως η 2.9 δεν μπορεί να ισχύει

Σε αυτή τη βάση μπορούμε να φτάσουμε στο γνωστό σχήμα της του APT

Και η λύση του υποδείγματος είναι η ακόλουθη γραφικά και αλγεβρικά. Προκύπτει από ανοιχτές μελλοντικές πωλήσεις (short) A,B,C και αντίστοιχα μελλοντικές αγορές των D, E,F. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των A,B,C,D,E,F στο σχήμα 2.3 για να εξαλειφθούν στο σχήμα 2.4.

Figure 2.4



$$2.10 \ E(R_j) = E(R_z) + \lambda_1 \cdot \beta_{1j}$$

Συμπεράσματα

Τα υποδείγματα ουδετερότητας στον κίνδυνο όπως το Martingale model επεκτείνουν την αποτίμηση χρηματοπιστωτικών τίτλων στη νεοκλασική ισορροπία χρησιμοποιώντας το φυσικό επιτόκιο σαν το σταθερό συντελεστή προεξόφλησης (αναγκαίας απόδοσης).

Τα υποδείγματα αποστροφής στον κίνδυνο CAPM και APT αναγνωρίζουν διαφορετικούς συντελεστές αναγκαίας απόδοσης για διαφορετικούς τίτλους όμως για να το πετύχουν αυτό υποθέτουν ότι η αποδόσεις ενός τίτλου δεν επηρεάζουν τις αποδόσεις των υπόλοιπων τίτλων.

Ειδικά για τις μετοχές που αφορούν επιχειρήσεις που ανταγωνίζονται η μια την άλλη. Αυτό σημαίνει ότι οι επιχειρήσεις ακολουθούν τον τέλειο ανταγωνισμό στη διαμόρφωση των αποδόσεων τους. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με τον προσδιορισμό των αποδόσεων από έναν ή περισσότερους **κοινούς** παράγοντες.

Πέρα από τα εμπειρικά προβλήματα που δημιουργούν οι υποθέσεις των σταθερών συντελεστών και των κοινών προσδιοριστικών παραγόντων και θα δούμε σε επόμενα μαθήματα η ουδετερότητα ή αποστροφή στο κίνδυνο έχει οδηγήσει σε μια σημαντική θεωρητική συζήτηση στο πλαίσιο της υπόθεσης των αποτελεσματικών αγορών όπως θα δούμε στο επόμενο μάθημα.

Βιβλιογραφία

- Davidson, Paul (1991). "Is Probability Theory Relevant for Uncertainty? A Post Keynesian Perspective", *Journal of Economic Perspectives*, 5(1): 129–143
- Fama, Eugene F., and Kenneth R. French (2004). "The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence", *Journal of Economic Perspectives*, 18(3): 25–46.
- Ohlson, James A. (1977). "Risk-Aversion and the Martingale Property of Stock Prices: Comments", *International Economic Review*, 18(1): 229-234.
- Ross, Stephen A. (1976). "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13(3): 341–360.
- Samuelson, Paul A. (1965). "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review*, 6: 41-49.
- Samuelson, Paul A. (1973). "Proof That Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly", *Bell Journal of Economics*, 4(2): 369-374.