Διοίκηση Έργων

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Γραμμικός Προγραμματισμός

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Διαγραμματική επίλυση προβλημάτων ελαχιστου

Πρόβλημα 3.

Ένας κτηνοτρόφος θέλει να προετοιμάσει ένα μείγμα από τις τροφές A και B. Κάθε κιλό της τροφής A περιέχει 120 γρ. πρωτεΐνες, 56 γρ. υδατάνθρακες, 103 γρ. λίπη και κοστίζει 24 ευρώ. Κάθε κιλό της τροφής B περιέχει 60 γρ. πρωτεΐνες, 112γρ. υδατάνθρακες και 120γρ. λίπη και κοστίζει 18 ευρώ. Το μείγμα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 480 γρ. πρωτεΐνες, 448 γρ. υδατάνθρακες και 720 γρ. λίπη. Ο κτηνοτρόφος θέλει να παρασκευάσει το μείγμα κατά τέτοιο τρόπο που να πληρούνται οι περιορισμοί και να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Λύση. Έστω x_1, x_2 τα κιλά των τροφών Α και Β που θα αποτελέσουν το μείγμα με το ελάχιστο κόστος. Ο σκοπός του κτηνοτρόφου είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους της τροφής. Συνεπώς επιζητεί:

$$min\ z = 24x_1 + 18x_2$$

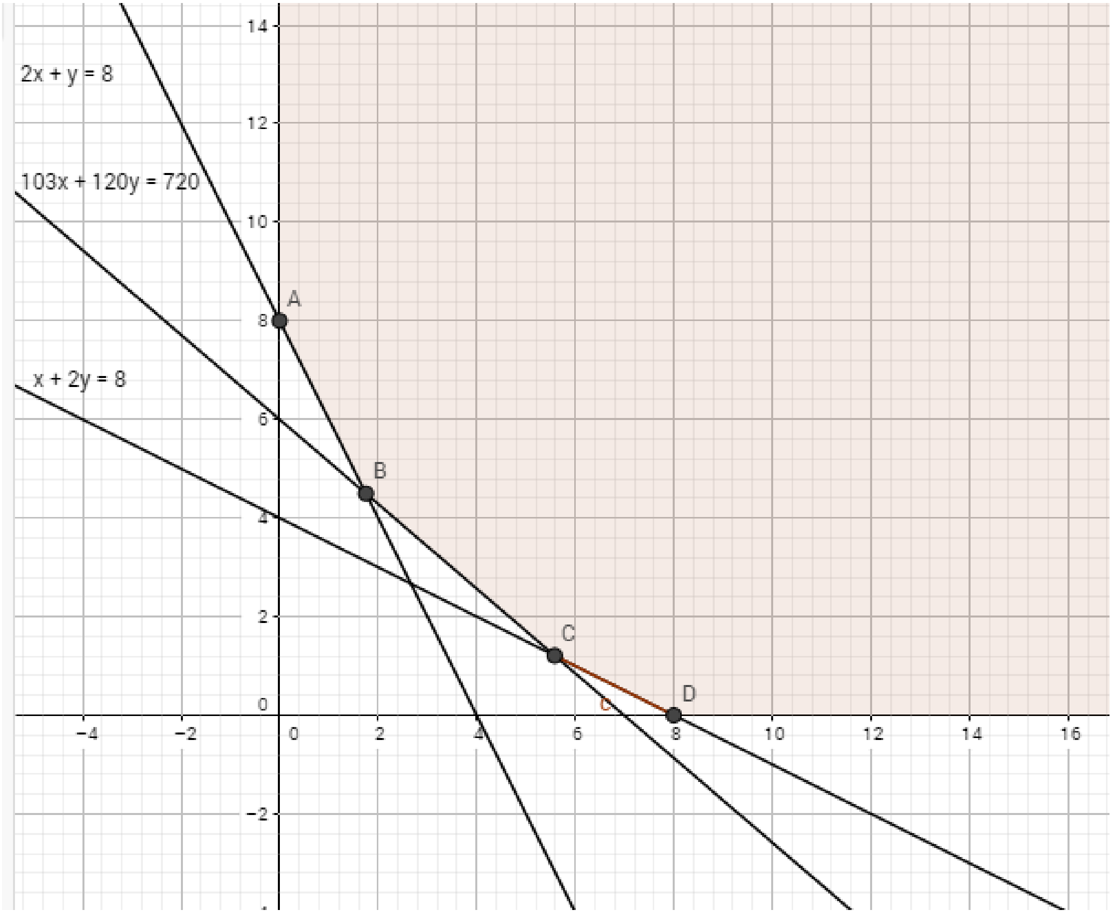
Η σχέση αυτή εκφράζει την αντικειμενική συνάρτηση της οποίας ζητάμε το ελάχιστο.

Στο πρόβλημα αυτό έχουμε το ακόλουθο σύστημα περιορισμών:

Περιορισμός πρωτεϊνών	$120x_1 + 60x_2 \geq 480$
Περιορισμός υδατανθράκων:	$56x_1 + 112x_2 \geq 448$
Περιορισμός λιπών:	$103x_1 + 120x_2 \geq 720$
Φυσικοί περιορισμοί:	$x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$

Επομένως κάνουμε τη γραφική παράσταση των ευθειών:

$120x_1 + 60x_2 = 480$		$2x_1 + x_2 = 8$
$56x_1 + 112x_2 = 448$	$\Leftrightarrow$	$x_1 + 2x_2 = 8$
$103x_1 + 120x_2 = 720$		$103x_1 + 120x_2 = 720$



Λόγω των φυσικών περιορισμών εργαζόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο.

Το σύστημα των περιορισμών έχει λύσεις όλα τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται δεξιά και άνω της πολυγωνικής γραμμής $x_1ΑΒΓΔx_2$ όπως και αυτά που βρίσκονται πάνω στην πολυγωνική γραμμή λόγω της ύπαρξης του σημείου ισότητας στις ανισώσεις του συστήματος.

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, δηλαδή άπειρους συνδυασμούς των x_1 και x_2 που το ικανοποιούν, όμως ένα από τα σημεία των κορυφών Α, Β, Γ, Δ δίνει τον βέλτιστο συνδυασμό των x_1 και x_2 που ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση. Η «καλλίτερη κορυφή» θα είναι αυτή, η οποία θα βρίσκεται πάνω σε εκείνη την ευθεία, από την οικογένεια των παραλλήλων ευθειών

$$Zmin=24x_1 +18x_2$$

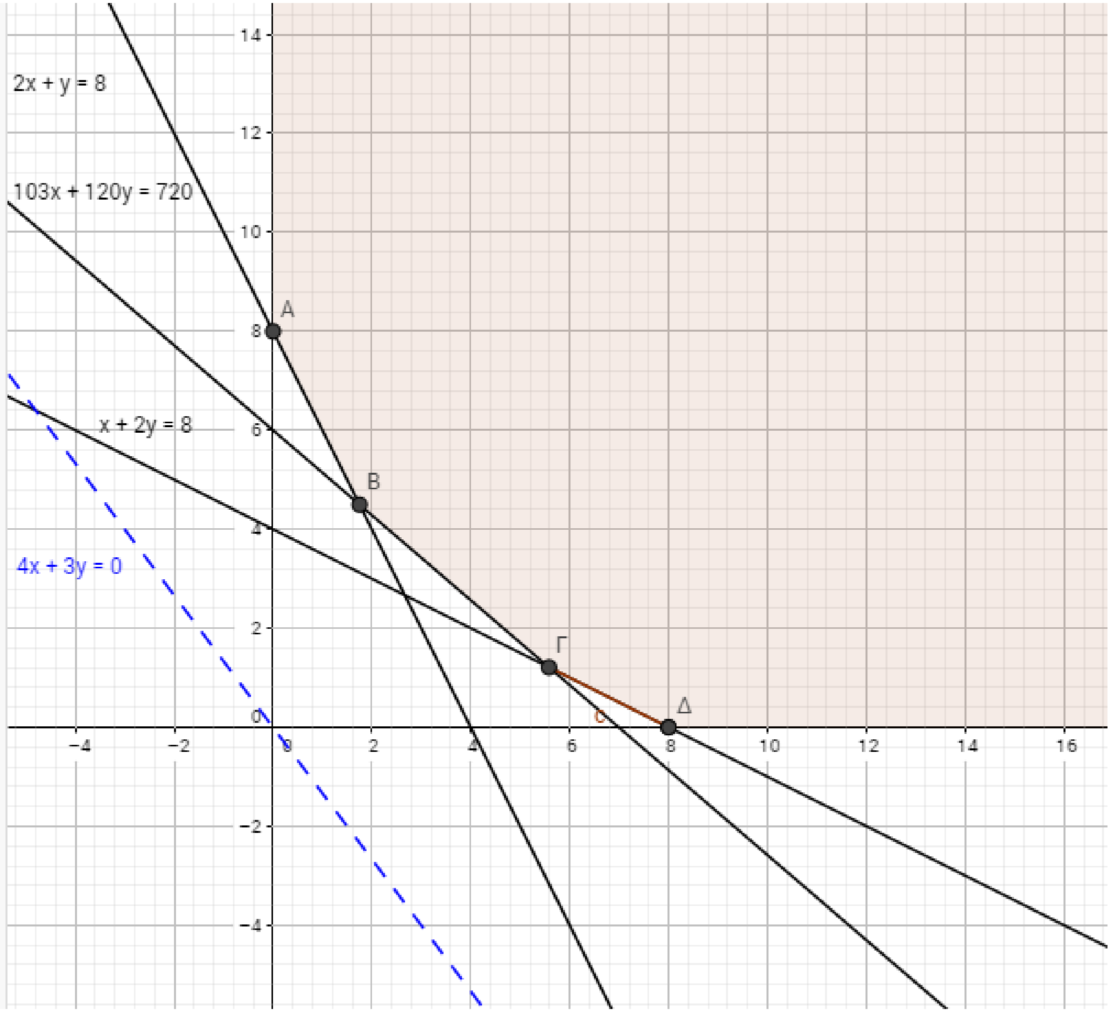
που θα απέχει λιγότερο από την αρχή την αξόνων (0,0). Για τον εντοπισμό λοιπόν της «καλύτερης κορυφής» χαράσσουμε την ευθεία

$$24x_1 +18x_2=0$$

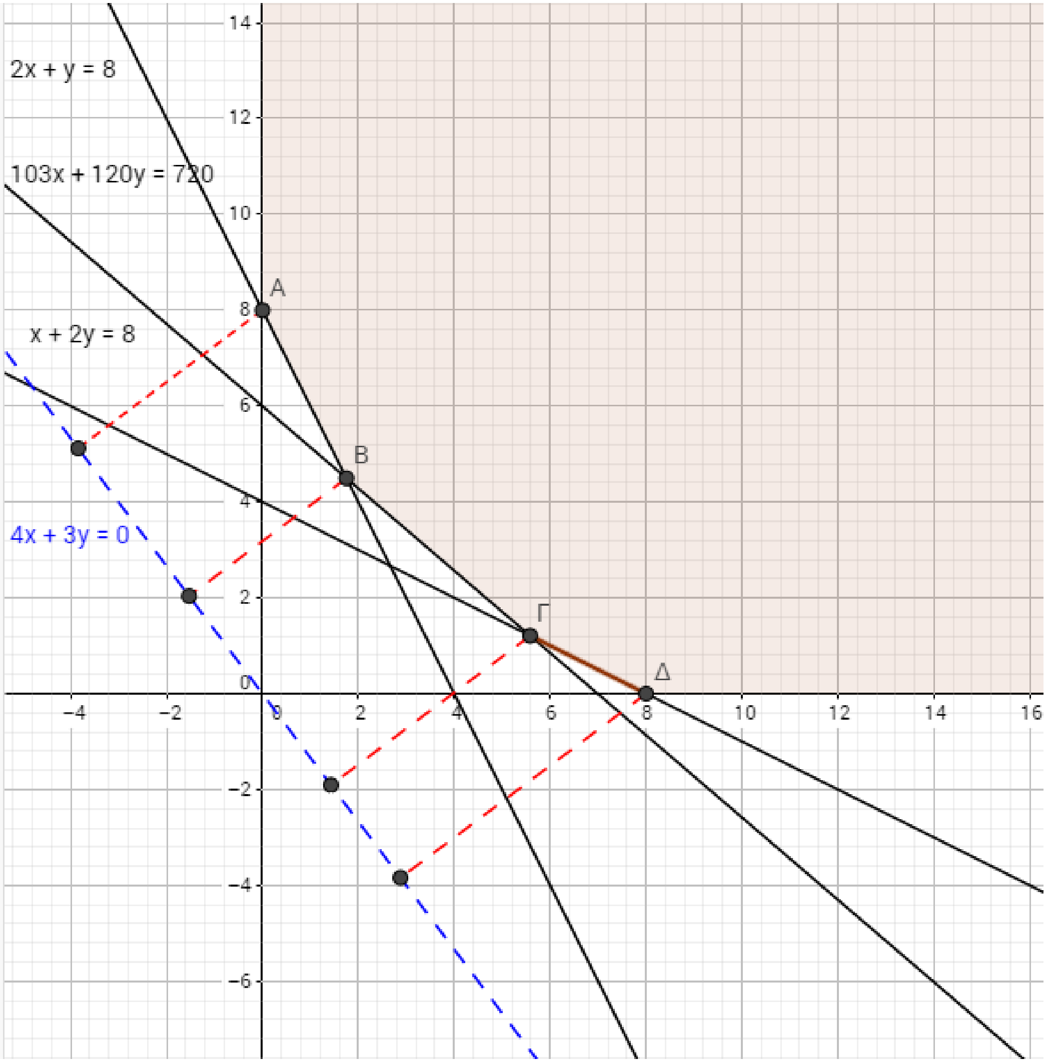
Αυτή διέρχεται από το σημείο (0,0). Επίσης

$$24x_1 + 18x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{18}{24}x_2 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{3}{4}x_2$$

Αν $x_2 = 4$ τότε $x_1 = -3$. Άρα διέρχεται και από το σημείο $(-3,4)$. Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε σχεδιάσει την ευθεία αυτή.



2x + y = 8
103x + 120y = 720
x + 2y = 8
4x + 3y = 0
A
B
Γ
Δ
c



Όπως βλέπετε στο σχήμα, η κορυφή Β είναι εκείνη που απέχει λιγότερο από την ευθεία

$$24x_1 + 18x_2 = 0.$$

Οι συντεταγμένες επομένως x_1, x_2 της κορυφής Β ελαχιστοποιούν την οικονομική συνάρτηση. Για την εύρεση των συντεταγμένων αυτών λύνεται το σύστημα των ευθειών που η τομή τους είναι το σημείο Β. Οι ευθείες αυτές είναι:

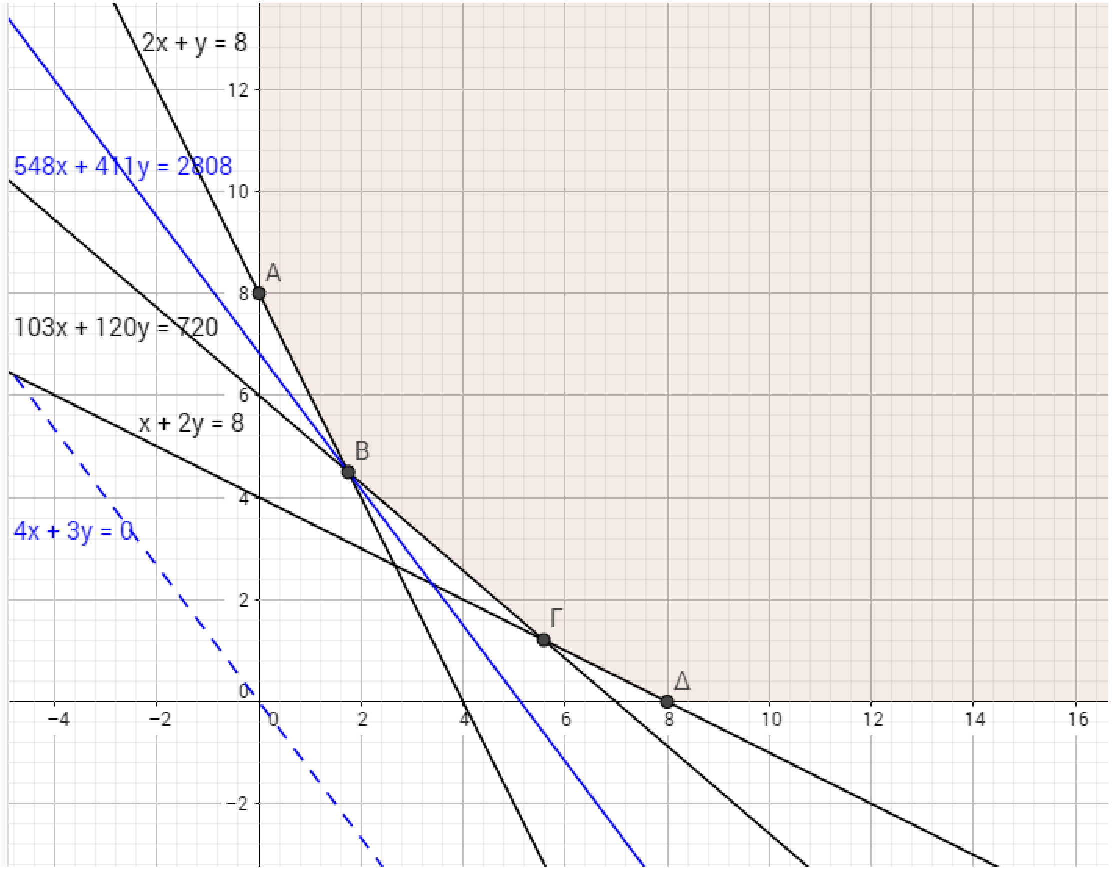
$$2x_1 + x_2 = 8$$
$$103x_1 + 120x_2 = 720$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι:

$$x_1 = 1{,}752$$
$$x_2 = 4{,}496$$

Έτσι το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης είναι :

$$min\ z = 24x_1 + 18x_2 = (24 \cdot 1{,}752) + (18 \cdot 4{,}496) = 122{,}98$$



Διαγραμματική επίλυση ελαχίστου

Συνεπώς αν ο κτηνοτρόφος θέλει το μείγμα από τις τροφές Α και Β να του κοστίζει το λιγότερο δυνατόν και να πληροί τους περιορισμούς ως προς το ελάχιστο των πρωτεϊνών, υδατανθράκων και λιπών, πρέπει να αναμίξει 1,752χλγ. της τροφής Α με 4,496χλγ. της τροφής Β. Το κόστος τότε του μείγματος αυτών θα είναι 122,98 ευρώ.