Διοίκηση Έργων

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Γραμμικός Προγραμματισμός

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Σχεδιασμός της ευθείας $ax+by+c=0$ σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και η διαμέριση του επιπέδου.

Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της εξίσωσης $ax + by + c = 0$ είναι μια ευθεία γραμμή. Επίσης γνωρίζουμε ότι δύο σημεία ορίζουν τη θέση μιας ευθείας. Έτσι, αν ξέρουμε δύο σημεία της ευθείας, τότε μπορούμε να την σχεδιάσουμε.

Δύο σημαντικά σημεία της ευθείας στο καρτεσιανό επίπεδο, είναι τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες των συντεταγμένων. Τα σημεία αυτά, όταν $c \neq 0$, προσδιορίζονται ως εξής:

- Αν θέσουμε $y=0$ τότε βρίσκουμε ότι $x=-\frac{c}{a}$ και συνεπώς έχουμε το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα των τετμημένων $x'x$, δηλαδή το $(x,y)=\left(-\frac{c}{a},0\right)$.

- Αν θέσουμε $x=0$ τότε βρίσκουμε ότι $y=-\dfrac{c}{b}$ και συνεπώς έχουμε το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $y'y$, δηλαδή το $(x,y)=\left(0,-\dfrac{c}{b}\right)$.

Συνδέοντας στη συνέχεια τα δύο αυτά σημεία χαράσσουμε την ευθεία $ax+by+c=0$.

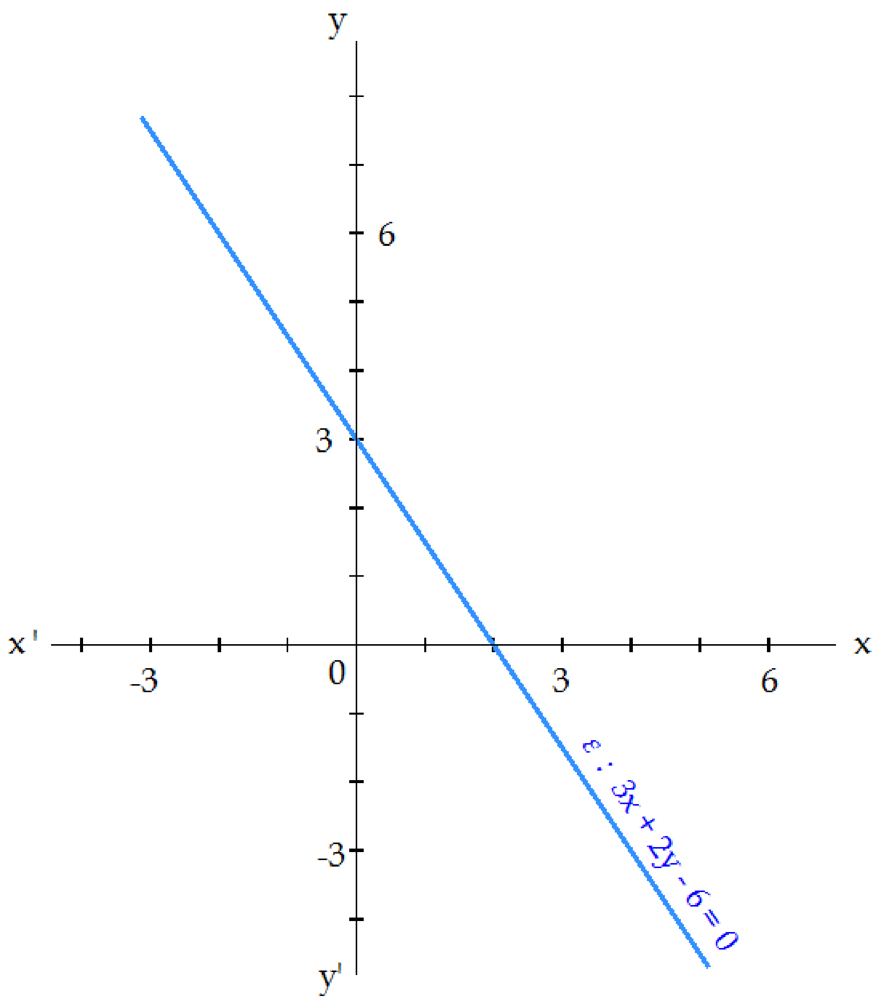
Όταν χαράξουμε την ευθεία αυτή, παρατηρούμε ότι τα σημεία του επιπέδου διαμερίζονται σε τρία μέρη: τα σημεία επί της ευθείας, τα σημεία δεξιά της ευθείας και τα σημεία αριστερά της ευθείας. Στα σημεία της ευθείας η παράσταση $ax+by+c$ λαμβάνει την τιμή μηδέν ενώ στη μεν μία από τις άλλες δύο περιοχές γίνεται θετική και στην άλλη αρνητική.

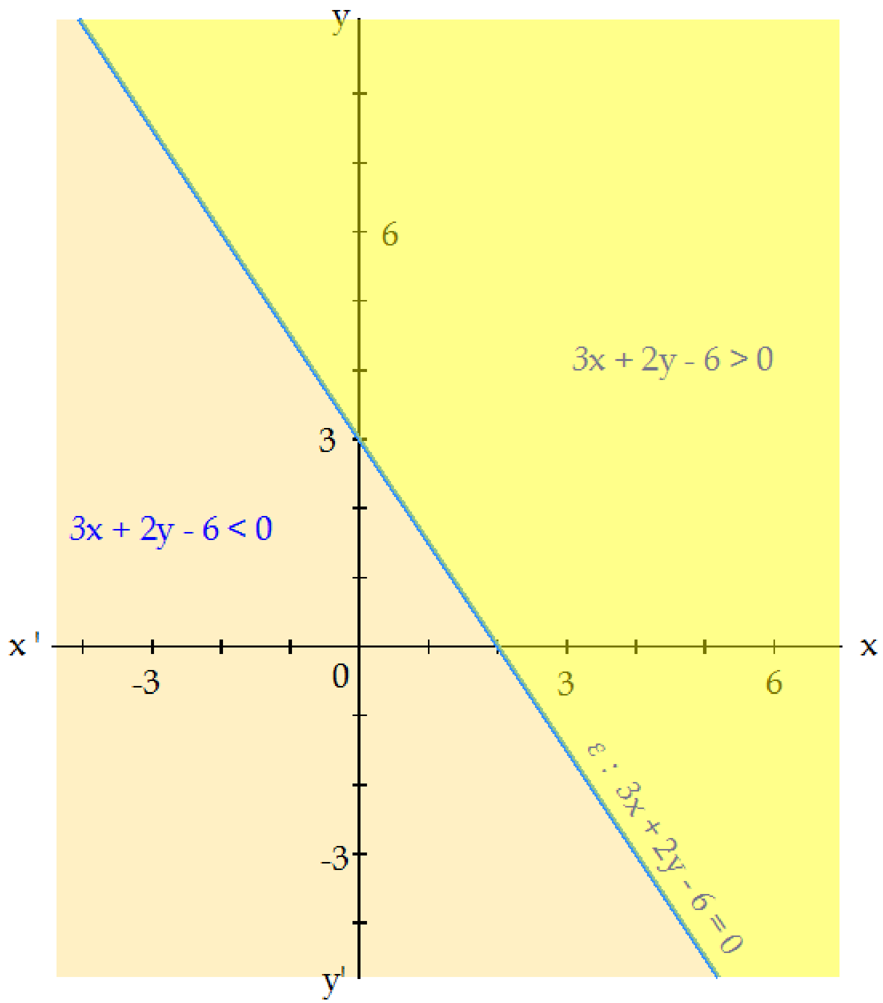
Παράδειγμα Σχεδιασμός της ευθείας $3x+2y-6=0$

• Αν θέσουμε $y=0$ τότε έχουμε ότι $x=\frac{6}{3}=2$ και συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα των τετμημένων $x'x$ στο 2.

• Αν θέσουμε $x=0$ τότε έχουμε ότι $y=\frac{6}{2}=3$ και συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $y'y$ στο 3 .

Επομένως η ευθεία είναι η ακόλουθη:


y
6
3
x '
x
-3
0
3
6
-3
y'
ε : 3x + 2y - 6 = 0



Παρατηρούμε τώρα ότι αν θέσουμε στην παράσταση $z = 3x + 2y - 6$ τιμές αριστερά της ευθείας τότε αυτή γίνεται αρνητική, π.χ. αν θέσουμε $x = 0$ και $y = 0$, έχουμε

$$z = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

Αντίστοιχα, αν θέσουμε στην παράσταση $z = 3x + 2y - 6$ τιμές δεξιά της ευθείας τότε αυτή γίνεται θετική.

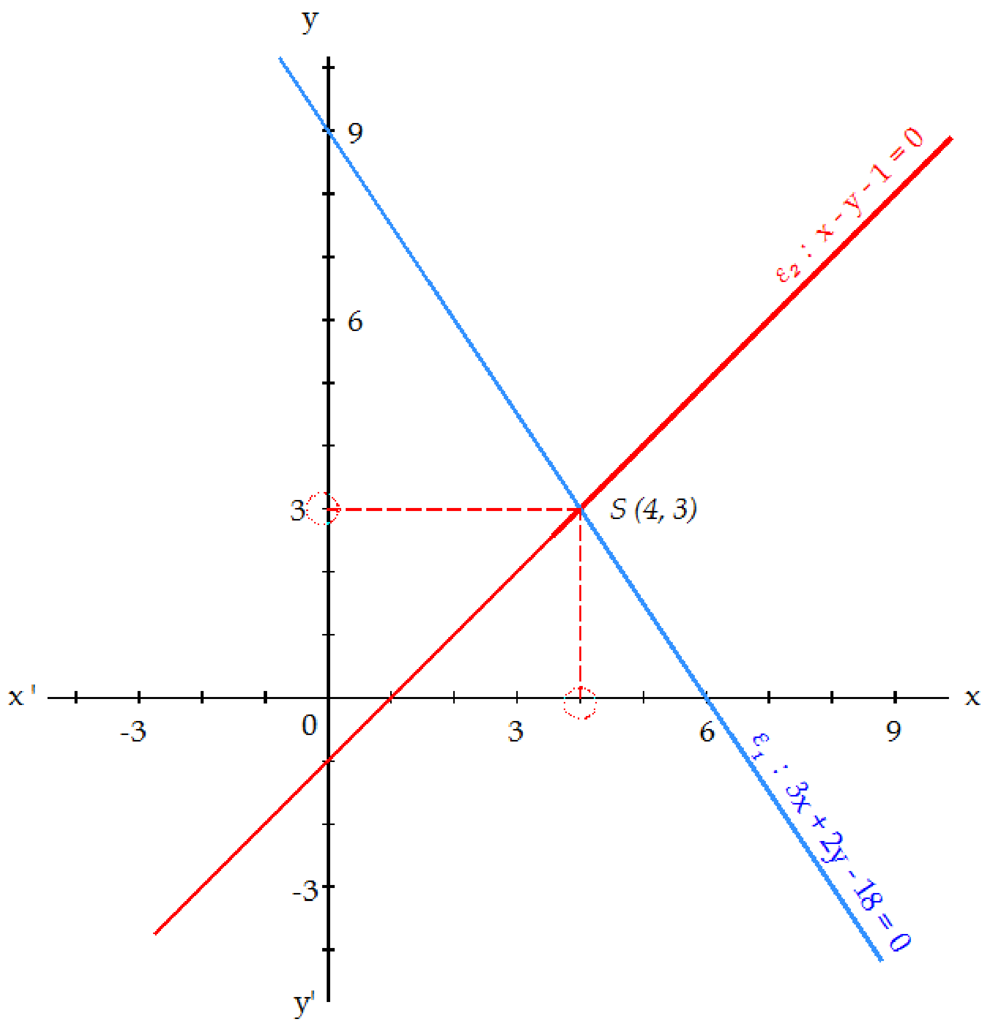
Γραφική λύση συστήματος δύο πρωτοβαθμίων εξισώσεων / ανισώσεων με δύο αγνώστους.

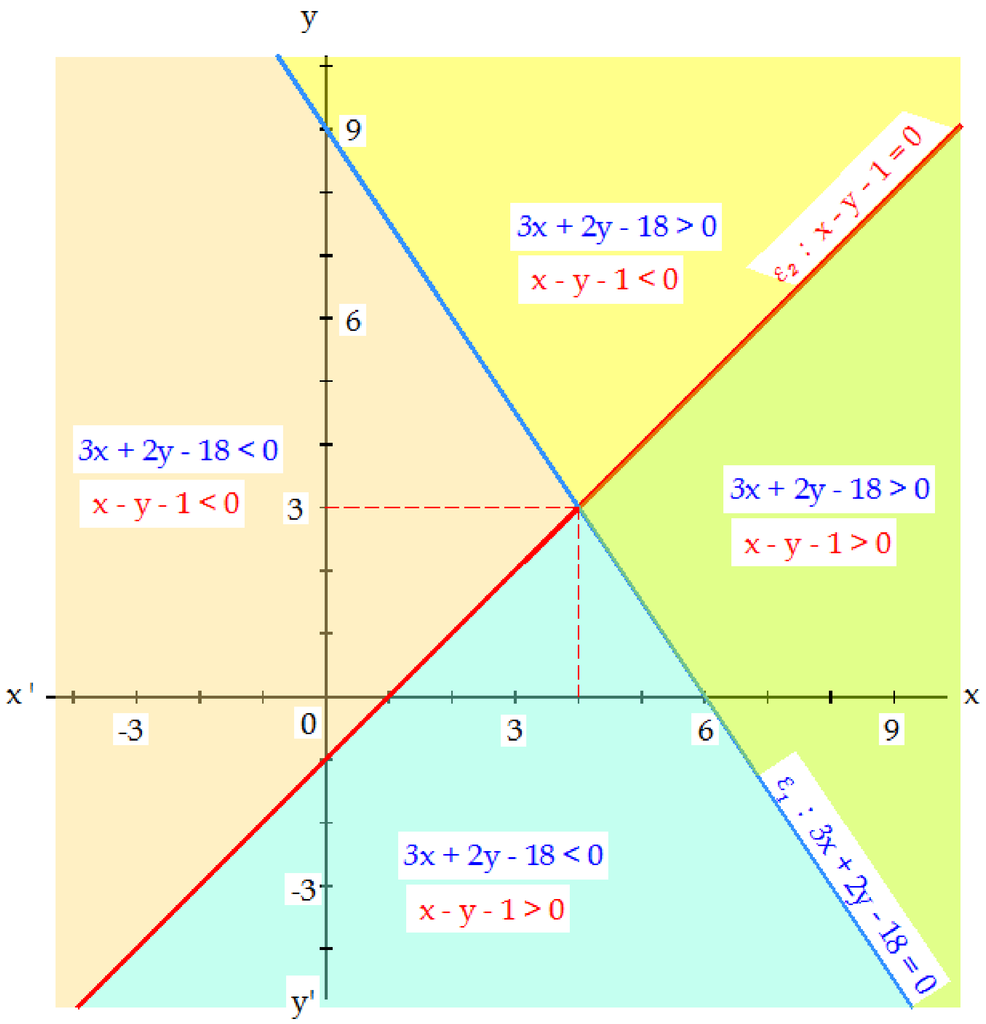
Έστω το σύστημα:

$$3x+2y=18$$
$$x-y=1$$

Λύνοντας αλγεβρικά το σύστημα αυτό βρίσκουμε $x=4$ και $y=3$. Συνεπώς το σημείο $(x,y)=(4,3)$ είναι σημείο και των δύο ευθειών ε_1, ε_2 οι οποίες αποτελούν τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων του συστήματος. Επομένως οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_2 είναι $(4,3)$ διότι οι τιμές αυτές επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.

Άρα για να λύσουμε ένα σύστημα δύο πρωτοβάθμιων εξισώσεων με δύο αγνώστους γραφικά, αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος.


y
9
6
3
S (4, 3)
$\varepsilon_2 : x - y - 1 = 0$
x'
x
-3
0
3
6
9
$\varepsilon_1 : 3x + 2y - 18 = 0$
-3
y'



Τώρα παρατηρούμε ότι οι δύο αυτές ευθείες ορίζουν στο επίπεδο τέσσερες περιοχές. Τα σημεία των περιοχών αυτών επαληθεύουν τις αντίστοιχες ανισώσεις τις οποίες έχουμε αναγράψει σε αυτές.

Άσκηση. Δίδονται οι ανισώσεις

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 160$$
$$x_1 + x_2 \leq 90$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Να σχεδιάσετε στο καρτεσιανό επίπεδο την περιοχή στην οποία αυτές συναληθεύουν.

Λύση

Από τις δύο τελευταίες ανισώσεις, αντιλαμβανόμαστε ότι η περιοχή που ζητάμε, περιορίζεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Στη συνέχεια:

α) σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες ευθείες που προκύπτουν από τις τρείς πρώτες ανισώσεις:

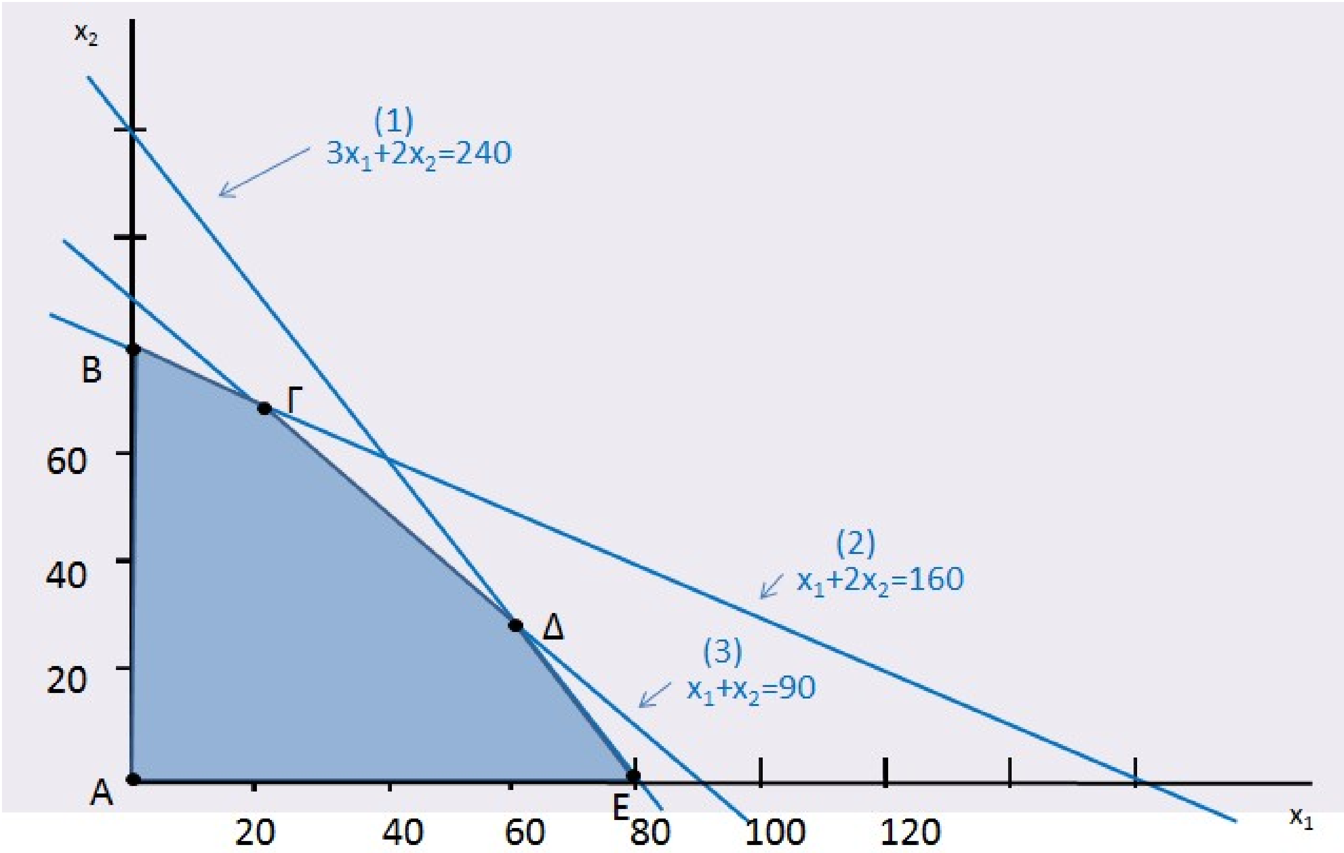
$$3x_1 + 2x_2 = 240$$

$$x_1 + 2x_2 = 160$$

$$x_1 + x_2 = 90$$

β) εντοπίζουμε (με δοκιμή), για κάθε ανίσωση, το ημιεπίπεδο που οι συντεταγμένες των σημείων του την επαληθεύουν. Προκύπτουν έτσι τρία ημιεπίπεδα.

γ) βρίσκουμε την τομή των τριών αυτών ημιεπιπέδων, δηλαδή την περιοχή που είναι κοινή και για τα τρία ημιεπίπεδα.



Η περιοχή αυτή είναι το κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ.

Στον Γραμμικό Προγραμματισμό που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών αυτού του πολυγώνου. Το σημείο A είναι η αρχή των αξόνων, συνεπώς οι συντεταγμένες του είναι $(0,0)$. Ο γραφικός προσδιορισμός των υπολοίπων εξαρτάται απόλυτα από την ακρίβεια του σχήματος που έχουμε σχεδιάσει. Για τον αλγεβρικό τους προσδιορισμό έχουμε ότι:

i) οι κορυφές που αποτελούν σημεία τομής των αξόνων με τις ευθείες, βρίσκονται αν θέσουμε $x_1 = 0$ ή $x_2 = 0$ στην αντίστοιχη εξίσωση. Έτσι:

•Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου Β, το οποίο αποτελεί την τομή του άξονα των τεταγμένων με την ευθεία $x_1 + 2x_2 = 160$, θέτουμε $x_1 = 0$ και έχουμε

$$0 + 2x_2 = 160 \Leftrightarrow x_2 = \frac{160}{2} \Leftrightarrow x_2 = 80$$

Άρα οι συντεταγμένες του Β είναι $(0,80)$

•Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου Ε, το οποίο αποτελεί την τομή του άξονα των τετμημένων με την ευθεία $3x_1 + 2x_2 = 240$, θέτουμε $x_2 = 0$ και έχουμε

$$3x_1 + 2 \cdot 0 = 240 \Leftrightarrow x_1 = \frac{240}{3} \Leftrightarrow x_1 = 80$$

Άρα οι συντεταγμένες του Ε είναι $(80,0)$.

ii) οι κορυφές που αποτελούν σημεία τομής των δύο ευθειών μεταξύ τους, βρίσκονται επιλύσουμε το σύστημα που ορίζουν οι εξισώσεις των δύο ευθειών. Έτσι:

•Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, το οποίο αποτελεί το σημείο τομής της ευθείας $x_1 + 2x_2 = 160$ με την ευθεία $x_1 + x_2 = 90$, επιλύουμε το σύστημα:

$$x_1 + 2x_2 = 160$$
$$x_1 + x_2 = 90$$

και βρίσκουμε ότι $x_1 = 20$ και $x_2 = 70$. Άρα οι συντεταγμένες του Γ είναι $(20,70)$.

•Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου Δ, το οποίο αποτελεί το σημείο τομής της ευθείας $3x_1 + 2x_2 = 240$ με την ευθεία $x_1 + x_2 = 90$, επιλύουμε το σύστημα:

$$3x_1 + 2x_2 = 240$$
$$x_1 + x_2 = 90$$

και βρίσκουμε ότι $x_1 = 60$ και $x_2 = 30$. Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $(60,30)$.

Γραμμικός Προγραμματισμός

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων, στα οποία μια συγκεκριμένη ποσότητα πρέπει να μεγιστοποιηθεί ή να ελαχιστοποιηθεί (π.χ. να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη ή να ελαχιστοποιηθεί το κόστος). Η ποσότητα αυτή δίνεται από μια *γραμμική συνάρτηση* που ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση, (objective function) καθώς ο αντικειμενικός μας στόχος είναι η μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίησή της.

Τα προβλήματα που καλείται να επιλύσει ο γραμμικός προγραμματισμός περιλαμβάνουν περιορισμούς (constraints), οι οποίοι θέτουν τα όρια εντός των οποίων μπορεί να επιτευχθεί η ζητούμενη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση. Οι περιορισμοί αυτοί εκφράζονται μέσα από *γραμμικές ανισώσεις*.

Μία λύση που ικανοποιεί το σύνολο των περιορισμών ορίζεται ως εφικτή (feasible solution). Η εφικτή λύση δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη, αλλά υπάρχει ένα σύνολο εφικτών λύσεων.

Εκείνη η εφικτή λύση, από το σύνολο των εφικτών λύσεων, που αποδίδει τη μέγιστη δυνατή τιμή στα προβλήματα μεγιστοποίησης ή την ελάχιστη στα προβλήματα ελαχιστοποίησης, ονομάζεται βέλτιστη λύση (optimal feasible solution) και είναι αυτή που επιδιώκουμε να ανακαλύψουμε με τις μεθόδους του Γραμμικού Προγραμματισμού. Έτσι, ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι η διαδικασία εύρεσης μιας βέλτιστης λύσης μιας γραμμικής συνάρτησης, η οποία να είναι συμβατή με ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών ανισώσεων, δηλαδή, ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο που αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από κάποιους γραμμικούς περιορισμούς.

Θεώρημα 1. *Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γ.Π. είναι κυρτό σύνολο.*

Θεώρημα 2. *Η αντικειμενική συνάρτηση ενός προβλήματος Γ.Π. λαμβάνει την βέλτιστη τιμή της σε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων.*

Η διαδικασία περιγραφής της περιρρέουσας πραγματικότητας (φυσικά φαινόμενα, βιολογικές διεργασίες, οικονομικά προβλήματα κλπ) με την γλώσσα των Μαθηματικών μας οδηγεί σε αυτό που ονομάζεται Μαθηματικό Μοντέλο και η διαδικασία διατύπωσης του προβλήματος με Μαθηματικούς όρους, ονομάζεται Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τα Μαθηματικά μοντέλα για κάποια προβλήματα.

Πρόβλημα 1.

Φαρμακευτική βιομηχανία παράγει στα εργαστήριά της δύο ουσίες Α και Β. Η παρασκευή τους, απαιτεί τρία στάδια επεξεργασίας.

	ουσία Α	ουσία Β
Πρώτο στάδιο	1 λεπτό	3 λεπτά
Δεύτερο στάδιο	13 λεπτά	3 λεπτά
Τρίτο στάδιο	5 λεπτά	4 λεπτά

Ο συνολικός χρόνος που μπορεί να αφιερώσουν τα εργαστήρια της βιομηχανίας ανά ώρα είναι **12 λεπτά** *για το πρώτο στάδιο*, **39 λεπτά** *για το δεύτερο* και **20 λεπτά** *για το τρίτο*. Να βρεθεί ο χώρος των εφικτών λύσεων, για τη παραγωγή των ουσιών Α και Β.

Λύση. Έστω ότι η βιομηχανία παράγει x_1 γραμμάρια από την πρώτη ουσία και x_2 γραμμάρια από την δεύτερη. Προφανώς τα x_1 και x_2 δεν μπορεί να είναι αρνητικοί αριθμοί. Το ελάχιστο που μπορεί να συμβεί, είναι η βιομηχανία να σταματήσει την παραγωγή της μιας ή της άλλης ουσίας ή ακόμη και των δύο. Συνεπώς υπάρχουν οι παρακάτω δύο «φυσικοί περιορισμοί» για τα x_1 και x_2:

$$x_1 \geq 0 \text{ και } x_2 \geq 0$$

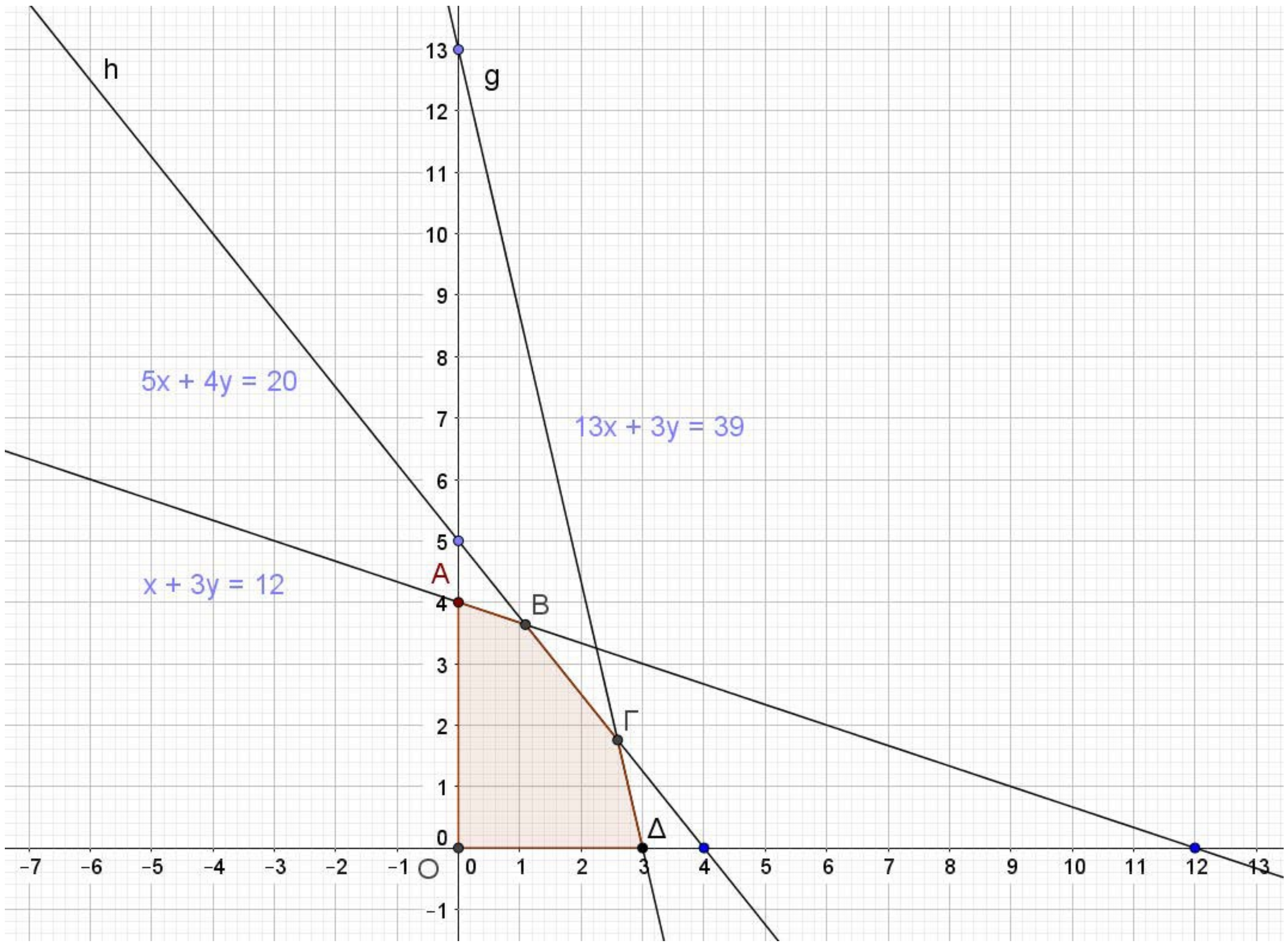
Όμως οι χημικές διεργασίες που απαιτούνται για την κατασκευή των ουσιών και οι δυνατότητες των εργαστηρίων της βιομηχανίας επιβάλουν και ορισμένους «τεχνολογικούς περιορισμούς». Η μαθηματική διατύπωση των περιορισμών αυτών, οι οποίοι περιγράφονται με λόγια στην εκφώνηση του προβλήματος, είναι η ακόλουθη:

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$13x_1 + 3x_2 \leq 39$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 20$$

Παρατηρούμε, για παράδειγμα, ότι **δεν είναι εφικτό** να παραχθούν από την βιομηχανία 8 γραμμάρια από την ουσία Α και 1 γραμμάριο από την ουσία Β, την ώρα, διότι για $x_1 = 8$ και $x_2 = 1$ υπάρχουν ανισώσεις (η 2^{η} και η 3^{η}) που δεν ικανοποιούνται. Είναι όμως **εφικτό** να παραχθούν 2 γραμμάρια από την ουσία Α και 1 από την Β ή 2 γραμμάρια από την κάθε μία ουσία. Έτσι ο χώρος των **εφικτών λύσεων** είναι η περιοχή που συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$13x_1 + 3x_2 \leq 39$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 20$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Ο χώρος των εφικτών λύσεων του παραπάνω συστήματος ανισώσεων είναι αυτός που απεικονίζεται γραμμοσκιασμένος στο επόμενο διάγραμμα.


h
g
5x + 4y = 20
13x + 3y = 39
x + 3y = 12
A
B
Γ
Δ
O

Διαγραμματική επίλυση προβλημάτων μεγίστου

Πρόβλημα 2.

Μια εταιρεία παράγει δύο προϊόντα A και B. Η παραγωγική διαδικασία κάθε τεμαχίου των παραπάνω προϊόντων απαιτεί συγκεκριμένο χρόνο λειτουργίας δύο διαφορετικών μηχανημάτων.

	προϊόν A	προϊόν B
Πρώτο μηχάνημα	2 ώρες λειτουργίας	4 ώρες λειτουργίας
Δεύτερο μηχάνημα	1 ώρα λειτουργίας	3 ώρες λειτουργίας

Το πρώτο μηχάνημα είναι διαθέσιμο για **20 ώρες ημερησίως** και το δεύτερο για **12 ώρες ημερησίως**.

Το αντίστοιχο κέρδος για την εταιρεία ανέρχεται σε **40 ευρώ μια κάθε μονάδα του προϊόντος Α** και σε **100 ευρώ μια κάθε μονάδα του προϊόντος Β**.

Η εταιρεία έχει την δυνατότητα να πουλήσει όλη την ποσότητα των παραγομένων προϊόντων. Αν η εταιρεία επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της, να βρεθεί πόσες μονάδες από κάθε προϊόν πρέπει να παράγει ημερησίως, ώστε να επιτύχει τον στόχο της.

Λύση. Έστω x_1 , x_2 οι μεταβλητές του προβλήματος, με

x_1 ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Α που παράγεται την ημέρα

x_2 ο αριθμός των μονάδων του προϊόντος Β που παράγεται την ημέρα

Αντικειμενική Συνάρτηση:

Έστω z το ημερήσιο κέρδος. Ο σκοπός της εταιρείας είναι η μεγιστοποίηση του ημερήσιου κέρδους της. Συνεπώς επιζητεί

$$\max z = 40x_1 + 100x_2$$

Φυσικοί Περιορισμοί για τα x_1 και x_2:

$$x_1 \geq 0 \text{ και } x_2 \geq 0$$

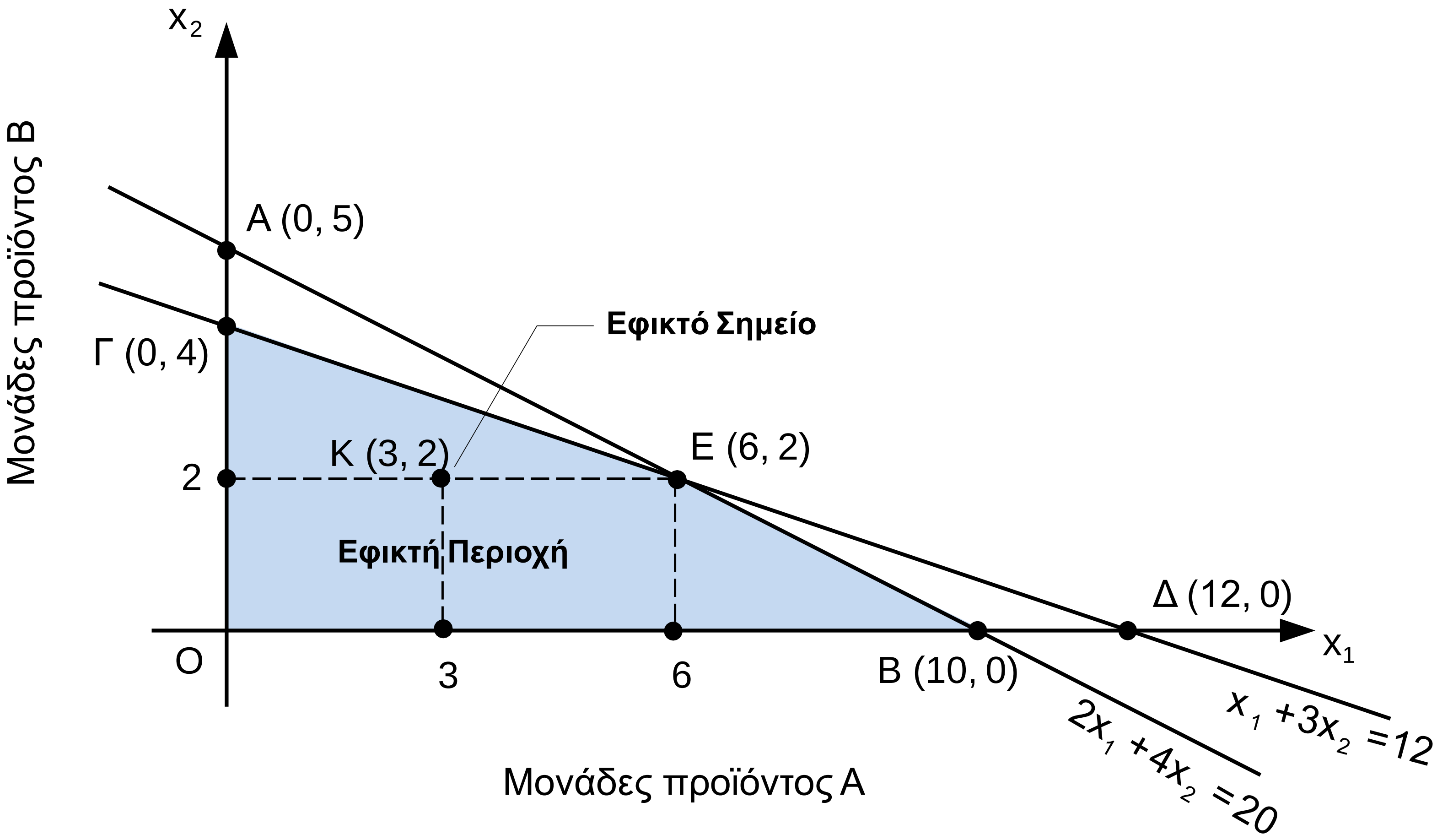
Τεχνολογικοί Περιορισμοί για τα x_1 και x_2 :

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$

Μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος	
Μεγιστοποίησε την:	$z = 40x_1 + 100x_2$
Υπό τους περιορισμούς:	$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 12 \end{aligned}$
	$x_1, x_2 \geq 0$

Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε σχεδιάσει, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει ανωτέρω την περιοχή των εφικτών λύσεων του προβλήματος.


x_2
Μονάδες προϊόντος Β
A (0, 5)
Εφικτό Σημείο
Γ (0, 4)
K (3, 2)
E (6, 2)
2
Εφικτή Περιοχή
Δ (12, 0)
x_1
O
3
6
B (10, 0)
$x_1 + 3x_2 = 12$
$2x_1 + 4x_2 = 20$
Μονάδες προϊόντος Α

Σκοπός μας τώρα είναι να εντοπίσουμε το σημείο ή τα σημεία εκείνα της εφικτής περιοχής, τα οποία μεγιστοποιούν το κέρδος της εταιρείας.

Ας σχεδιάσουμε μια σειρά αντικειμενικών συναρτήσεων.

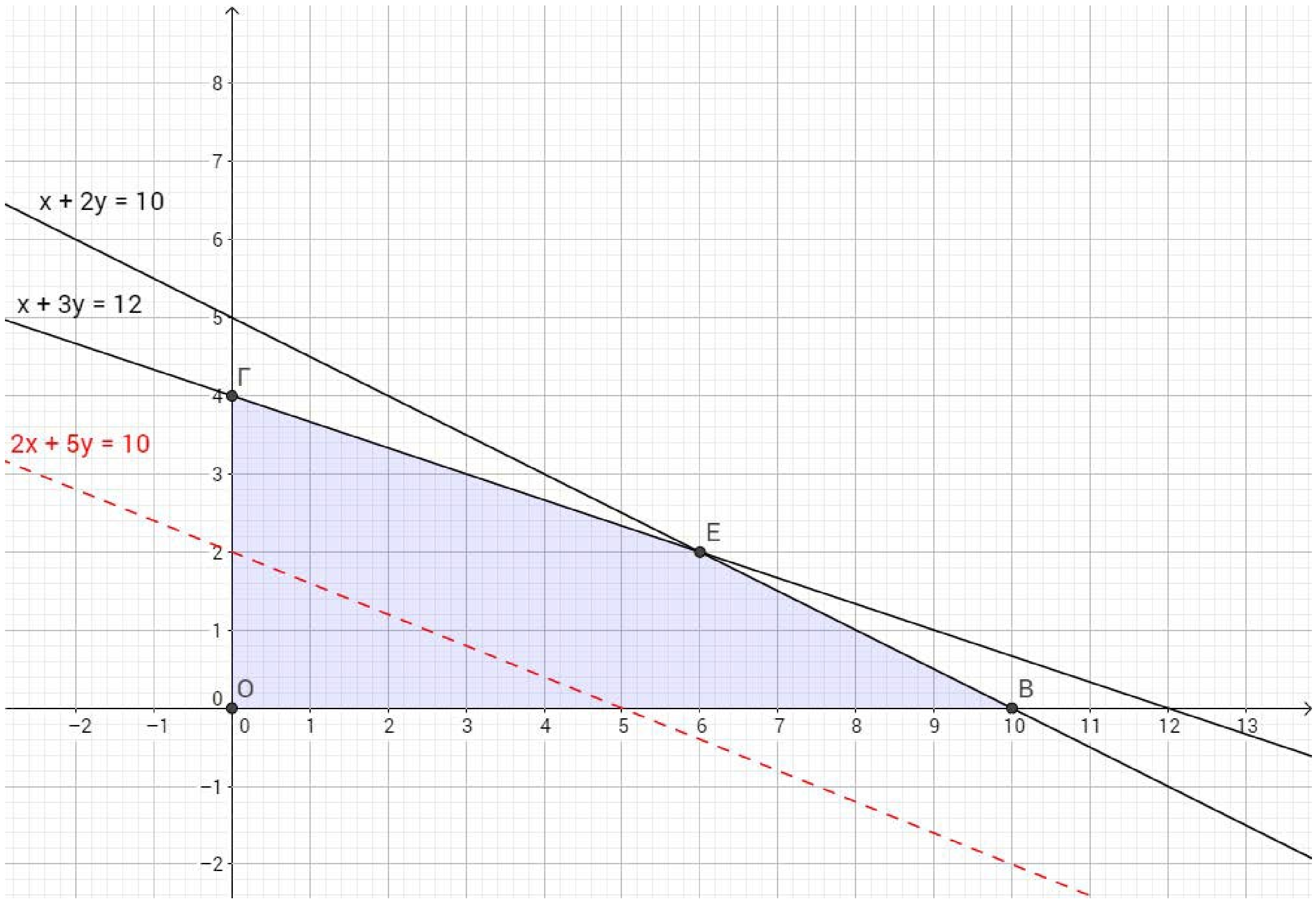
Η αντικειμενική συνάρτηση

$$40x_1 + 100x_2 = 200$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$2x_1 + 5x_2 = 10$$

περιλαμβάνει πολλά σημεία της εφικτής περιοχής, κάθε ένα από τα οποία αντιπροσωπεύει ένα συνδυασμό των προϊόντων Α και Β που δίνουν κέρδος ίσο με 200 ευρώ.



x + 2y = 10
x + 3y = 12
2x + 5y = 10
Γ
E
O
B

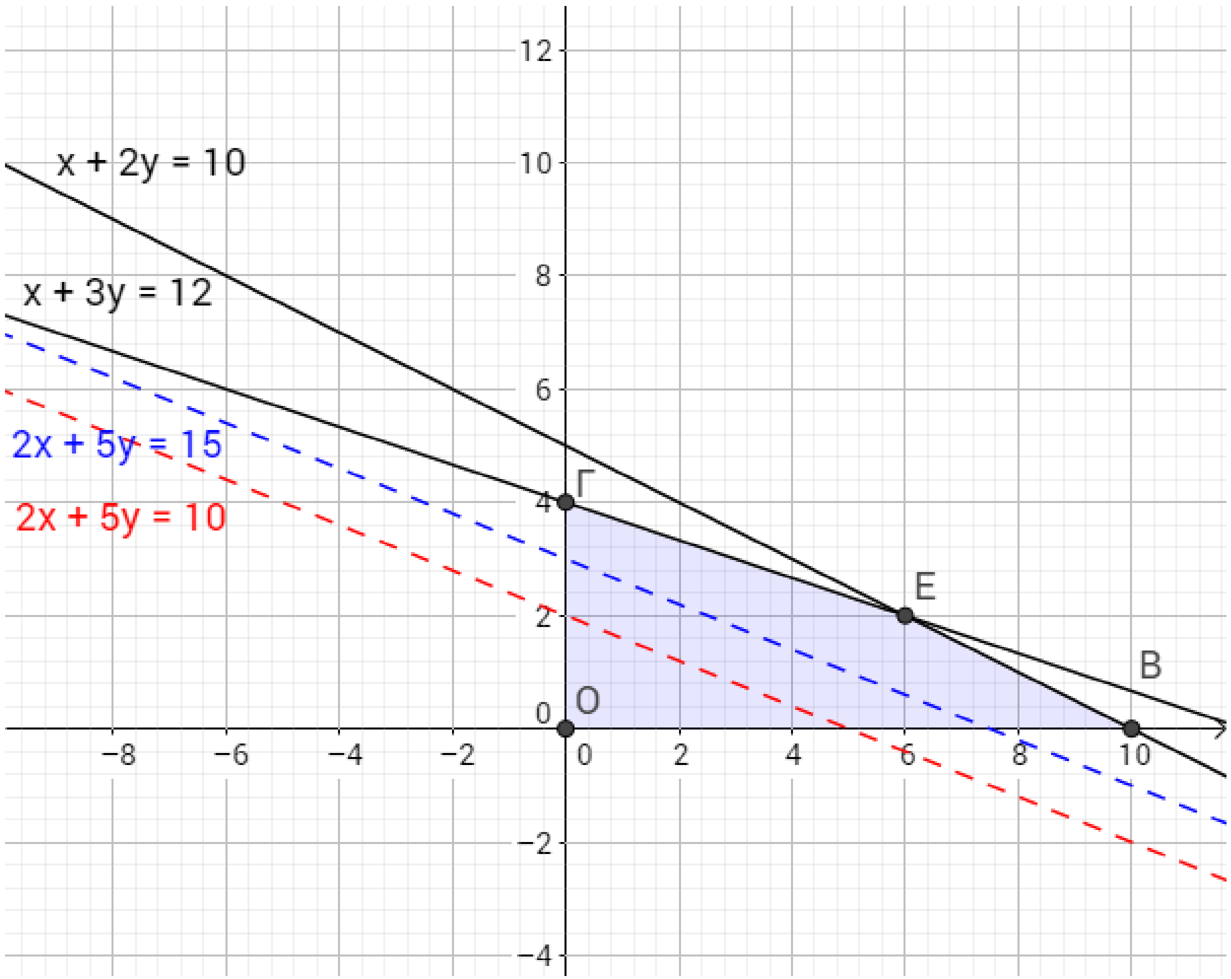
Όμως η ευθεία

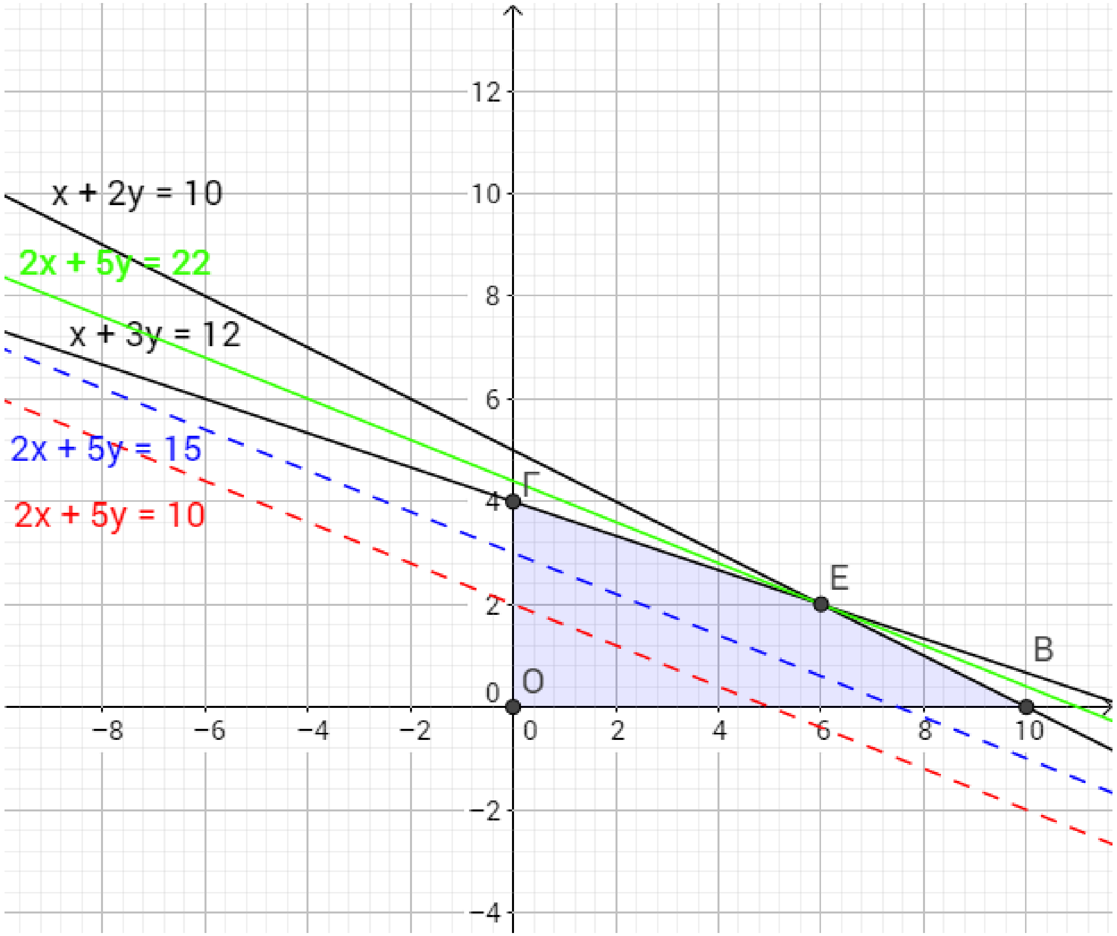
$$40x_1 + 100x_2 = 300$$

ή ισοδύναμα η

$$2x_1 + 5x_2 = 15$$

είναι καλλίτερη από την προηγούμενη διότι περιλαμβάνει σημεία της εφικτής περιοχής που δίνουν κέρδος ίσο με 300 ευρώ. Να παρατηρήσουμε ότι οι δύο αυτές ευθείες, όπως και κάθε άλλη που θα προκύψει από την αλλαγή της τιμής του δευτέρου μέλους, είναι παράλληλες διότι έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Οι παράλληλες αυτές ονομάζονται *ισοσταθμικές*, διότι, εντός της εφικτής περιοχής, τα σημεία της κάθε μία από αυτές δίνουν το ίδιο κέρδος.


x + 2y = 10
x + 3y = 12
2x + 5y = 15
2x + 5y = 10
Γ
E
B
O
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10



Συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή των παραλλήλων ευθειών, καταλήγουμε στην ευθεία:

$$40x_1 + 100x_2 = 440 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5y = 22$$

Στην περίπτωση αυτή μόνον ένα σημείο της ευθείας, το Ε (6,2) αποτελεί εφικτό σημείο. Επιπλέον παρατηρούμε ότι κανένα άλλο εφικτό σημείο δεν αντιστοιχεί σε μεγαλύτερες τιμές κέρδους. Αυτό, λόγω του Θεωρήματος 2 ήταν αναμενόμενο.