Ουρές Αναμονής

Παραδείγματα από ουρές αναμονής

Οι ουρές αναμονής δεν είναι τίποτα άλλο από τις συνηθισμένες ουρές που συναντούμε καθημερινά στη ζωή μας, για παράδειγμα:

- Πελάτες στο ταμείο ενός ταχυδρομικού καταστήματος, ενός τραπεζικού καταστήματος ή ενός supermarket.
- Επιβάτες στη στάση ενός λεωφορείου,
- Ασθενείς για εισαγωγή σε νοσοκομείο,
- Αυτοκίνητα που περιμένουν στα διόδια,
- Κλήσεις σε τηλεφωνικό κέντρο

Ουρές Αναμονής και Πιθανότητες

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την περίπτωση μιας ουράς στα ταμεία ενός supermarket σε μια μέρα αιχμής, π.χ. το Σάββατο, που πολλά νοικοκυριά κάνουν τα ψώνια της βδομάδας, ή τη παραμονή της Πρωτοχρονιάς που ετοιμάζεται το Πρωτοχρονιάτικο τραπέζι. Η λύση που θα μπορούσε να δώσει ο Διευθυντής του καταστήματος, για να μειώσει την ουρά και να βελτιώσει την εξυπηρέτηση, είναι να προσθέσει περισσότερα ταμεία. Ωστόσο, η προσθήκη αυτή συνεπάγεται κάποιο κόστος. Θα πρέπει λοιπόν να βρεθεί μια χρυσή τομή ανάμεσα στην καλύτερη εξυπηρέτηση και το αντίστοιχο κόστος.

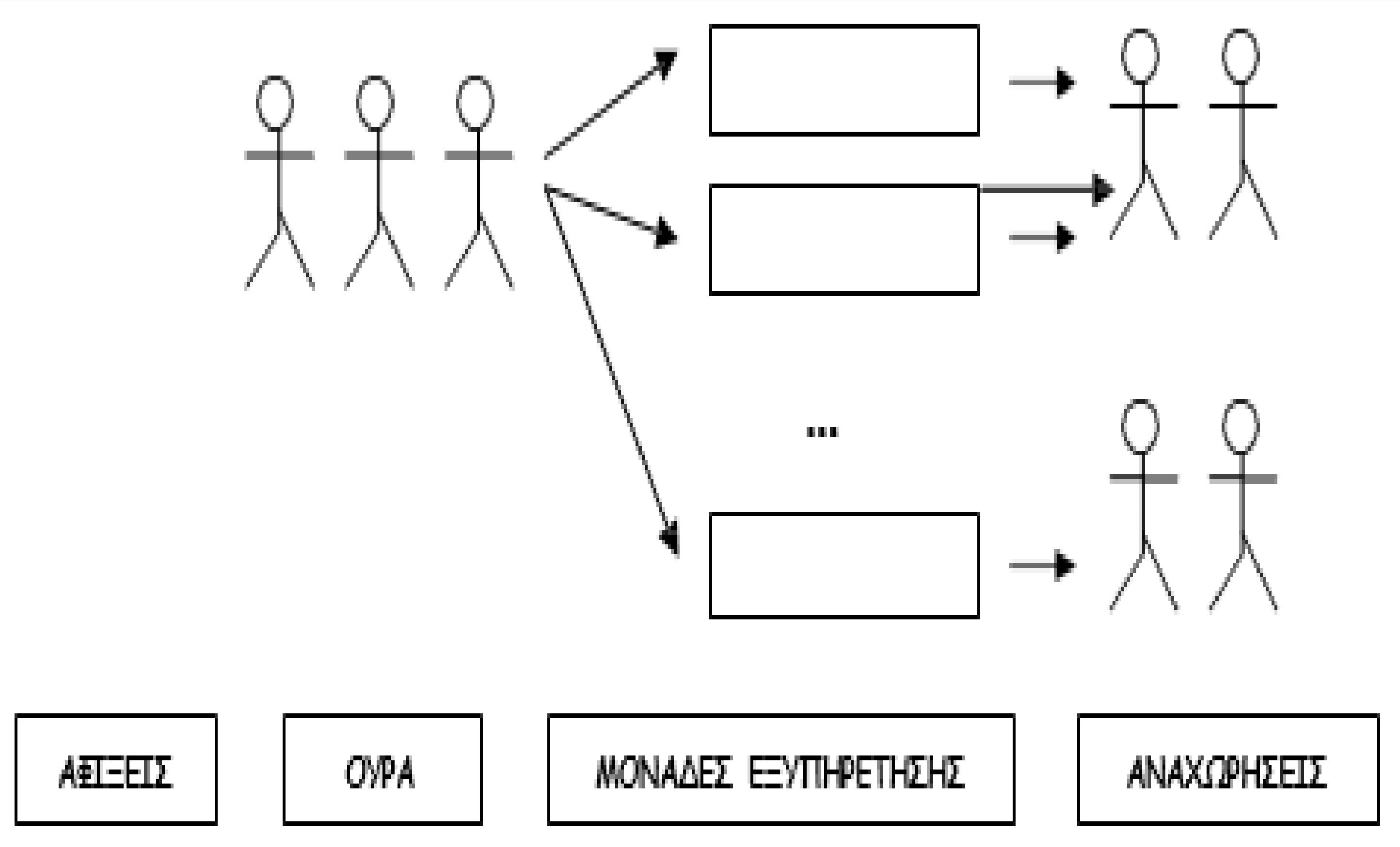
Ουρές Αναμονής και Πιθανότητες

Στα ταμεία του supermarket κάποιες ώρες της ημέρας μπορεί να περιμένουν 1-2 άτομα ενώ σε άλλες να σχηματίζεται μια τεράστια ουρά! Ο αριθμός λοιπόν των πελατών που βρίσκονται στην ουρά δείχνει να είναι τυχαίος. Η μήπως δεν είναι και τόσο τυχαίος; Μήπως παίρνει διάφορες τιμές με κάποιες πιθανότητες; Μήπως δηλαδή ακολουθεί κάποια Τυχαία Κατανομή; Οι πιθανότητες λοιπόν και οι τυχαίες κατανομές έρχονται να παίξουν ένα κυρίαρχο ρόλο στη Θεωρία των Ουρών. Έρχονται να χτίσουν τα στοχαστικά μοντέλα που θα περιγράψουν τις Ουρές Αναμονής.

Χαρακτηριστικά ενός Μοντέλου Ορών Αναμονής

Όταν μιλάμε για ένα σύστημα ουρών αναμονής, θα εννοούμε:

- την άφιξη των αντικειμένων,
- την ουρά αναμονής που δημιουργείται,
- την μία ή τις πολλές μονάδες εξυπηρέτησης,
- τον τρόπο με τον οποίο εξυπηρετείται η ουρά.



Χαρακτηριστικά ενός Μοντέλου Ορών Αναμονής

Το <u>πλήθος των αντικειμένων</u> που εισέρχονται στο σύστημα μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

Παρατήρηση:

Όταν το πλήθος των αντικειμένων που εισέρχονται στο σύστημα είναι πολύ μεγάλο, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι άπειρο.

Για παράδειγμα, οι κάτοικοι μιας πόλης που επισκέπτονται το μοναδικό ταχυδρομείο της πόλης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν άπειρο πλήθος.

Χαρακτηριστικά ενός Μοντέλου Ορών Αναμονής

Ο τρόπος εξυπηρέτησης, η σειρά δηλαδή με τη οποία εξυπηρετούνται τα αντικείμενα, μπορεί να είναι:

- FIFO (first in - first out): το πρώτο αντικείμενο που εισέρχεται στο σύστημα εξυπηρετείται πρώτο. Είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος. π.χ. το γνωστό αριθμημένο χαρτάκι σε μια τράπεζα εξασφαλίζει την εξυπηρέτηση FIFO.
- LIFO (last in – first out): το τελευταίο αντικείμενο εξυπηρετείται πρώτο. π.χ. στα Ferry Boats πρώτο βγαίνει το αυτοκίνητο που μπήκε τελευταίο.
- Τυχαίος: π.χ. επιλογή του αντικειμένου που θα εξυπηρετηθεί με κλήρωση.

Χαρακτηριστικά ενός Μοντέλου Ορών Αναμονής

Για ένα συγκεκριμένο σύστημα ουρών αναμονής, όπως αυτά που περιγράψαμε στην εισαγωγή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο ουρών για να περιγράψουμε χαρακτηριστικά όπως:

- Το μέσο αριθμό αντικειμένων που περιμένουν σε μια ουρά
- Το μέσο αριθμό αντικειμένων σε όλο το σύστημα (τόσο στην ουρά όσο και στις μονάδες εξυπηρέτησης)
- Το μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά.
- Το μέσο χρόνο αναμονής σε όλο το σύστημα.
- Την πιθανότητα το σύστημά μας να είναι αδρανές (να μην εξυπηρετείται κανένα αντικείμενο)
- Την πιθανότητα το σύστημά μας να είναι απασχολημένο (να εξυπηρετείται έστω και ένα αντικείμενο)
- Την πιθανότητα να υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα.
- Την πιθανότητα ένα αντικείμενο που εισάγεται στο σύστημα να μην μπει σε αναμονή διότι δεν υπάρχουν διαθέσιμες θέσεις αναμονής, κλπ

Ο συμβολισμός A/B/c

Για να καταδείξουμε ένα μοντέλο ουράς αναμονής χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό **A/B/c.** Στον συμβολισμό αυτό,

- Το σύμβολο **A** αναφέρεται στην κατανομή των αφίξεων
- Το σύμβολο **B** αναφέρεται στην κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης
- Το **c** αναφέρεται στον αριθμό των μονάδων εξυπηρέτησης.

Ο συμβολισμός Μ/Μ/c

Η περίπτωση του τηλεφωνικού κέντρου είναι ένα καλό παράδειγμα ουράς αναμονής, καθώς έχουμε εισερχόμενες κλήσεις που αναμένουν να εξυπηρετηθούν από το κέντρο. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο που δέχεται κλήσεις με συχνότητα λ (κλήσεις ανά χρονική μονάδα) γνωρίζουμε ότι

- ✓ Ο αριθμός Χ των κλήσεων ακολουθεί ***κατανομή Poisson***
- ✓ Το χρονικό διάστημα Τ μεταξύ δύο κλήσεων ακολουθεί ***εκθετική κατανομή***.

Όταν η κατανομή των αφίξεων είναι **Poisson** ενώ η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης είναι **εκθετική** τότε στη θέση των συμβόλων **Α** και **Β** θέτουμε **Μ**.

Ο συμβολισμός A/B/c

Για μια γενική κατανομή (οποιαδήποτε) **το αντίστοιχο σύμβολο A ή B είναι G (General).**

Όταν έχουμε σταθερή κατανομή, δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων ή ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι σταθερός **το αντίστοιχο σύμβολο A ή B είναι D (Deterministic).**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Όταν λέμε ότι έχουμε μοντέλο **M/D/3** εννοούμε ότι

- ο αριθμός των αφίξεων στο σύστημα ακολουθεί κατανομή Poisson (M),
- ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι σταθερός (D),
- υπάρχουν 3 μονάδες εξυπηρέτησης.

το μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Η σειρά εξυπηρέτησης είναι first-in, first-out (FIFO).
- Κάθε αντικείμενο στην άφιξη αναμένει να εξυπηρετηθεί (δεν εγκαταλείπει την ουρά)
- Ο ρυθμός των αντικειμένων στην άφιξη ακολουθεί κατανομή Poisson και τα αντικείμενα προέρχονται από ένα άπειρο ή πολύ μεγάλο πλήθος.
- Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μεγαλύτερος από το μέσο ρυθμό άφιξης.

το μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Στο μοντέλο M/M/1 τα πάντα καθορίζονται από δύο παραμέτρους:

λ = ρυθμός αφίξεων

(ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα)

μ = ρυθμός εξυπηρέτησης

(ο μέσος αριθμός αντικειμένων που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα)

το μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

οι παράμετροι λ και μ είναι ρυθμοί και εκφράζονται σε αντικείμενα ανά χρονική μονάδα, πχ

πελάτες/ώρα

αντικείμενα/λεπτό

πακέτα δεδομένων/sec

Όταν, για παράδειγμα, σε μια εφαρμογή έχουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι κατά μέσο όρο 10 λεπτά, ο ρυθμός εξυπηρέτησης δεν είναι μ=10, αλλά

$$\mu = 60/10 = 6 \text{ αντικείμενα / ώρα}$$

διότι σε μια ώρα εξυπηρετούνται 6 αντικείμενα.

το μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι	$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (δηλ. και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι	$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι	$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$
Η πιθανότητα να είναι απασχολημένη η μονάδα εξυπηρέτησης, δηλαδή ότι θα υπάρξει αναμονή στην ουρά, είναι	$U = \frac{\lambda}{\mu}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-1 στο μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Σε ένα κατάστημα με μία μόνο ταμειακή μηχανή έρχονται κατά μέσο όρο 15 πελάτες την ώρα, ενώ ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 3 λεπτά.

α) Να υπολογιστούν όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη που αναφέρονται παραπάνω.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν ταυτόχρονα 3 πελάτες στο ταμείο;

Εφόσον ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι 3 λεπτά, εξυπηρετούνται κατά μέσο όρο μ = 60/3 = 20 πελάτες την ώρα.

Συνεπώς,

ρυθμός αφίξεων

λ = 15 πελάτες/ώρα

ρυθμός εξυπηρέτησης

μ = 20 πελάτες/ώρα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-1 στο μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στο ταμείο (ουρά και εξυπηρέτηση) είναι:	$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{15}{20} = 0{,}25$
Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες συνολικά στο ταμείο είναι	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$
Ο μέσος αριθμός πελατών στο ταμείο (δηλ. και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι	$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{15}{20 - 15} = 3$
Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = 2{,}25$
Ο μέσος χρόνος αναμονής πελάτη στο ταμείο είναι	$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{15}$
Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25}{15} = 0{,}15$
Η πιθανότητα να είναι απασχολημένη η μονάδα εξυπηρέτησης, δηλαδή ότι θα υπάρξει αναμονή στην ουρά, είναι	$U = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{20} = 0{,}75$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-1 στο μοντέλο Μ/Μ/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες συνολικά στο ταμείο είναι

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Επομένως η πιθανότητα να υπάρχουν ταυτόχρονα 3 πελάτες στο ταμείο είναι:

$$P_3 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}105$$

Δηλαδή περίπου 10,5%

το μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Ο απώτερος στόχος της ανάλυσης ενός συστήματος ουρών αναμονής, πέρα από την άμεση χρησιμότητα των στατιστικών δεδομένων που δίνουν οι παραπάνω τύποι, είναι η *λήψη αποφάσεων* με βάση τα αποτελέσματα των τύπων αυτών.

Ας δούμε λοιπόν μια συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-2 στο μοντέλο Μ/Μ/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

Στο κατάστημα του προηγούμενου παραδείγματος, ο ιδιοκτήτης, προκειμένου να έχει τους πελάτες του ικανοποιημένους, επιθυμεί να μειώσει το συνολικό χρόνο παραμονής τους στο ταμείο (αναμονή στην ουρά και εξυπηρέτηση). Αποφάσισε λοιπόν ότι ο μέσος χρόνος παραμονής δεν πρέπει να ξεπερνά τα 5 λεπτά.

α) ένας τρόπος να το πετύχει είναι να βελτιώσει το ρυθμό εξυπηρέτησης. Ποιος πρέπει να είναι αυτός ο ρυθμός;

β) υπάρχει η δυνατότητα τοποθέτησης ενός βοηθού στο ταμείο και ο ιδιοκτήτης πιστεύει ότι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης μπορεί να μειωθεί στα 2 λεπτά. Ικανοποιείται με αυτόν τον τρόπο ο στόχος της μέγιστης παραμονής (κατά μέσο όρο) των 5 λεπτών στο ταμείο;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-2 στο μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

α) Είδαμε ότι ο μέσος χρόνος παραμονής του πελάτη στο ταμείο είναιW=12 λεπτά, ενώ ο ιδιοκτήτης τον θέλει το πολύ στα 5 λεπτά, δηλαδή

$$W \le \frac{1}{12} \quad \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma$$

Ο ρυθμός αφίξεων παραμένει

λ = 15 πελάτες/ώρα.

Ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ υπολογίζεται ως εξής:

$$W \le \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu - \lambda} \le \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu - 15} \le \frac{1}{12} \Leftrightarrow \mu - 15 \ge 12 \Leftrightarrow \mu \ge 27$$

δηλαδή ο ρυθμός εξυπηρέτησης πρέπει να είναι τουλάχιστον 27 πελάτες την ώρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ-2 στο μοντέλο M/M/1 (μία μονάδα εξυπηρέτησης)

β) Αν ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης μειωθεί στα 2 λεπτά, αυτό μεταφράζεται σε ρυθμό εξυπηρέτησης

μ = 60/2 = 30 πελάτες την ώρα.

Άρα ικανοποιείται η επιθυμία του ιδιοκτήτη σύμφωνα με την απάντηση(α).

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή ο μέσος χρόνος παραμονής στο ταμείο θα γίνει

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{30 - 15} \leq \frac{1}{15}$$

Δηλαδή W=4 λεπτά

το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

Σε αρκετές περιπτώσεις, ενώ εξακολουθούμε να έχουμε

μία ουρά αναμονής,

τα αντικείμενα του συστήματος εξυπηρετούνται από

περισσότερες μονάδες εξυπηρέτησης.

Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε το μοντέλο M/M/c.

το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

- Υπάρχει μόνο μία ουρά εξυπηρέτησης. Η σειρά εξυπηρέτησης είναι first-in, first-out (FIFO).
- Κάθε αντικείμενο εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη μονάδα εξυπηρέτησης.
- Ο ρυθμός των αντικειμένων στην άφιξη ακολουθεί κατανομή Poisson και τα αντικείμενα προέρχονται από ένα άπειρο ή πολύ μεγάλο πλήθος.
- Ο ρυθμός εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.
- Ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μεγαλύτερος από το μέσο ρυθμό άφιξης.

το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

οι παράμετροι λ και μ είναι ρυθμοί και εκφράζονται ως εξής:

λ = *ρυθμός αφίξεων*

(ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα)

μ = *ρυθμός εξυπηρέτησης*

(ο μέσος αριθμός αντικειμένων που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα και ανά μονάδα εξυπηρέτησης)

c = *αριθμός μονάδων εξυπηρέτησης*

Σημειώστε ότι ο *μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης για όλο το σύστημα είναι c·μ* και πρέπει να είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό άφιξης.

το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

1. Η πιθανότητα να μην υπάρχουν αντικείμενα στο σύστημα είναι

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda}\right)}$$

2. Η πιθανότητα να υπάρχουν n αντικείμενα στο σύστημα είναι

$$P_n = \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \text{για } n > c$$

και

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad \text{για } n \le c$$

το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

3. Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στο σύστημα (δηλ. και στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

4. Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

5. Ο μέσος αριθμός αντικειμένων στην ουρά είναι

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

6. Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

το μοντέλο M/M/c (c μονάδες εξυπηρέτησης)

7. Η πιθανότητα να είναι απασχολημένες όλες οι μονάδες εξυπηρέτησης, δηλαδή ότι θα υπάρξει αναμονή για κάποιο αντικείμενο που φτάνει στην ουρά, είναι

$$P_W = \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{c}{c\mu - \lambda} P_0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: μοντέλο M/M/2

Σε μια τράπεζα με δύο ταμεία έρχονται 20 πελάτες την ώρα. Κάθε ταμείο εξυπηρετεί 20 πελάτες την ώρα. Ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στην τράπεζα και ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα αν

α) υπάρχουν δύο ανεξάρτητες ουρές στα δύο ταμεία

β) υπάρχει μια κοινή ουρά για τα δύο ταμεία.

Η διαφορά στην ουσία είναι ότι στην περίπτωση

α) έχουμε 2 μοντέλα M/M/1

ενώ στην

β) 1 μοντέλο M/M/2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: μοντέλο M/M/2

α) **2 x (M/M/1)**

λ = 10 πελάτες/ώρα (εφόσον οι πελάτες μοιράζονται)

μ = 20 πελάτες/ώρα

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες σε κάθε ξεχωριστή ουρά είναι

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Άρα η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στην τράπεζα (ούτε στη μία ούτε στην άλλη ουρά) είναι

$$P_o \cdot P_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα είναι

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{20 - 10} = \frac{1}{10}\ \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma \quad \acute{\eta} \quad 6\ \lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: μοντέλο M/M/2

β) **1 x (M/M/2)**

λ = 20 πελάτες/ώρα (εφόσον υπάρχει ένα κοινό σύστημα)

μ = 20 πελάτες/ώρα

Η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στην τράπεζα είναι

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{c\mu}{c\mu - \lambda}\right)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: μοντέλο M/M/2

Για το μέσο χρόνο αναμονής στο σύστημα χρειαζόμαστε πρώτα το

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Συνεπώς

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4}{3}\frac{1}{20} = \frac{1}{15} \ \text{ώρες} = 4 \ \text{λεπτά}$$