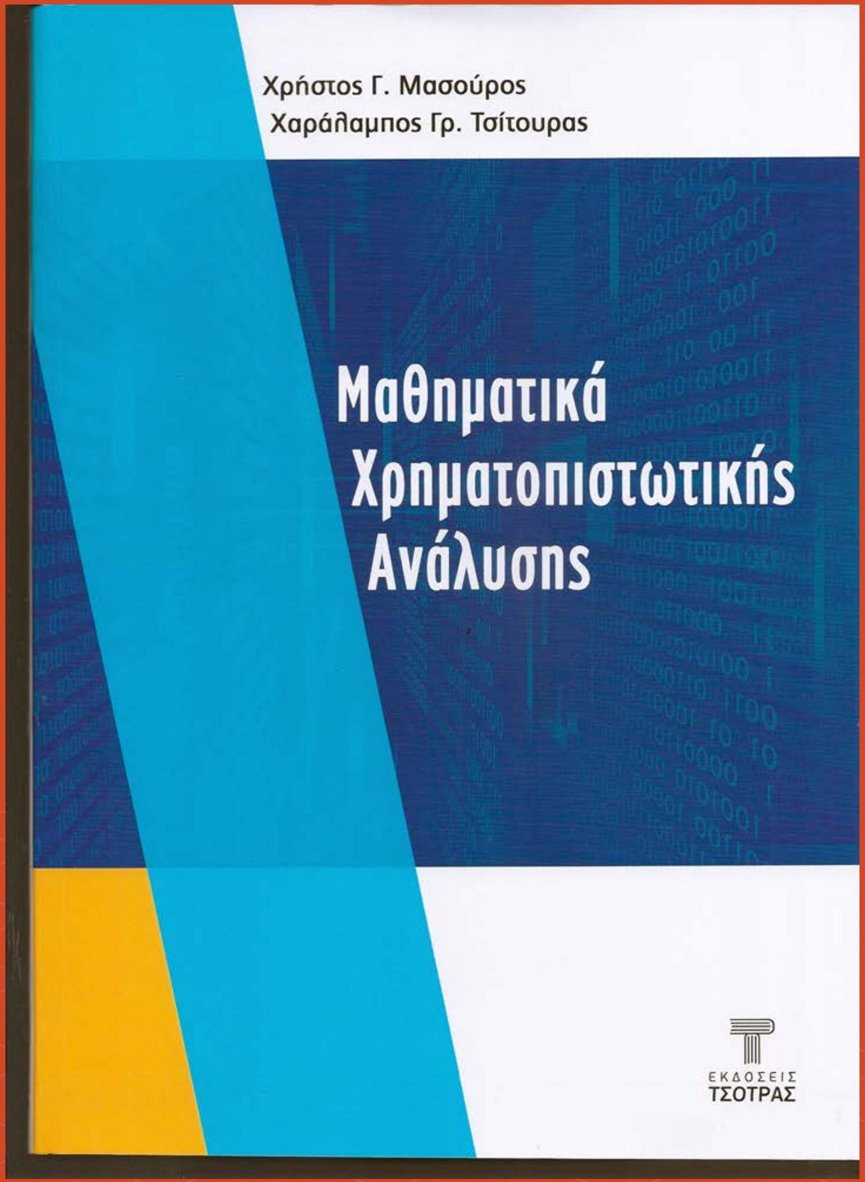
Διοίκηση Έργων

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος



Χρήστος Γ. Μασούρος
Χαράλαμπος Γρ. Τσίτουρας

Μαθηματικά Χρηματοπιστωτικής Ανάλυσης

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΤΣΟΤΡΑΣ

Δικτυωτή Ανάλυση

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Το πρόβλημα του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου

Περιγραφή του προβλήματος

Έστω ένα δίκτυο

- Κάθε ακμή εκφράζει μία πιθανή σύνδεση δύο κόμβων
- Το κόστος της ακμής εκφράζει το κόστος της αντίστοιχης σύνδεσης
- Ποιες ακμές πρέπει να επιλεγούν ώστε όλοι οι κόμβοι να επικοινωνούν μεταξύ τους, άμεσα ή έμμεσα (δηλ. μέσω άλλων κόμβων), με το ελάχιστο δυνατό κόστος;

Εφαρμογές

- Τηλεπικοινωνίες
- Δίκτυα υπολογιστών
- Οδικά δίκτυα
- Άρδευση, Ύδρευση

Αλγόριθμος εύρεσης ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου

Βήμα 1: Επιλέγουμε αυθαίρετα έναν οποιονδήποτε κόμβο, ο οποίος εντάσσεται πρώτος στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων

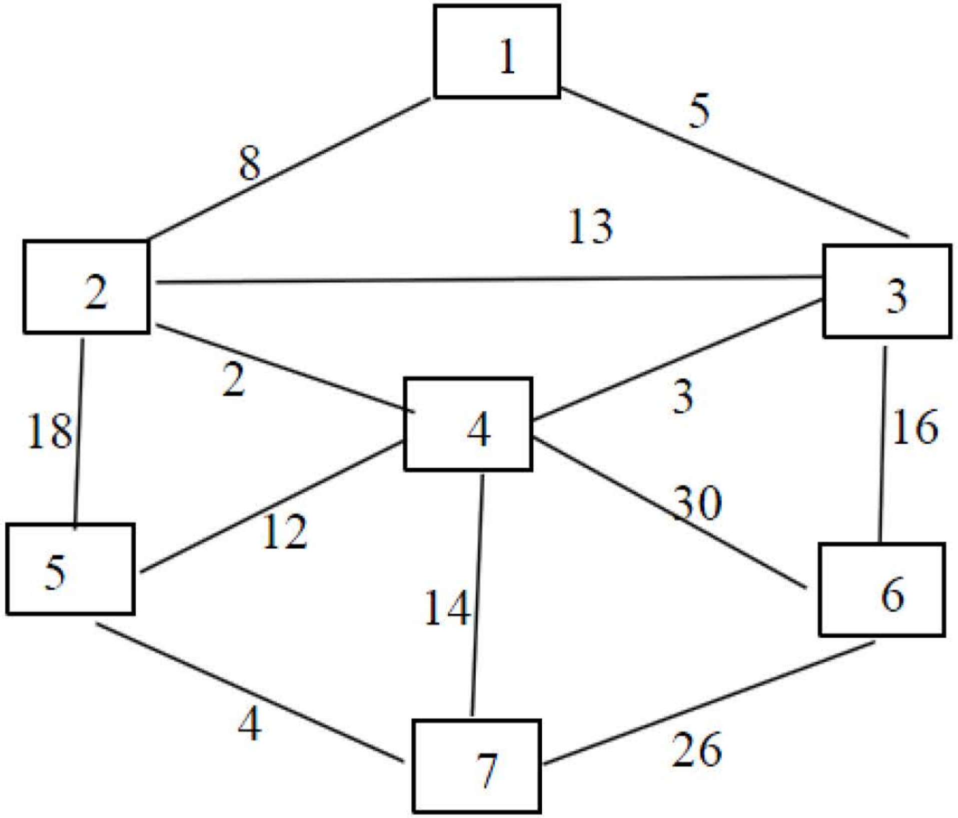
Βήμα 2: Συνδέουμε τον κόμβο αυτό με τον πλησιέστερό του κόμβο, ο οποίος εντάσσεται στο σύνολο των συνδεδεμένων

Βήμα 3: Εντοπίζουμε τον κόμβο που βρίσκεται πλησιέστερα σε κάποιον ήδη συνδεδεμένο και το συνδέουμε με τον πλησιέστερο συνδεδεμένο κόμβο. (Σε περίπτωση ισοψηφίας επιλέγουμε αυθαίρετα έναν από τους ισοψηφούντες κόμβους)

Βήμα 4: Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 μέχρι να συνδεθούν όλοι οι κόμβοι

Παράδειγμα 1.

Σε ένα κάμπο υπάρχουν επτά αγροτικά χωριά, τα οποία παριστάνονται στο παρακάτω γράφημα με ορθογώνια σχήματα και συμβολίζονται με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7.



Για την άρδευση των κτημάτων των χωριών έχει αποφασισθεί η κατασκευή ενός αρδευτικού δικτύου. Στο ίδιο γράφημα, οι δυνατές διαδρομές πάνω στις οποίες μπορεί να κατασκευασθεί το δίκτυο των αρδευτικών καναλιών που θα συνδέουν τα χωριά παριστάνεται με τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τα ορθογώνια ενώ, οι αριθμοί πάνω σε καθένα από αυτά, δείχνουν το κόστος κατασκευής του κάθε καναλιού π.χ. το χωριό 2 μπορεί να συνδεθεί με το χωριό 3 (απ' ευθείας) με κόστος κατασκευής 13 χρηματικές μονάδες.

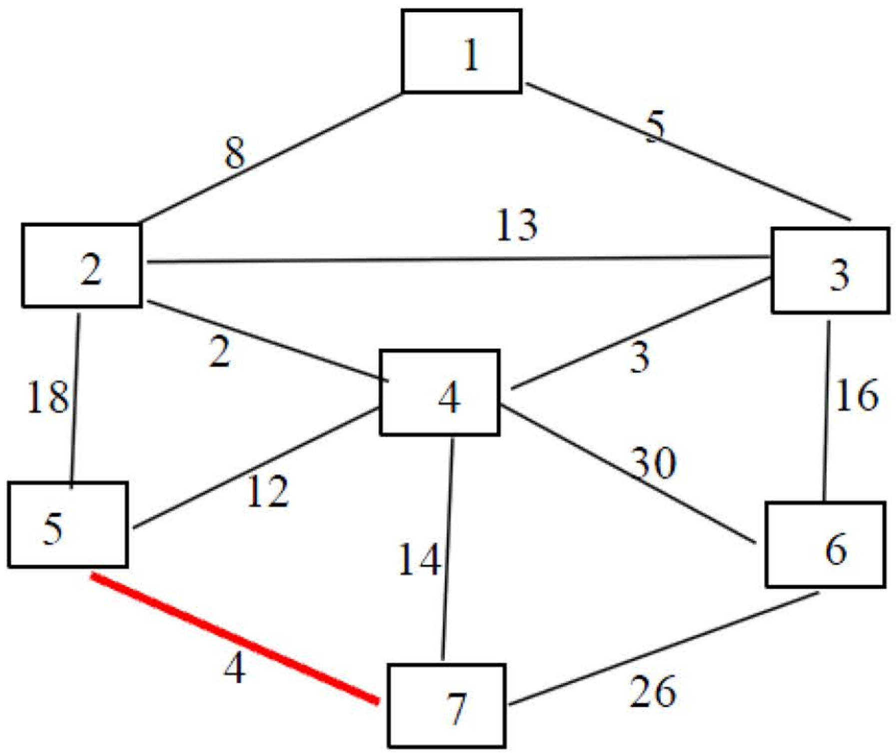
Υποδείξτε το αρδευτικό δίκτυο που πρέπει να κατασκευαστεί, δηλαδή τα κανάλια σύνδεσης μεταξύ των χωριών τα οποία πρέπει να υλοποιηθούν, σε τρόπο ώστε το νερό το οποίο θα ρέει στα κανάλια να μπορεί να φτάσει και στα επτά χωριά και ταυτόχρονα, το συνολικό κόστος κατασκευής του να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Λύση

Είναι φανερό ότι εδώ **έχουμε ένα πρόβλημα ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου**, καθώς με το υπό κατασκευή δίκτυο το νερό πρέπει να μπορεί να φτάσει σε όλα τα χωριά (κόμβοι του δικτύου) με το ελάχιστο δυνατόν συνολικό κόστος. Για την επίλυσή του θα εφαρμοσθεί ο ομώνυμος αλγόριθμος.

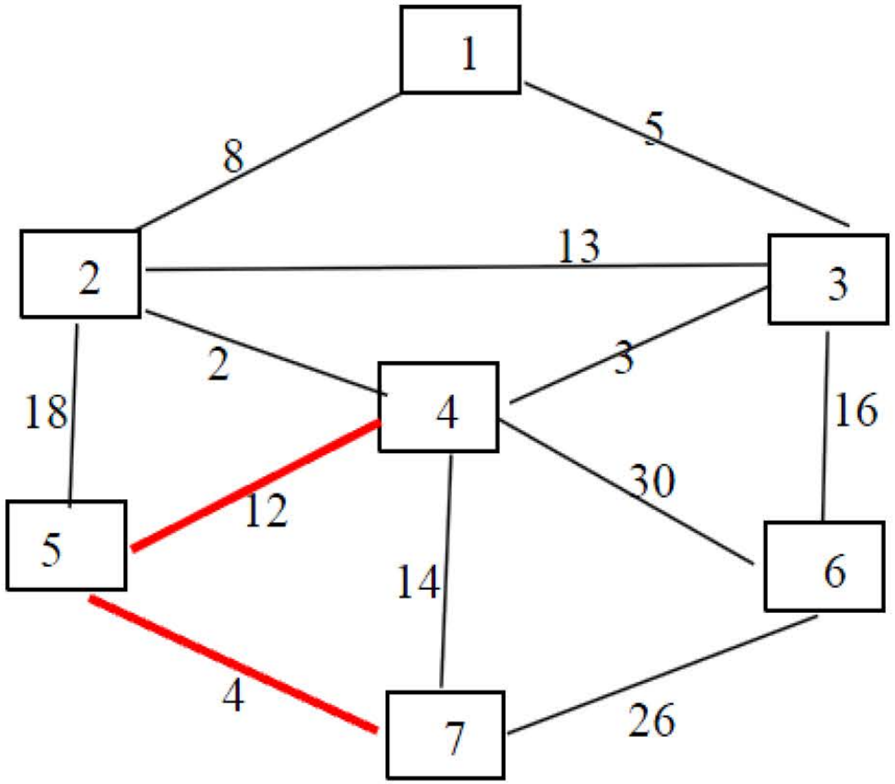
Στα επόμενα, και για ευκολία στην παρουσίαση της λύσης, η λέξη "απόσταση" θα σημαίνει "κόστος".

1η Επανάληψη του αλγορίθμου



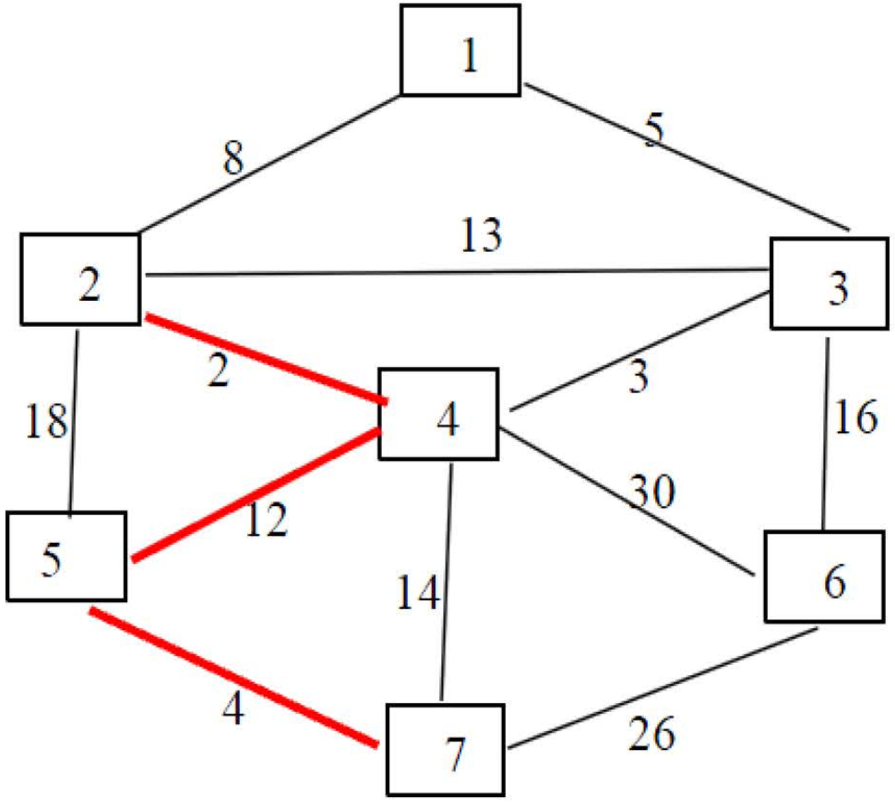
Ξεκινάμε, αυθαίρετα, από οποιοδήποτε κόμβο, έστω τον **κόμβο 5**. Ο κόμβος αυτός εισέρχεται στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων. Δηλαδή, αρχικά το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων είναι το {5}. Ο κόμβος 5 συνδέεται απ' ευθείας με τους κόμβους 2, 4 και 7 με αποστάσεις 18, 12 και 4 αντίστοιχα. Ο πλέον κοντινός είναι ο **κόμβος 7** μέσω της ακμής 5-7 με μήκος 4. Συνδεδεμένοι είναι τώρα οι κόμβοι {5, 7} και το δίκτυο είναι μαρκαρισμένο με κόκκινο.

2η Επανάληψη του αλγορίθμου



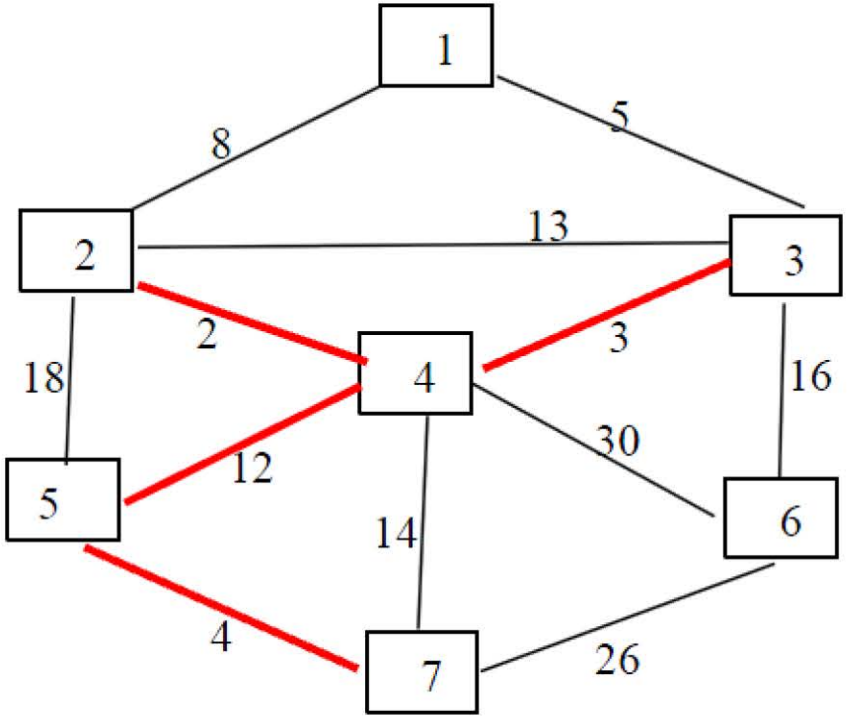
Οι κόμβοι που συνδέονται απ' ευθείας με έναν από τους κόμβους {5, 7} είναι οι 2, 4 και 6 με αποστάσεις 18 (ακμή 5-2), 12 (ακμή 5-4), 14 (ακμή 7-4) και 26 (ακμή 7-6). Ο **πλέον κοντινός** στους ήδη συνδεδεμένους κόμβους {5, 7} είναι ο **κόμβος 4** μέσω της ακμής 5-4 με απόσταση 12. Οι συνδεδεμένοι κόμβοι είναι τώρα οι {5, 7, 4} και το δίκτυο είναι μαρκαρισμένο με κόκκινο.

3η Επανάληψη του αλγορίθμου



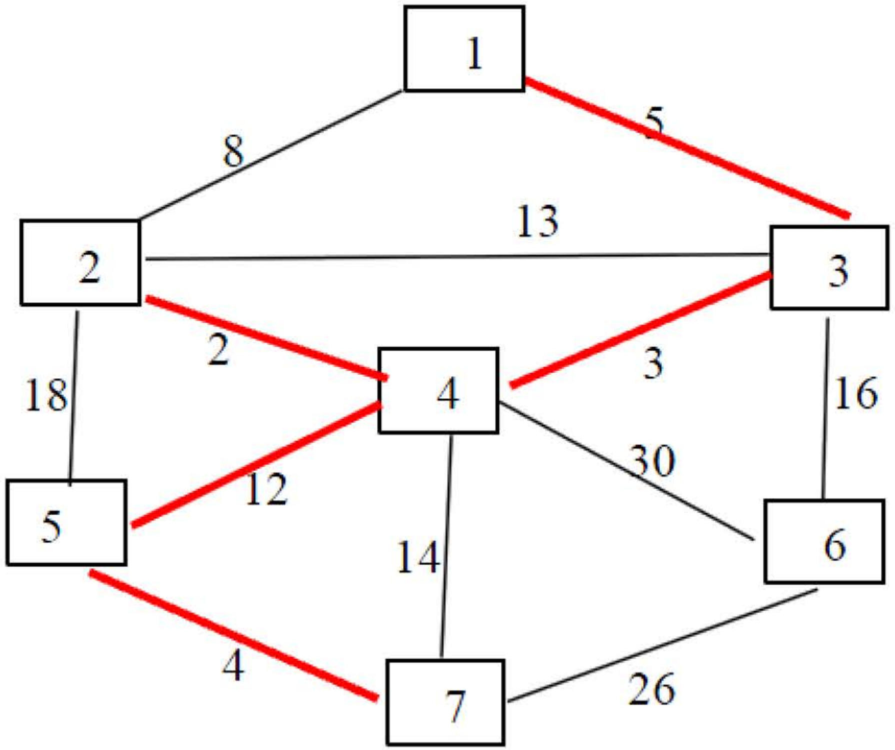
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι ο πλησιέστερος προς τους συνδεδεμένους κόμβους {5, 7, 4} είναι ο **κόμβος 2** μέσω της ακμής 4-2 με απόσταση 2. Συνδεδεμένοι καθίστανται οι κόμβοι {5, 7, 4, 2} και το δίκτυο είναι μαρκαρισμένο με κόκκινο.

4η Επανάληψη του αλγορίθμου



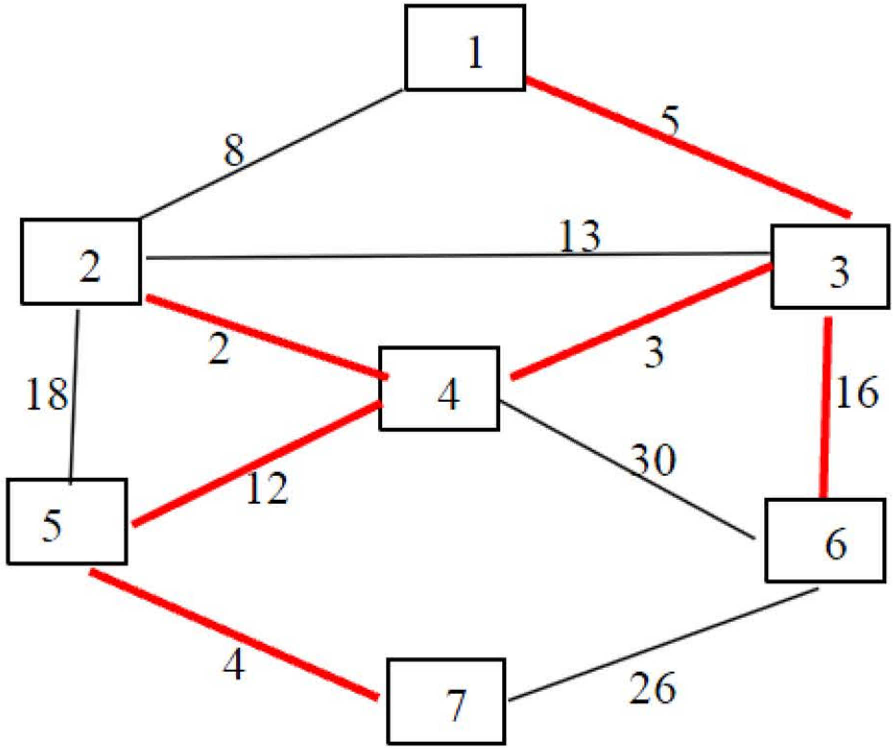
Ο πιο κοντινός στους συνδεδεμένους είναι **ο κόμβος 3** μέσω της ακμής 4-3 με απόσταση 3. Το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων γίνεται {5, 7, 4, 2, 3}.

5η Επανάληψη του αλγορίθμου



Επόμενος συνδέεται ο **κόμβος 1** μέσω της ακμής 3-1 με απόσταση 5 και το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων γίνεται {5, 7, 4, 2, 3, 1}.

6η Επανάληψη του αλγορίθμου

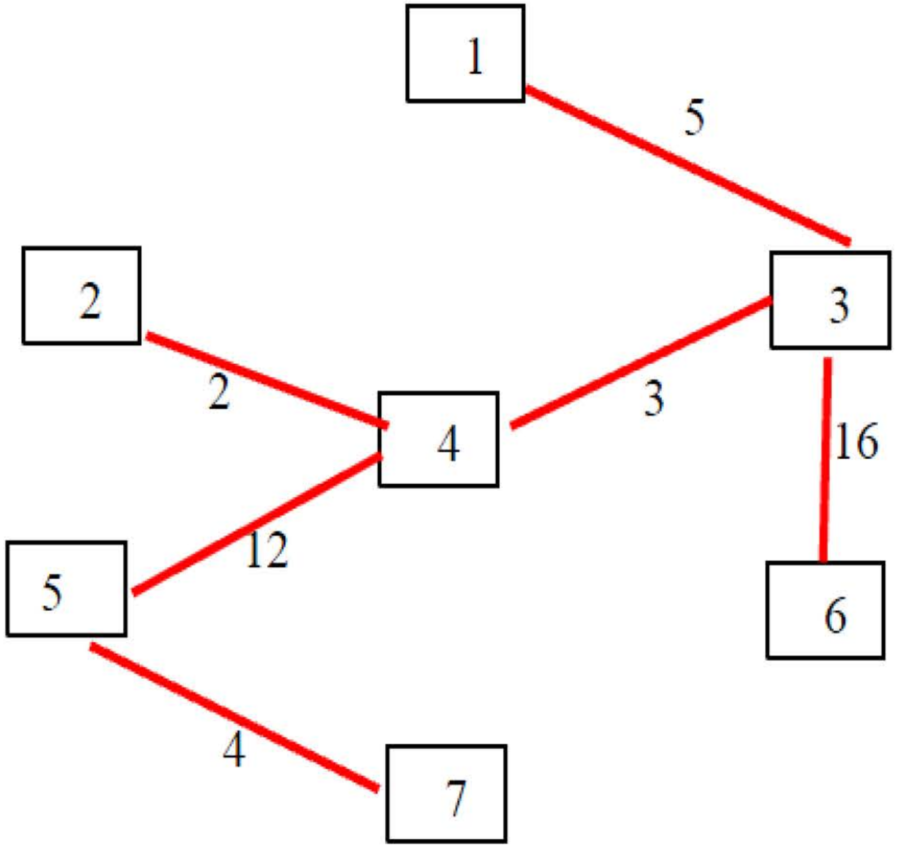


Στη συνέχεια συνδέεται ο κόμβος 6 με την ακμή 3-6 με απόσταση 16. Το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων γίνεται {5, 7, 4, 2, 3, 1, 6}.

Εφόσον δεν υπάρχει πλέον κανένας μη συνδεδεμένος κόμβος η διαδικασία σταματά (ύστερα από **7-1=6** επαναλήψεις, όπως και αναμενόταν).

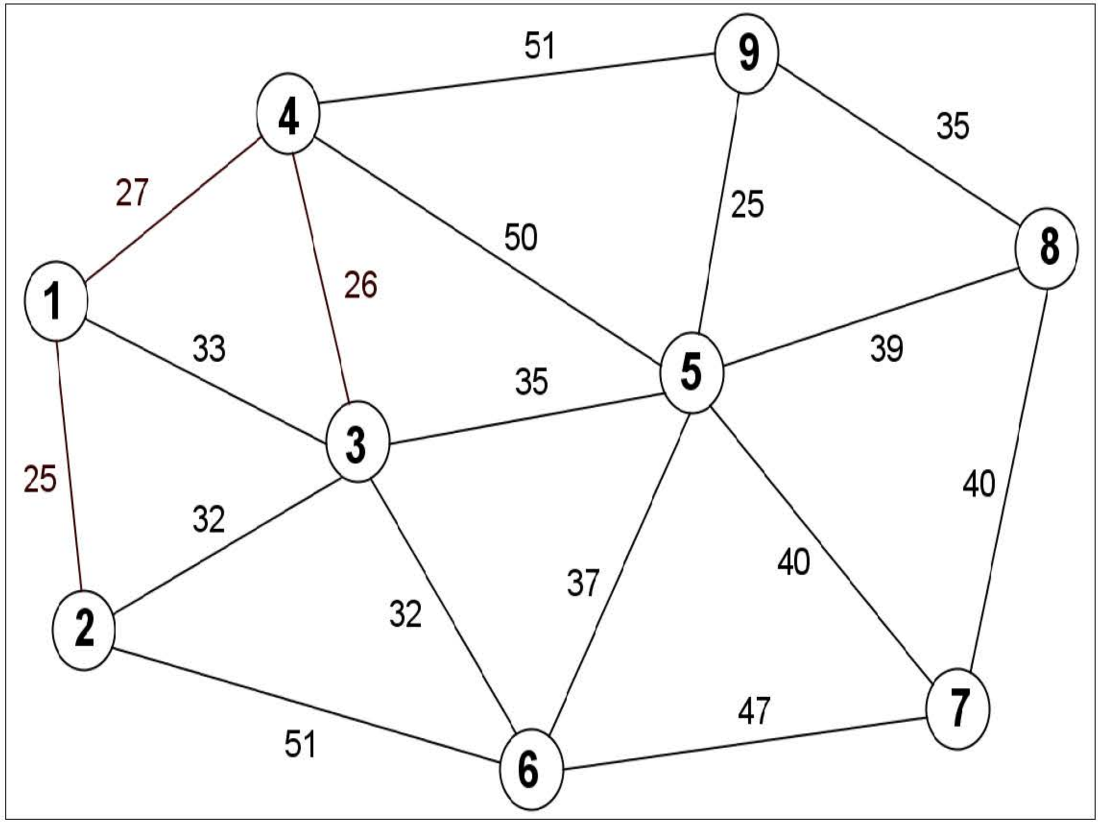
Το άθροισμα των ακμών που χρησιμοποιήθηκαν είναι 42 και αντιστοιχεί στο ελάχιστο συνολικό κόστος κατασκευής (σε χρηματικές μονάδες) του αρδευτικού δικτύου:

Κανάλια	5-7	5-4	4-2	4-3	3-1	3-6	Κόστος κατασκευής
Κόστος	4	12	2	3	5	16	42



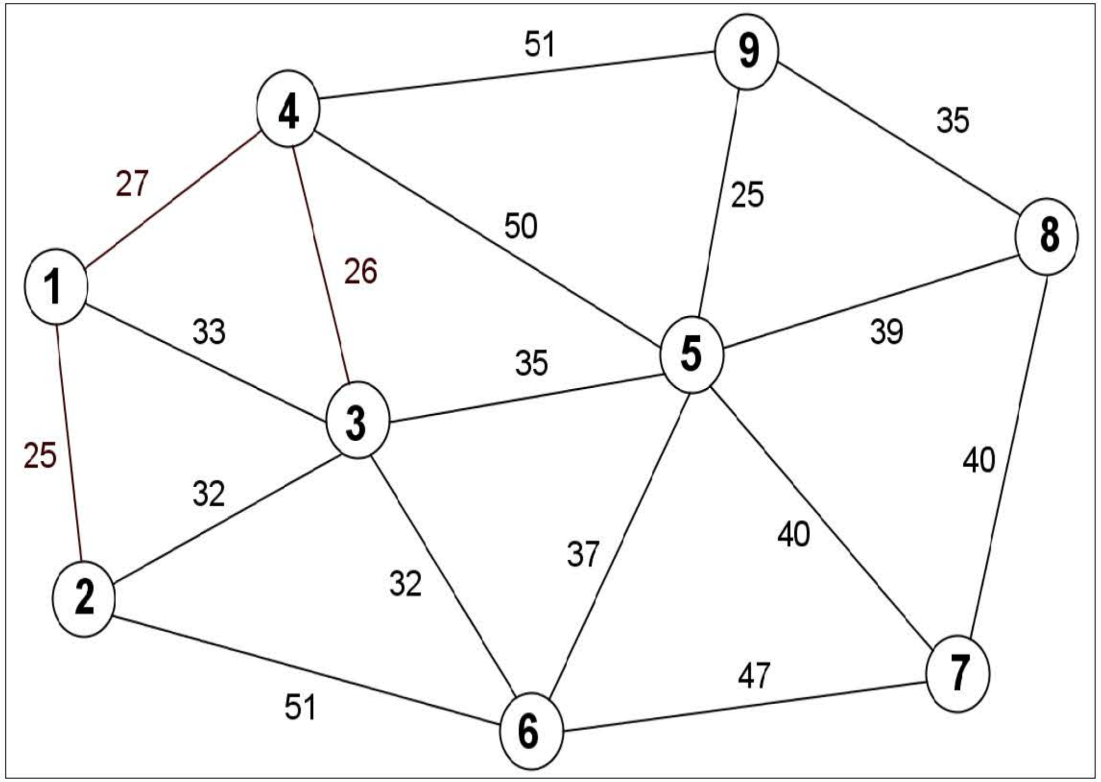
Το ελάχιστο ζευγνύον δέντρο παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, στο οποίο οι ενεργοποιημένες συνδέσεις απεικονίζονται με κόκκινες ακμές. Επισημαίνεται ότι, ανάλογα με τον κόμβο που θα επιλεγεί ως αρχικός, οι κόμβοι θα εισέρχονται στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων με διαφορετική σειρά. Προφανώς όμως το ελάχιστο ζευγνύον δέντρο δεν θα αλλάξει.

Παράδειγμα 2.



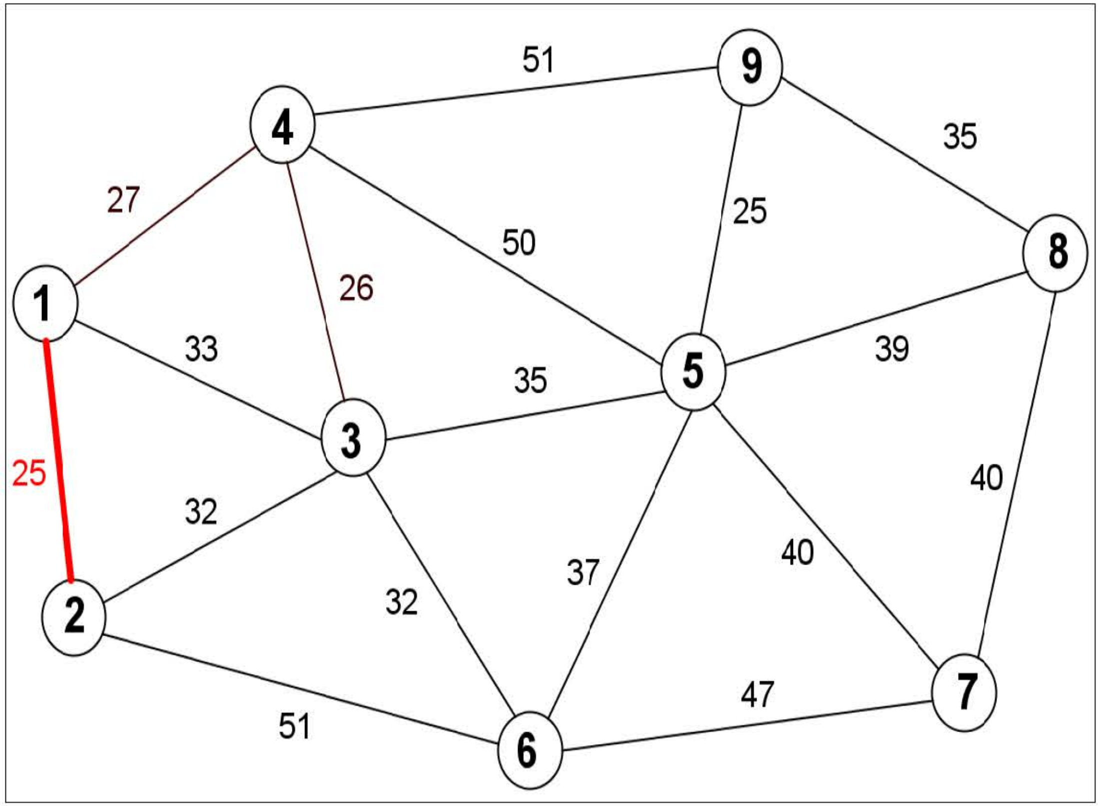
Ορεινός Δήμος έχει προγραμματίσει τη δημιουργία ενός «δασικού χωριού», δηλαδή ενός συγκροτήματος ξύλινων κατοικιών προσαρμοσμένων με το φυσικό περιβάλλον της περιοχής οι οποίες θα αναπτυχθούν σε μία ευρεία έκταση. Ο Δήμος πρόκειται παράλληλα να αναπτύξει ένα εσωτερικό δίκτυο μέσω του οποίου θα εξασφαλίζεται η πρόσβαση όλων των κατοικιών και των υπολοίπων κτιρίων του συγκροτήματος στα δίκτυα κοινής ωφέλειας. Όλα τα δίκτυα (νερό, φυσικό αέριο, καλωδιακή τηλεόραση κ.λπ.) φτάνουν μέσω ενός δασικού δρόμου στην κατοικία 1 που βρίσκεται στην είσοδο του συγκροτήματος.

Παράδειγμα 2.



Οι κατοικίες και τα υπόλοιπα οικήματα του συγκροτήματος που είναι απαραίτητα για τη λειτουργία της επιχείρησης παρουσιάζονται με μορφή κόμβων στο σχήμα που ακολουθεί, όπου φαίνονται επίσης οι πιθανές διασυνδέσεις για τη δημιουργία του συνολικού δικτύου υποδομών κοινής ωφέλειας. Οι αριθμοί που είναι γραμμένοι πάνω στις διασυνδέσεις αυτές εκφράζουν αποστάσεις σε μέτρα. Πώς πρέπει να σχεδιάσει ο Δήμος το δίκτυο ώστε να εξασφαλίζεται πρόσβαση όλων των κατοικιών και κτιρίων σε όλες τις υπηρεσίες κοινής ωφέλειας, χρησιμοποιώντας σωληνώσεις και καλωδιώσεις του μικρότερου συνολικά μήκους;

1η Επανάληψη του αλγορίθμου

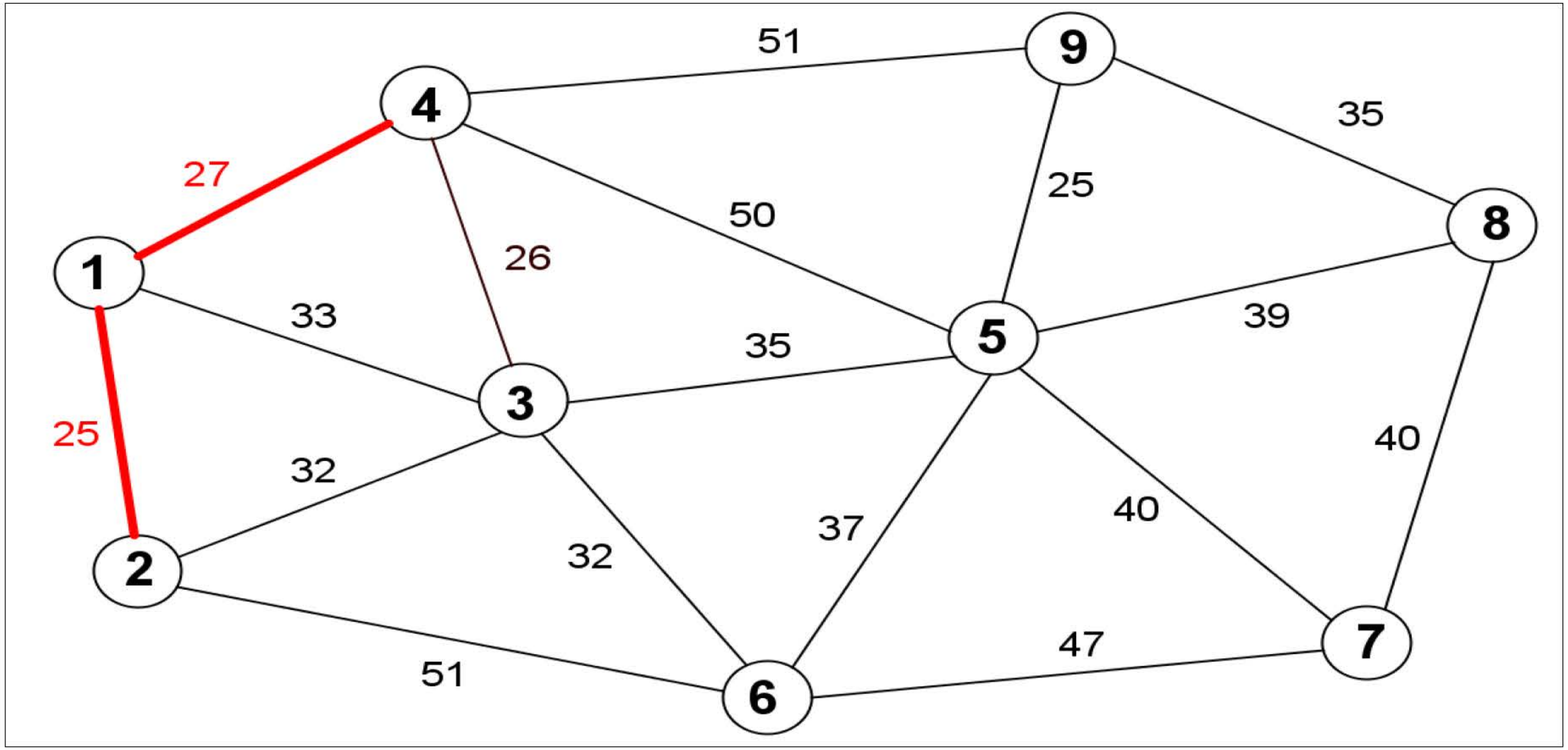


Είναι φανερό ότι εδώ **έχουμε ένα πρόβλημα ελάχιστου ζευγνύοντος δένδρου**.

Επιλέγουμε (αυθαίρετα αλλά χωρίς περιορισμό της γενικότητας) ως πρώτο κόμβο τον **κόμβο 1**. Ο κόμβος αυτός εισέρχεται στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων, C={1}. Συνδέουμε στον κόμβο 1 τον πλέον κοντινό του, που είναι ο **κόμβος 2**, μέσω της ακμής 1-2 με μήκος 25. Οι κόμβοι {1, 2} είναι συνδεδεμένοι.

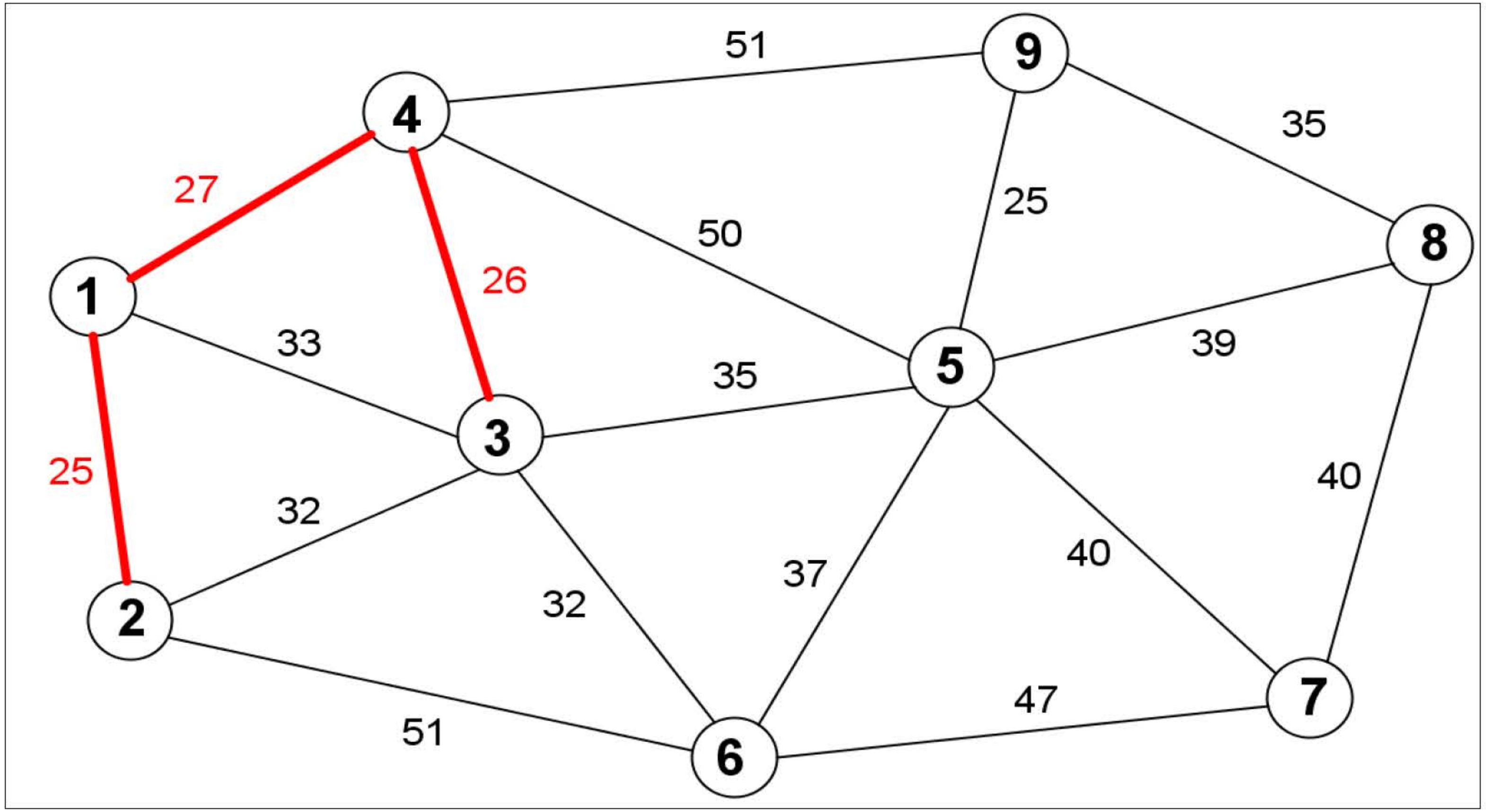
2η Επανάληψη του αλγορίθμου

Ο πιο κοντινός στους {1, 2} είναι ο **κόμβος 4** με την ακμή 1-4 μήκους 27.
Συνδεδεμένοι τώρα είναι οι κόμβοι {1, 2, 4}.



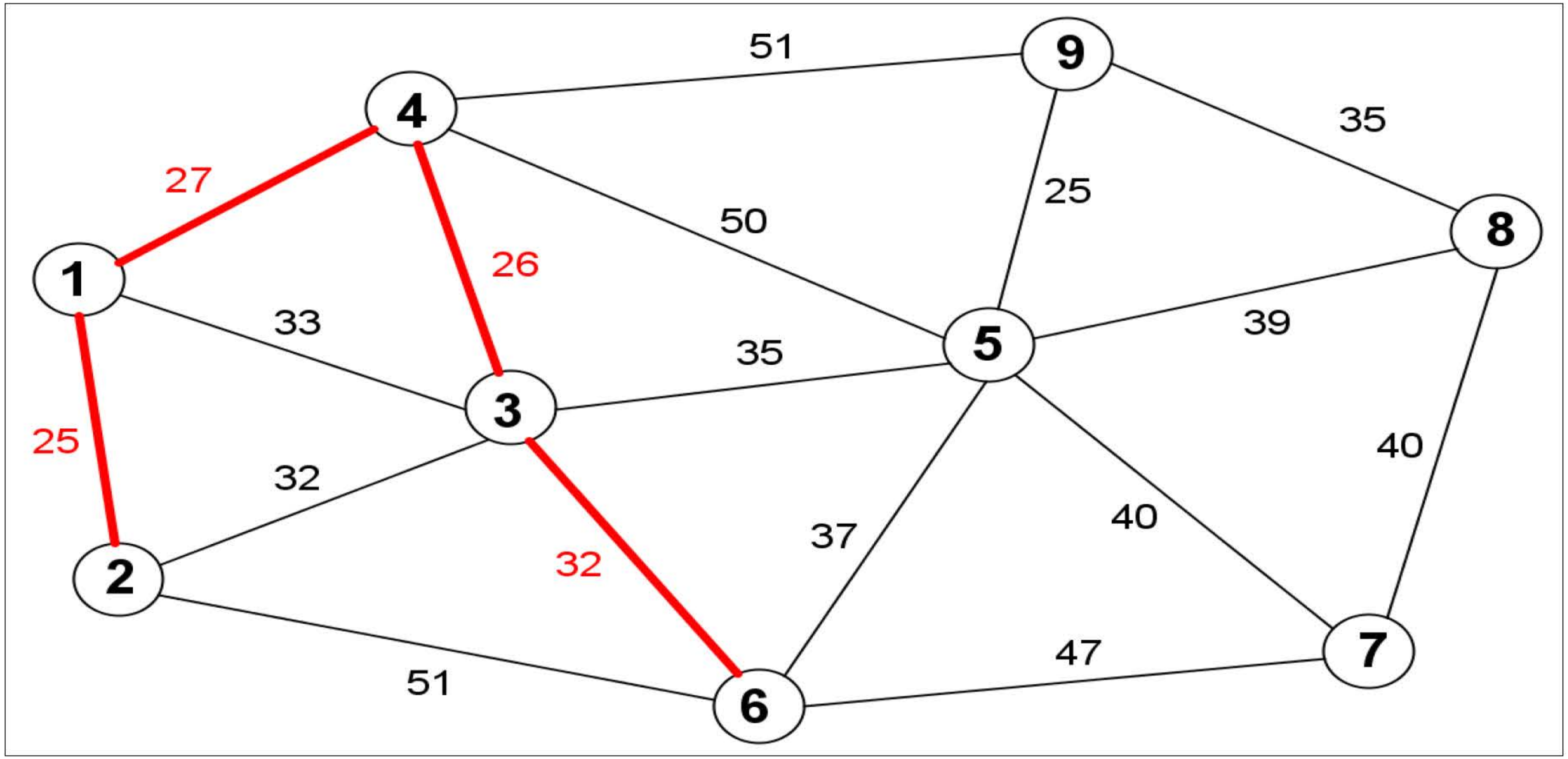
3η Επανάληψη του αλγορίθμου

Συνδέουμε στη συνέχεια τον **κόμβο 3** με την ακμή 4-3 μήκους 26.
Συνδεδεμένοι καθίστανται οι κόμβοι του συνόλου {1, 2, 4, 3}.



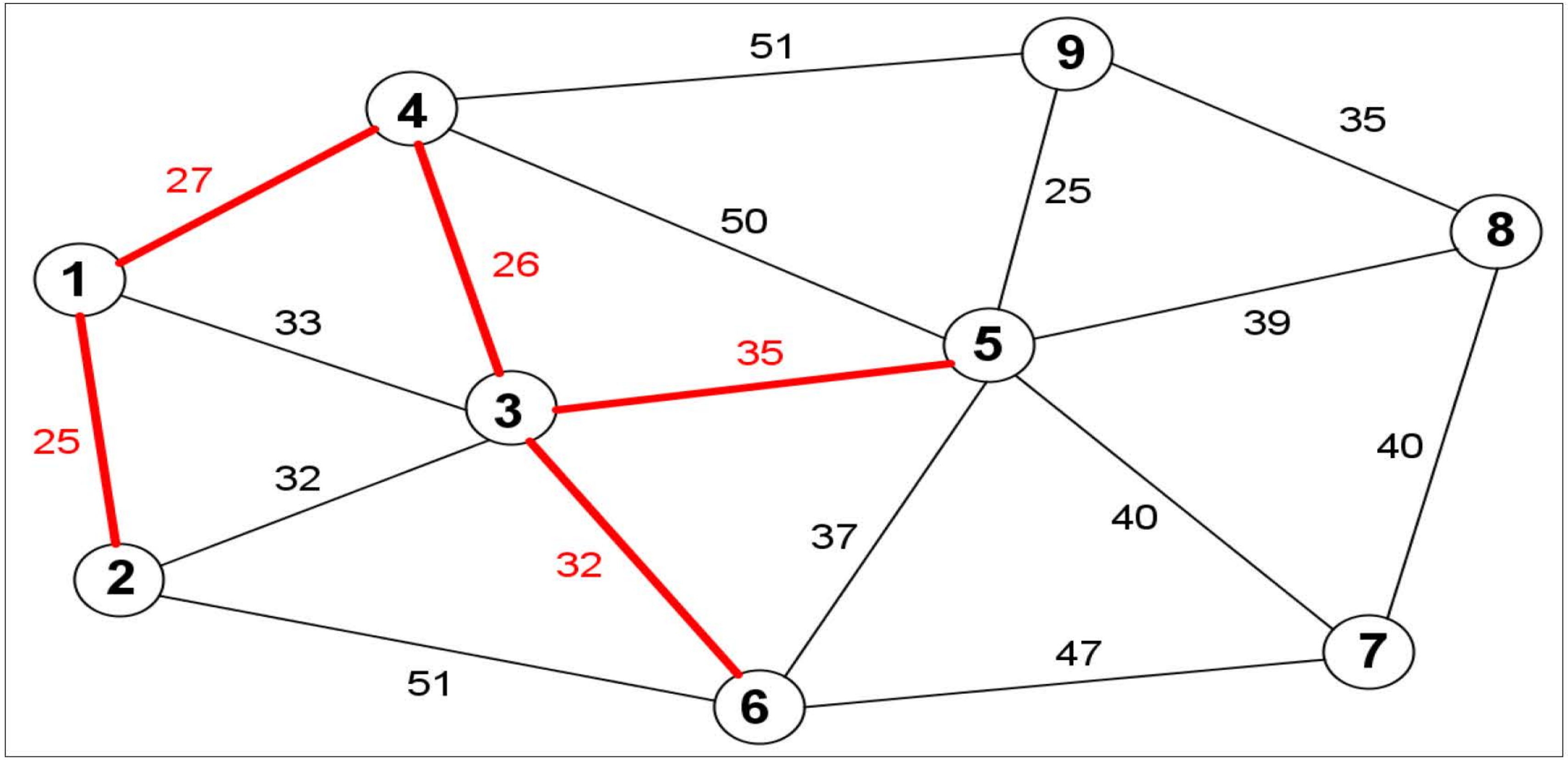
4η Επανάληψη του αλγορίθμου

Ο πιο κοντινός στους συνδεδεμένους είναι ο **κόμβος 6** με την ακμή 3-6 μήκους 32. Το σύνολο γίνεται {1, 2, 4, 3, 6}.



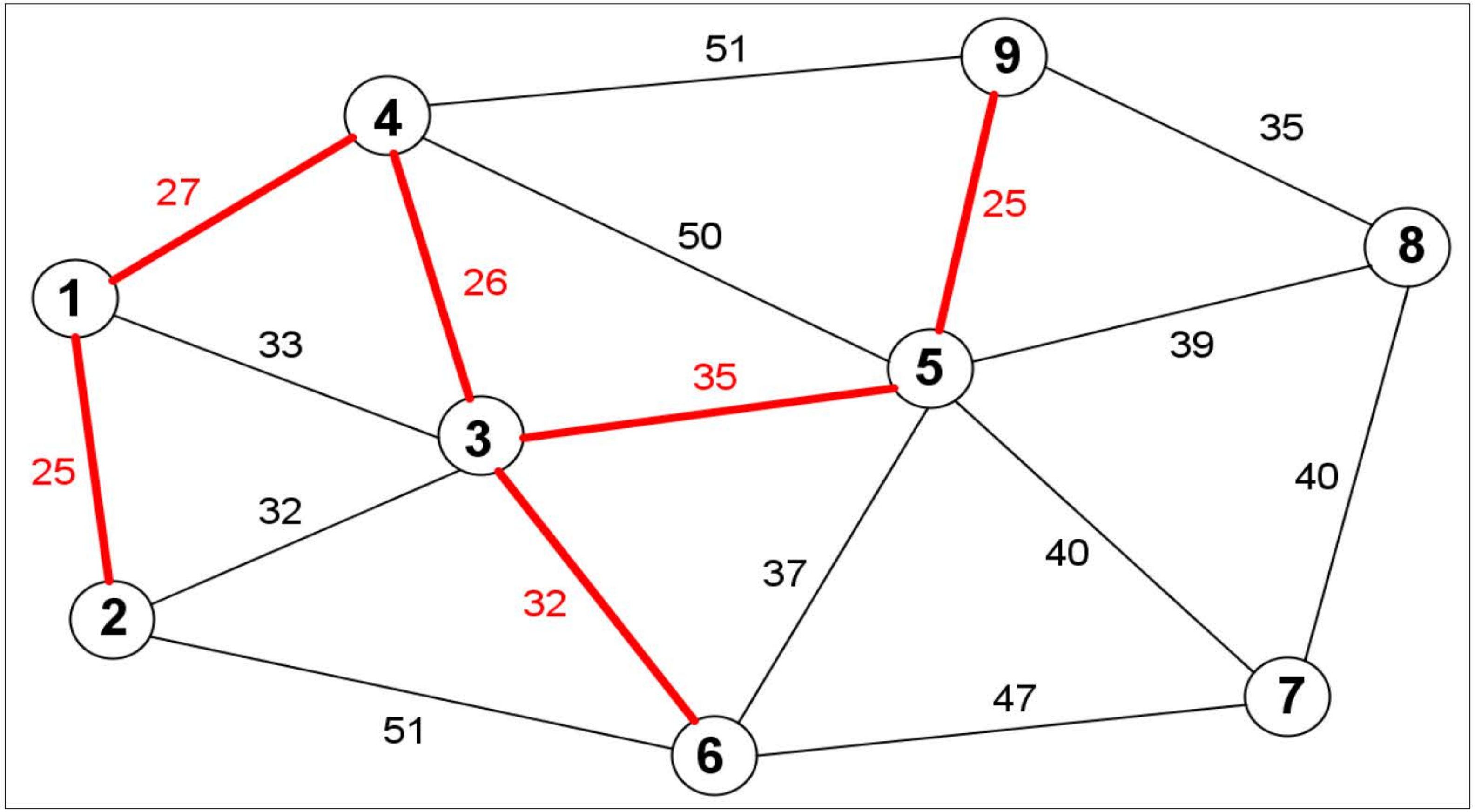
5η Επανάληψη του αλγορίθμου

Ο πιο κοντινός στους συνδεδεμένους είναι ο **κόμβος 5** με την ακμή 3-5 μήκους 35. Το σύνολο γίνεται {1, 2, 4, 3, 6, 5}.



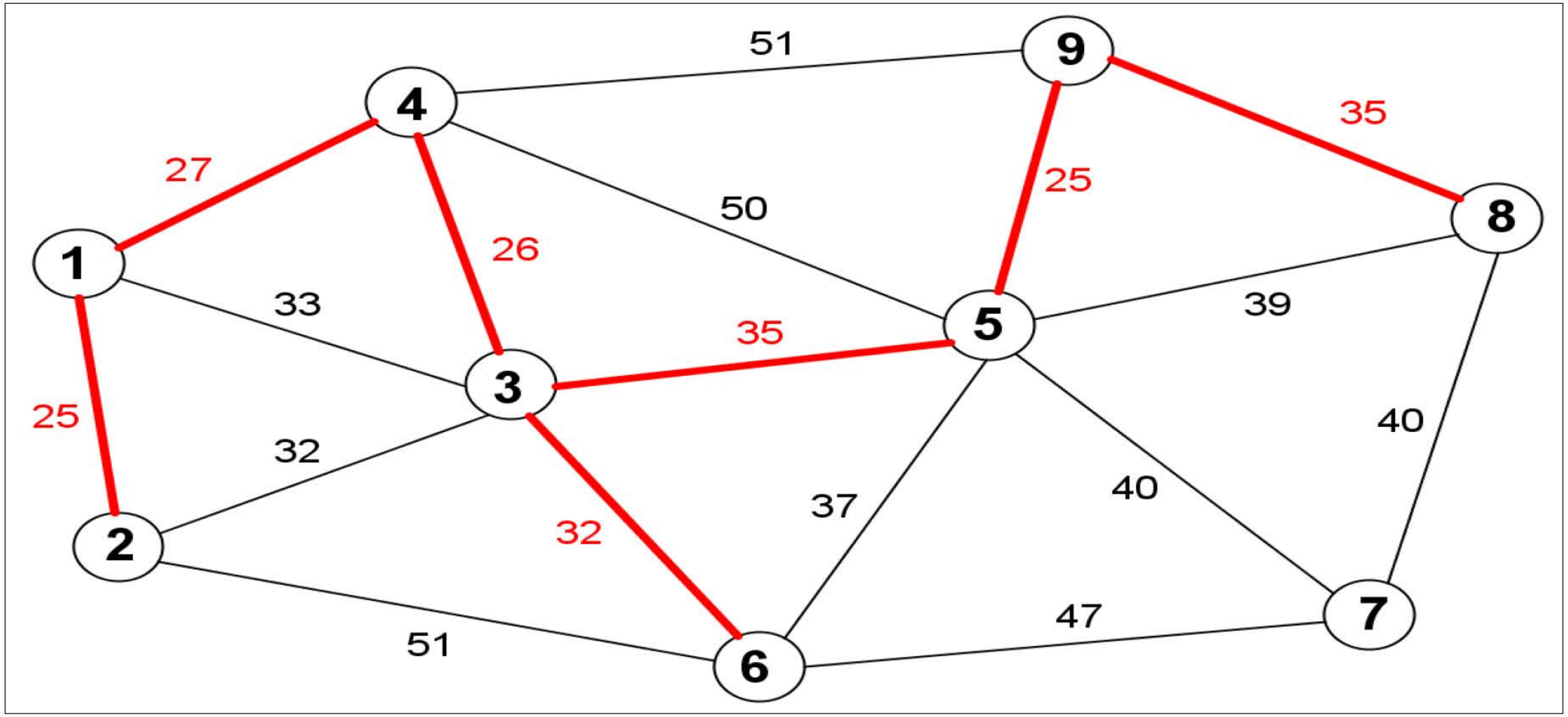
6η Επανάληψη του αλγορίθμου

Ο πιο κοντινός στους συνδεδεμένους είναι τώρα ο **κόμβος 9** που συνδέεται στον κόμβο 5 με την ακμή 5-9 μήκους 25. Το σύνολο γίνεται {1, 2, 4, 3, 6, 5, 9}.



7η Επανάληψη του αλγορίθμου

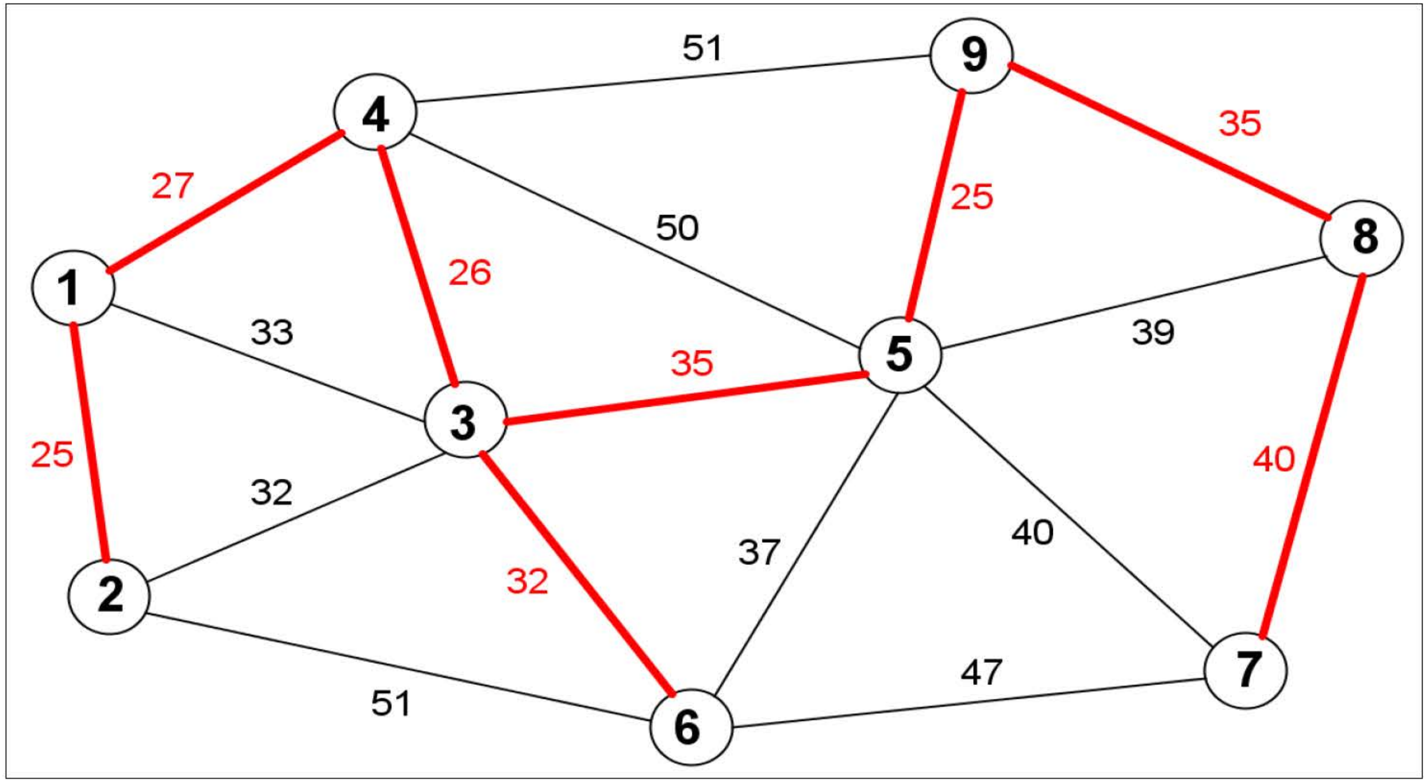
Στη συνέχεια συνδέεται ο **κόμβος 8** με την ακμή 9-8 μήκους 35. Έτσι το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων είναι το {1, 2, 4, 3, 6, 5, 9, 8}.



8η Επανάληψη του αλγορίθμου

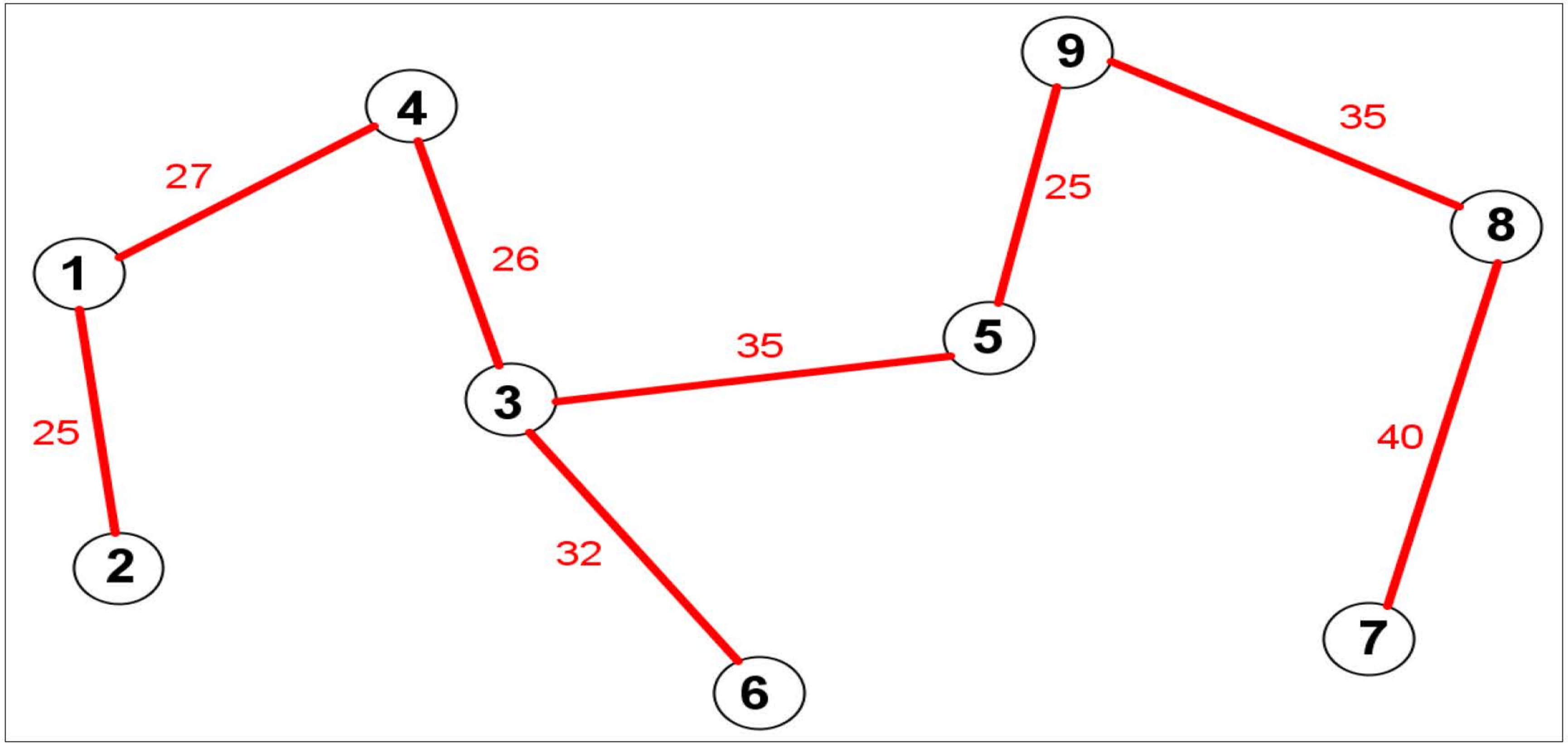
Στη συνέχεια συνδέεται ο **κόμβος 7** είτε με την ακμή 8-7, είτε με την ακμή 5-7 (δύο εναλλακτικές συνδέσεις μήκους 40).

Έτσι το σύνολο καθίσταται {1, 2, 4, 3, 6, 5, 9, 8, 7}.

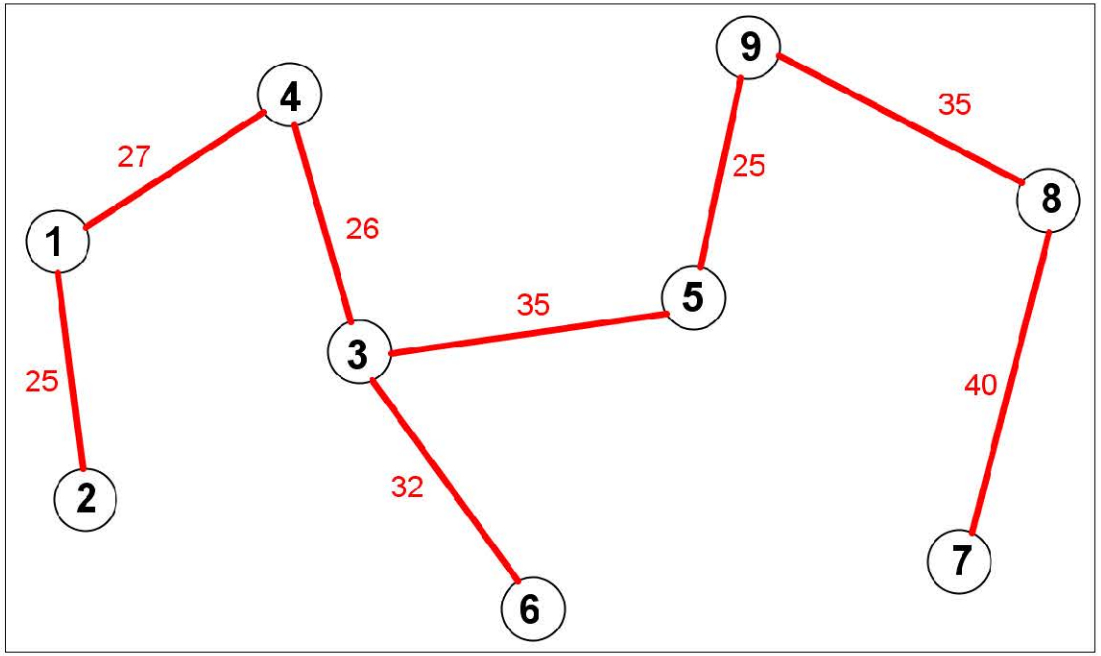


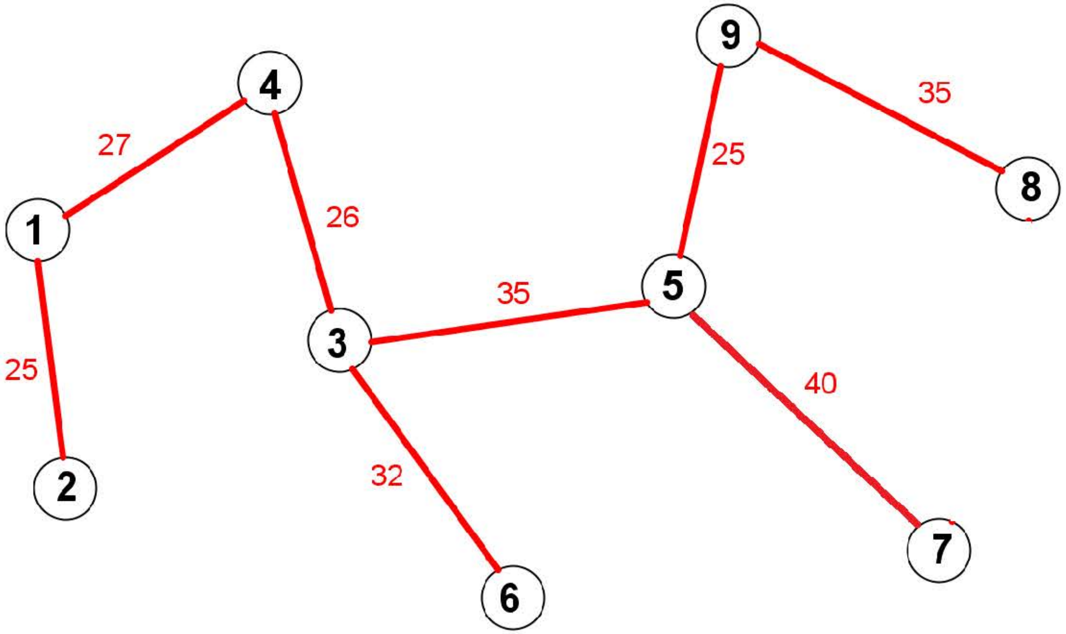
Εφόσον το σύνολο των μη συνδεδεμένων κόμβων είναι κενό (δεν υπάρχει πλέον κανένας μη συνδεδεμένος κόμβος) η διαδικασία σταματά.

Το άθροισμα των ακμών που χρησιμοποιήθηκαν είναι 245 και αντιστοιχεί στο ελάχιστο συνολικό μήκος.



Εφόσον το σύνολο των μη συνδεδεμένων κόμβων είναι κενό (δεν υπάρχει πλέον κανένας μη συνδεδεμένος κόμβος) η διαδικασία σταματά.
Το άθροισμα των ακμών που χρησιμοποιήθηκαν είναι 245 και αντιστοιχεί στο ελάχιστο συνολικό μήκος.





Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφεται το ελάχιστο μήκος σύνδεσης για όλους τους κόμβους, με τη σειρά που έγιναν μόνιμοι και το αντίστοιχο συνολικό μήκος σύνδεσης:

Συνδεόμενος κόμβος	Ακμή που χρησιμοποιείται	Μήκος ακμής	Συνολικό μήκος
1	**-**	**-**	**-**
2	**1-2**	**25**	**25**
4	**1-4**	**27**	**52**
3	**4-3**	**26**	**78**
6	**3-6**	**32**	**110**
5	**3-5**	**35**	**145**
9	**5-9**	**25**	**170**
8	**9-8**	**35**	**205**
7	**8-7 ή 5-7**	**40**	**245**

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής

Περιγραφή του προβλήματος:

Έστω ένα δίκτυο

- Ένας κόμβος **S** θεωρείται ως αφετηρία και ένας κόμβος **T** ως κόμβος τερματισμού
- Κάθε ακμή χαρακτηρίζεται από ένα μήκος d≥0. *Το μήκος κάθε ακμής μπορεί να εκφράζει απόσταση, χρονική διάρκεια, κίνδυνο, κλπ*

- **Στόχος:** Να εντοπίσουμε τη συντομότερη διαδρομή, δηλαδή εκείνη με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών, από μια αφετηρία προς έναν κόμβο τερματισμού.

Αλγόριθμος εύρεσης της συντομότερης διαδρομής

- Η τεχνική στηρίζεται στο γεγονός ότι σε κάθε βήμα μπορεί να βρεθεί τουλάχιστον ένας κόμβος που η διαδρομή από την αφετηρία μέχρι αυτόν δεν μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω. Τότε ο κόμβος αυτός ονομάζεται **μόνιμος** ή **λυμένος**.
- Στη συνέχεια, εξετάζεται εάν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κόμβος αυτός ως ενδιάμεσος, βελτιώνοντας προσωρινές διαδρομές που έχουν βρεθεί για τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου, συμπεριλαμβανομένου και του προορισμού.

Βήμα 1. Ξεκινάμε από την αφετηρία. Δεν υπάρχει προφανώς συντομότερη διαδρομή από την αφετηρία στον εαυτό της, οπότε ο πρώτος κόμβος γίνεται μόνιμος.

Βήμα 2. Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με την αφετηρία (δηλαδή μέσω μιας ακμής).

- Σημειώνουμε το μήκος των διαδρομών από την αφετηρία προς τους κόμβους αυτούς (προσωρινό μήκος διαδρομής).
- Επιλέγουμε έναν άμεσα συνδεδεμένο κόμβο, τον πλησιέστερο στην αφετηρία. Ο κόμβος αυτός ονομάζεται μόνιμος και μπαίνει σε ένα σύνολο μόνιμων κόμβων μαζί με την αφετηρία.

Βήμα 3. Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα (δηλαδή μέσω μιας ακμής) με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων.

- Σημειώνουμε το μήκος των διαδρομών από την αφετηρία προς τους κόμβους αυτούς (προσωρινό μήκος διαδρομής).

Πρακτικά αυτό που συμβαίνει κάθε φορά στο τρίτο βήμα είναι ένας επαναπροσδιορισμός των προσωρινών διαδρομών για τους μη λυμένους κόμβους, λαμβάνοντας υπόψη τον νέο μόνιμο κόμβο και ελέγχοντας μήπως συνέφερε να φθάσουμε σε αυτούς μέσω του νέου λυμένου κόμβου αντί μέσω προηγούμενης διαδρομής.

Βήμα 4. Από τους προηγούμενους κόμβους επιλέγεται εκείνος με τη συντομότερη διαδρομή και εισέρχεται στο σύνολο των μόνιμων κόμβων.

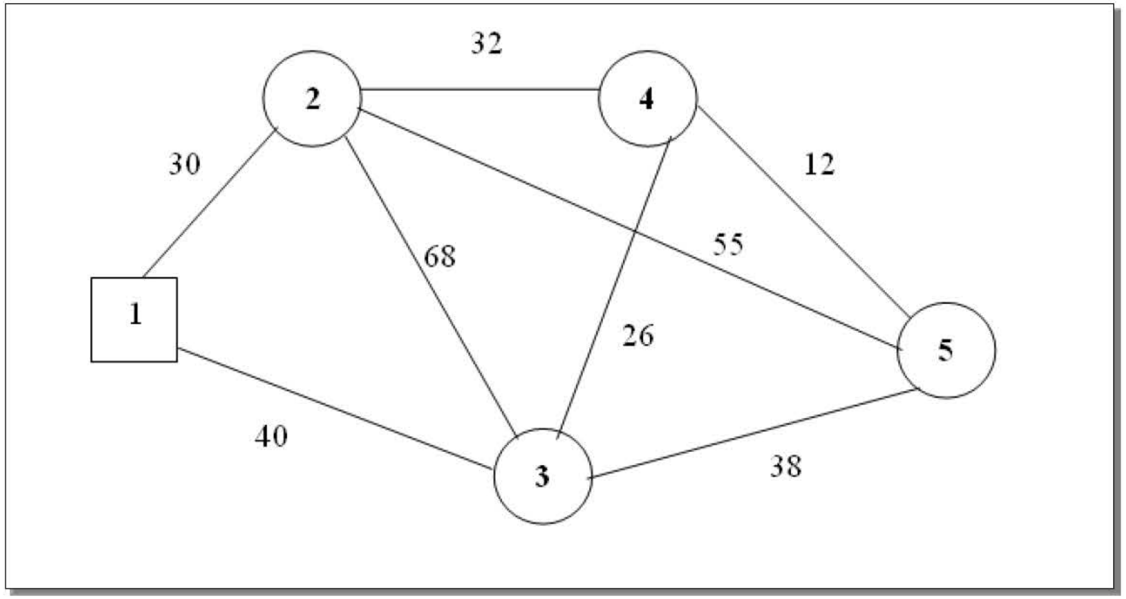
Η διαδρομή από την αφετηρία προς αυτόν δεν επιδέχεται περαιτέρω βελτίωση.

Αν υπάρχει ισοβάθμηση, επιλέγουμε αυθαίρετα έναν από τους ισοβαθμούντες.

Βήμα 5. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3 και 4 μέχρις ότου όλοι οι κόμβοι να καταστούν μόνιμοι ή μέχρι να εισέλθει ο προορισμός στο σύνολο των μόνιμων κόμβων.

Παράδειγμα 1.

Καθημερινά, ο ιδιοκτήτης μιας μικρής αλυσίδας super market, ξεκινά από το κτίριο που βρίσκονται τα γραφεία της επιχείρησής του προκειμένου να επισκεφθεί και να ελέγξει ένα από τα τέσσερα super market που διαθέτει. Στο παραπάνω δίκτυο που απεικονίζει το διάγραμμα, ο κόμβος 1 αναπαριστά το κτίριο των γραφείων, οι κόμβοι 2 έως 5 τα τέσσερα super markets, οι ακμές του δικτύου διαδρομές, ενώ οι τιμές πάνω στις ακμές εκφράζουν το χρόνο της διαδρομής σε λεπτά.



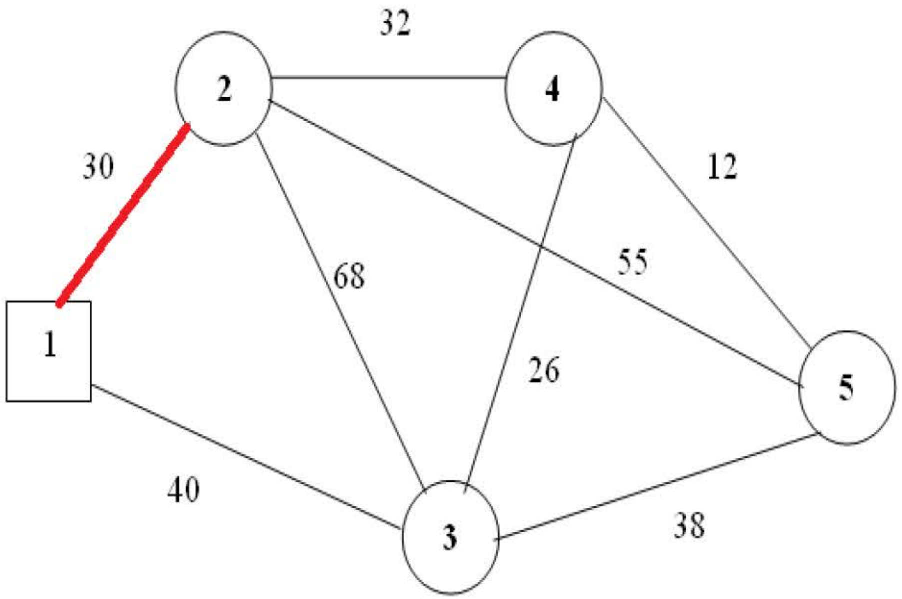
Με βάση τα στοιχεία αυτά, να εφαρμοσθεί η κατάλληλη τεχνική δικτυωτής ανάλυσης προκειμένου να βρεθούν οι συντομότερες διαδρομές μετάβασης από τα γραφεία της επιχείρησης σε καθένα από τα super markets.

Λύση

Πρόκειται για πρόβλημα εύρεσης της συντομότερης διαδρομής όπου πρέπει να εντοπιστεί η συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο 1, που είναι η αφετηρία, προς κάθε άλλο κόμβο του δικτύου.

Πρώτος λυμένος κόμβος καθίσταται η αφετηρία με απόσταση 0 (από τον εαυτό της).

1η Επανάληψη του αλγορίθμου

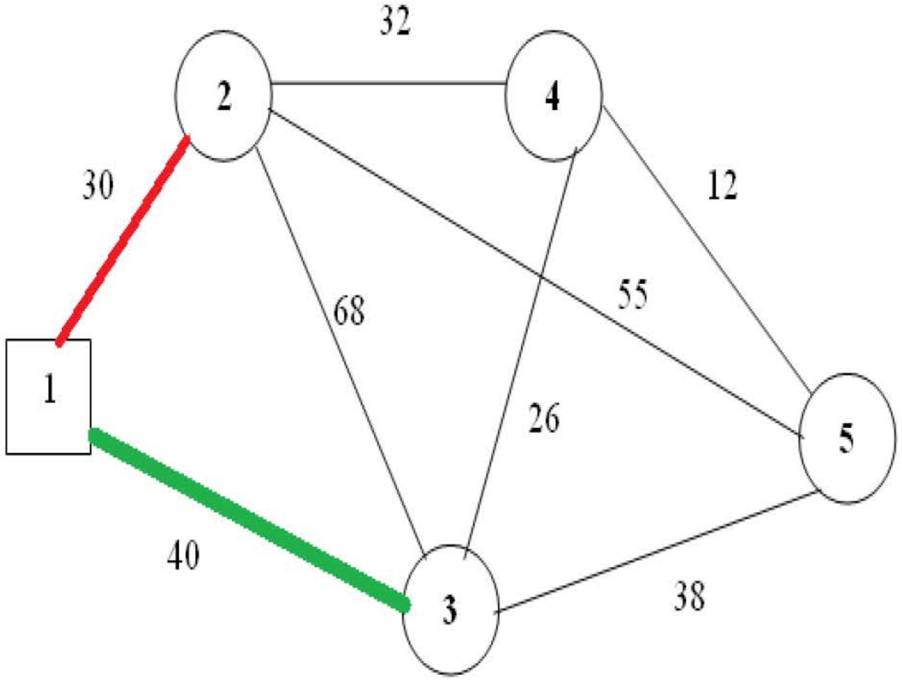


Κόμβοι με προσωρινές διαδρομές:

- κόμβος 2, με απόσταση 30 από την αφετηρία απευθείας, και
- κόμβος 3, με απόσταση 40 (ομοίως).

Στο σύνολο των μονίμων εισέρχεται ο **κόμβος 2** με ελάχιστη απόσταση 30 μονάδες, οπότε το σύνολο των μονίμων κόμβων γίνεται {1, 2}.

2η Επανάληψη του αλγορίθμου

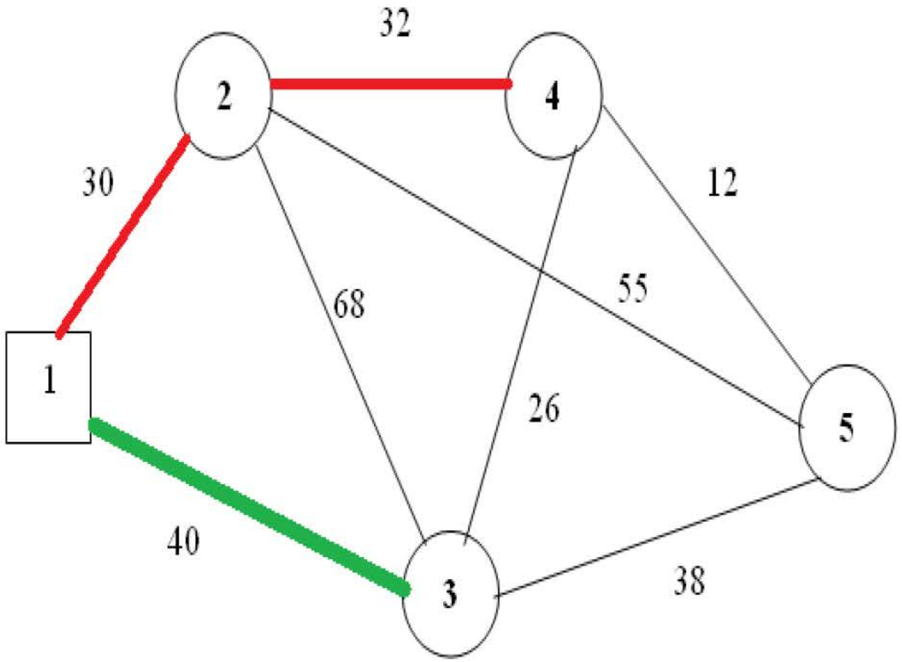


Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις λόγω της εισαγωγής του κόμβου 2 στους μόνιμους.

- κόμβος 3, παραμένει το 40 από την αφετηρία απευθείας, αφού μέσω του 2 η απόσταση είναι 30 + 68 = 98 και δεν είναι καλύτερη,
- κόμβος 4, με απόσταση 30 + 32 = 62 μέσω του κόμβου 2,
- κόμβος 5, με απόσταση 30 + 55 = 85 μέσω του κόμβου 2.

Μόνιμος καθίσταται ο **κόμβος 3** που έχει προσωρινή απόσταση από την αφετηρία τη μικρότερη μεταξύ αυτών με προσωρινή απόσταση, δηλαδή 40 μονάδες απευθείας, οπότε το σύνολο των μονίμων είναι τώρα το {1, 2, 3}.

3η Επανάληψη του αλγορίθμου

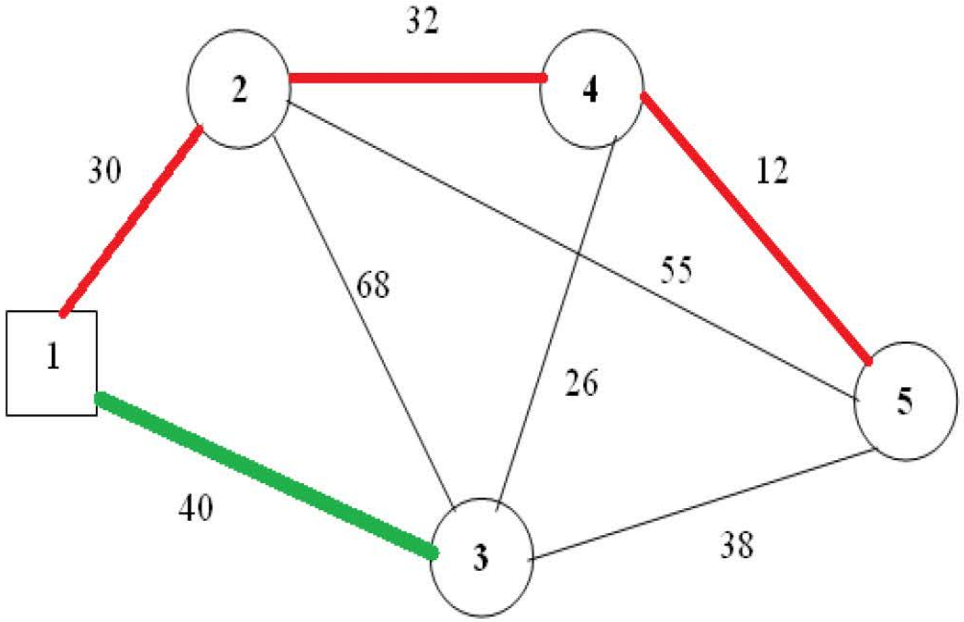


Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις λόγω της εισαγωγής του κόμβου 3 στο σύνολο των μονίμων.

- κόμβος 4, παραμένει η απόσταση 62 μέσω του κόμβου 2 αφού μέσω του 3 η απόσταση είναι 40 + 26 = 66 και δεν είναι καλύτερη,
- κόμβος 5, βελτιώνεται μέσω του κόμβου 3 αφού 40 + 38 = 78 < 85, άρα η νέα απόσταση είναι 78 μέσω του 3.

Από τους κόμβους με προσωρινό μήκος διαδρομής μόνιμος γίνεται ο **κόμβος 4** με ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία 62 μονάδες μέσω του κόμβου 2, οπότε το σύνολο μονίμων είναι τώρα {1, 2, 3, 4}.

4η Επανάληψη του αλγορίθμου



Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις λόγω της εισαγωγής του κόμβου 4 στο σύνολο των μονίμων.

- κόμβος 5, βελτιώνεται μέσω του κόμβου 4 αφού 62 + 12 = 74 < 78, άρα η νέα απόσταση είναι 74 μέσω του 4.

Μόνιμος γίνεται ο **κόμβος 5** με απόσταση από την αφετηρία 74 μονάδες μέσω του κόμβου 4 και το σύνολο μονίμων γίνεται {1, 2, 3, 4, 5}. Επομένως:

Όλοι οι κόμβοι έγιναν μόνιμοι και διαδικασία ολοκληρώνεται.

Η τιμή που αντιστοιχεί σε λεπτά για κάθε κόμβο είναι αυτή που βρέθηκε προηγουμένως ως άριστη για τον καθένα από αυτούς ενώ για να εντοπίσουμε την άριστη διαδρομή για κάθε κόμβο εργαζόμαστε <u>οπισθοδρομικά</u>.

Για παράδειγμα η άριστη διαδρομή για τον κόμβο 5 είναι η εξής: Στον 5 το άριστο «κόστος» μετάβασης είναι 74 λεπτά και επιτεύχθηκε μέσω του 4. Στον 4 φτάσαμε με άριστο τρόπο μέσω του 2 ενώ ο 2 έγινε μόνιμος με άριστη μετάβαση απευθείας από την αφετηρία. Άρα η άριστη διαδρομή είναι **1→2→4→5**. Με όμοιο τρόπο εντοπίζουμε τις άριστες διαδρομές για όλους τους κόμβους. Παρακάτω δίνονται οι συντομότερες διαδρομές και οι αποστάσεις από την αφετηρία (δηλαδή τα λεπτά ταξιδιού) για όλους τους κόμβους, με τη σειρά που έγιναν μόνιμοι.

Πίνακας

Κόμβος	Συντομότερη Διαδρομή	Ελάχιστη απόσταση από αφετηρία (λεπτά ταξιδιού)
1	–	0 (αφετηρία)
2	$1 \to 2$	30
3	$1 \to 3$	40
4	$1 \to 2 \to 4$	62
5	$1 \to 2 \to 4 \to 5$	74

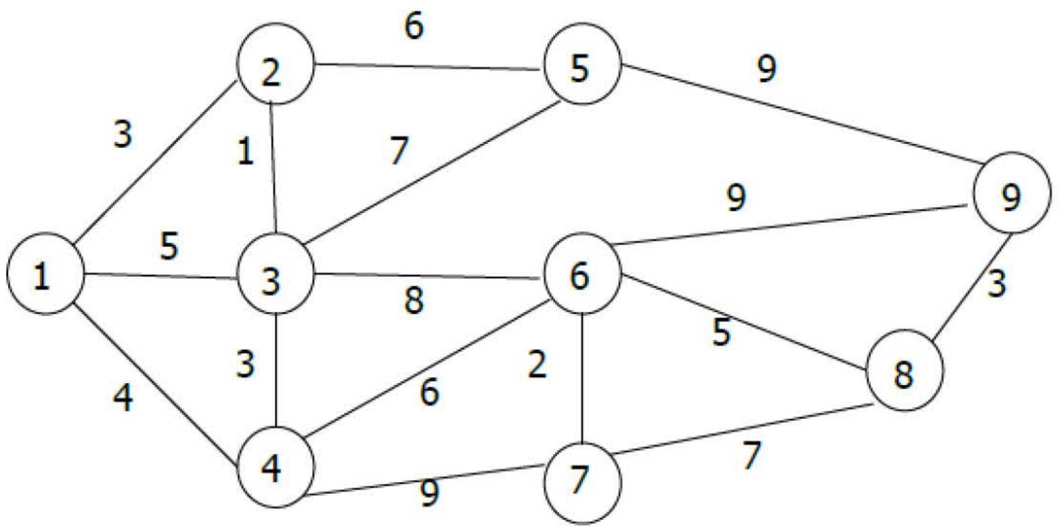
Παράδειγμα 2.

Μία εταιρεία μεταφορών πρέπει να μεταφέρει εμπορεύματα από την πόλη η οποία παριστάνεται με τον κόμβο 1 στην πόλη η οποία παριστάνεται με τον κόμβο 9.

Οι ενδιάμεσοι κόμβοι είναι άλλες πόλεις και οι ακμές είναι οι δυνατές διαδρομές μέσω του εθνικού οδικού δικτύου.

Ο αριθμός δίπλα σε κάθε ακμή παριστάνει τη διάρκεια του ταξιδιού σε ώρες.

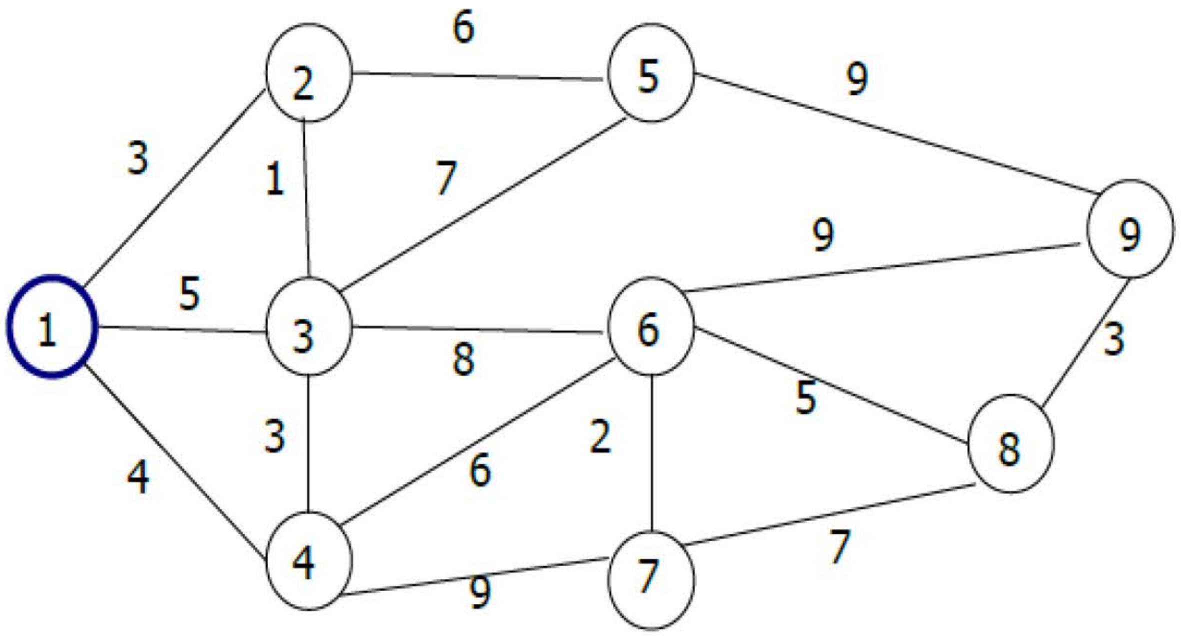
Ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει η εταιρεία ώστε η μεταφορά να ολοκληρωθεί στο συντομότερο δυνατό χρόνο;



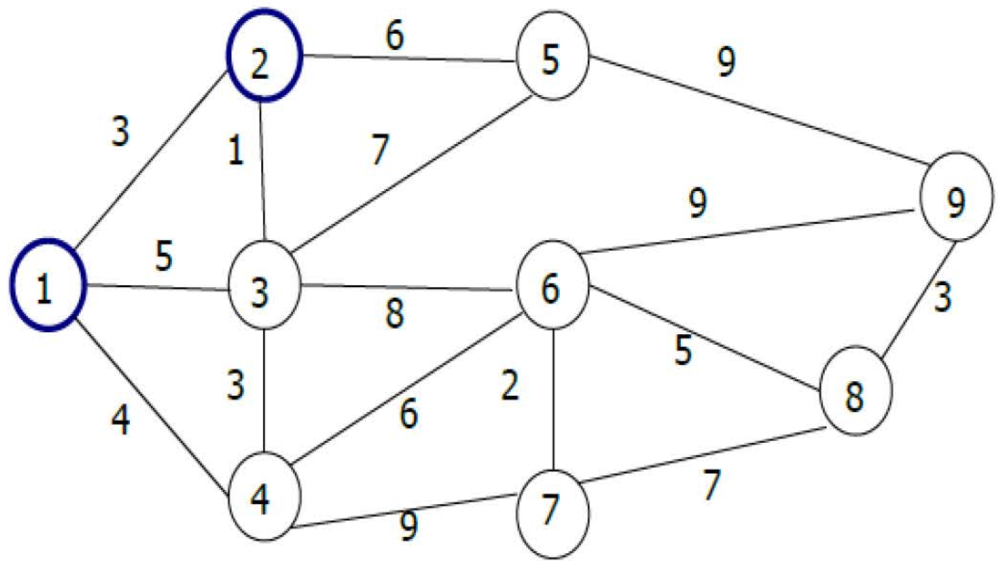
Λύση

Πρόκειται για πρόβλημα εύρεσης της συντομότερης διαδρομής, όπου πρέπει να εντοπιστεί η συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο 1, στον κόμβο 9.

Πρώτος λυμένος κόμβος καθίσταται η αφετηρία με απόσταση 0 (από τον εαυτό της). Έτσι το σύνολο των μονίμων κόμβων είναι το {1}. Οι μόνιμοι κόμβοι σημειώνονται με μπλε χρώμα.



1η Επανάληψη του αλγορίθμου



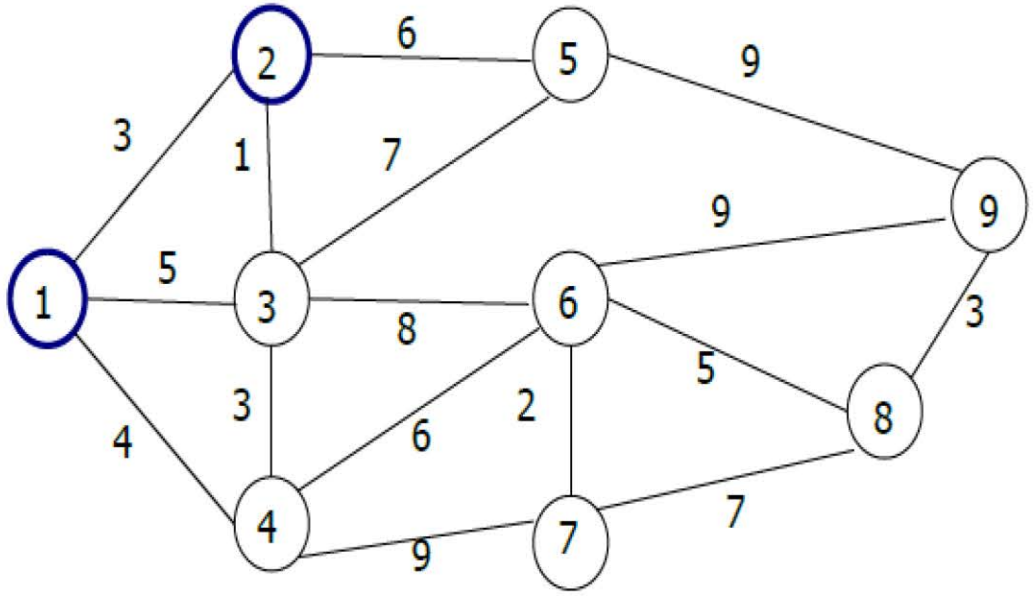
Κόμβοι με προσωρινές διαδρομές:

- κόμβος 2, με απόσταση 3 από την αφετηρία απευθείας,
- κόμβος 3, με απόσταση 5 από την αφετηρία απευθείας,
- κόμβος 4, με απόσταση 4 από την αφετηρία απευθείας,

Επομένως στο σύνολο των μονίμων κόμβων εισέρχεται ο **κόμβος 2** με ελάχιστη απόσταση 3, οπότε το σύνολο των μονίμων κόμβων γίνεται {1, 2}.

Τα μέχρι τώρα στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα:

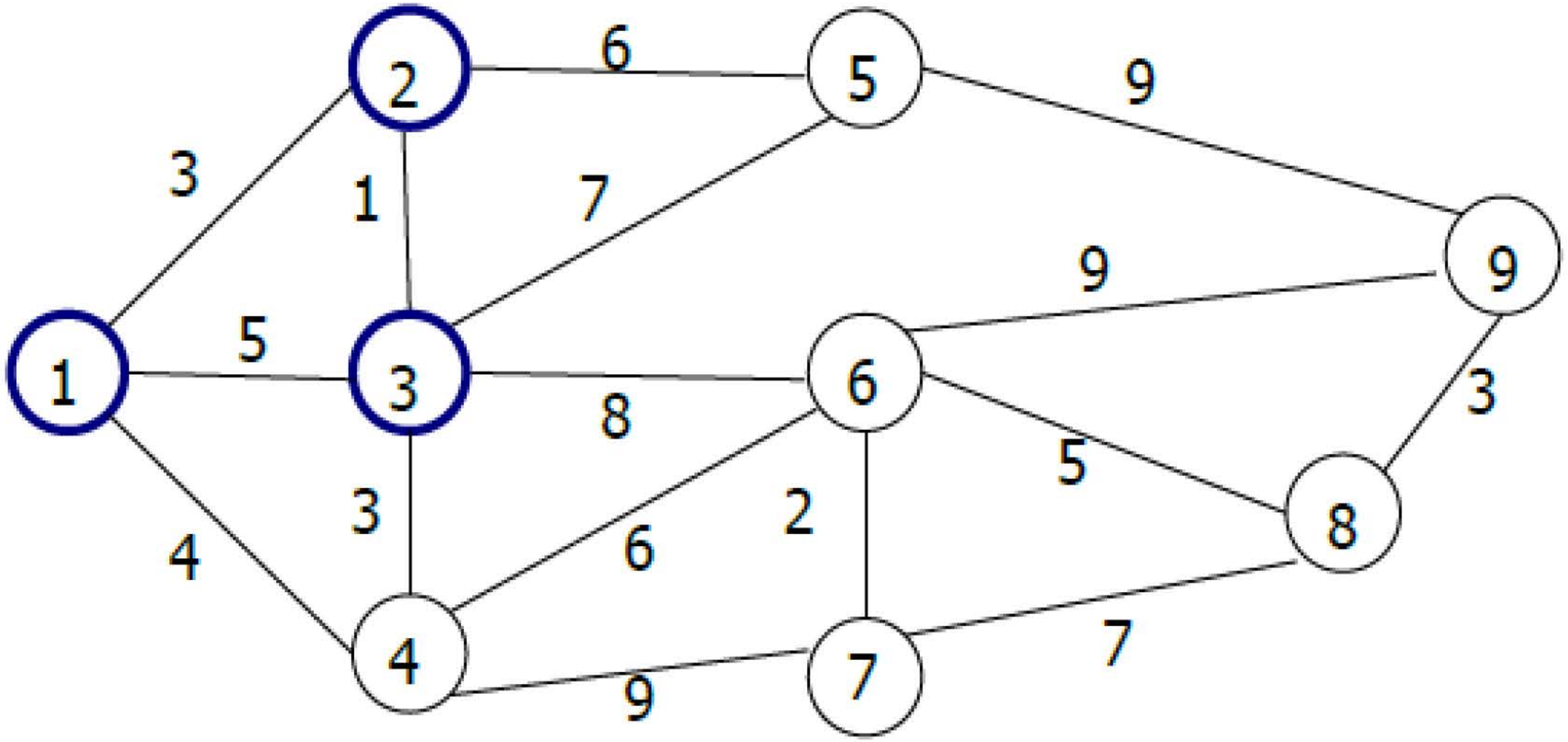
Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
{1, 2}	1-2	3	2	3
	1-3	5		
	1-4	4		



Μετά την είσοδο του κόμβου 2 στο σύνολο των λυμένων κόμβων προχωρούμε στο <u>τρίτο βήμα</u> της μεθόδου. Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μονίμων κόμβων {1, 2}.

- κόμβος 3, με απόσταση 3 + 1 = 4 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 2
- κόμβος 5, με απόσταση 3 + 6 = 9 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 2
- κόμβος 4, με απόσταση 4 από την αφετηρία απευθείας,

Προχωρούμε στο <u>τέταρτο βήμα</u> της μεθόδου και μεταξύ των ισαπεχόντων κόμβων 3 και 4 επιλέγουμε αυθαίρετα τον κόμβο {3}, ο οποίος εντάσσεται στο σύνολο των μόνιμων κόμβων.
Έτσι το σύνολο των μόνιμων κόμβων είναι το {1, 2, 3}



Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα:

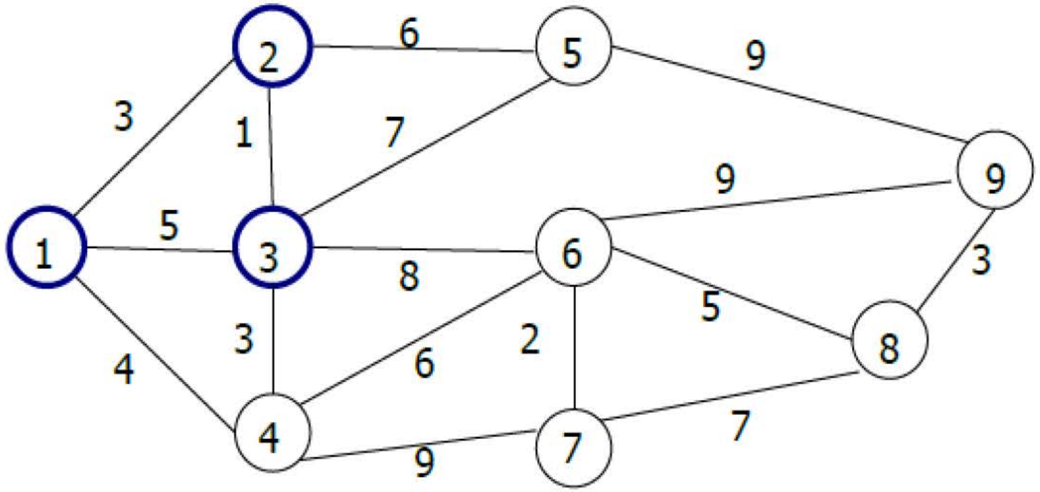
Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
$\{1, 2\} \cup \{3\}$	**2-3**	**4**	**3**	**4**
	2-5	**9**		
	1-4	**4**		

Στη συνέχεια το <u>βήμα 5</u> μας οδηγεί πάλι στο βήμα 3.

2η Επανάληψη του αλγορίθμου

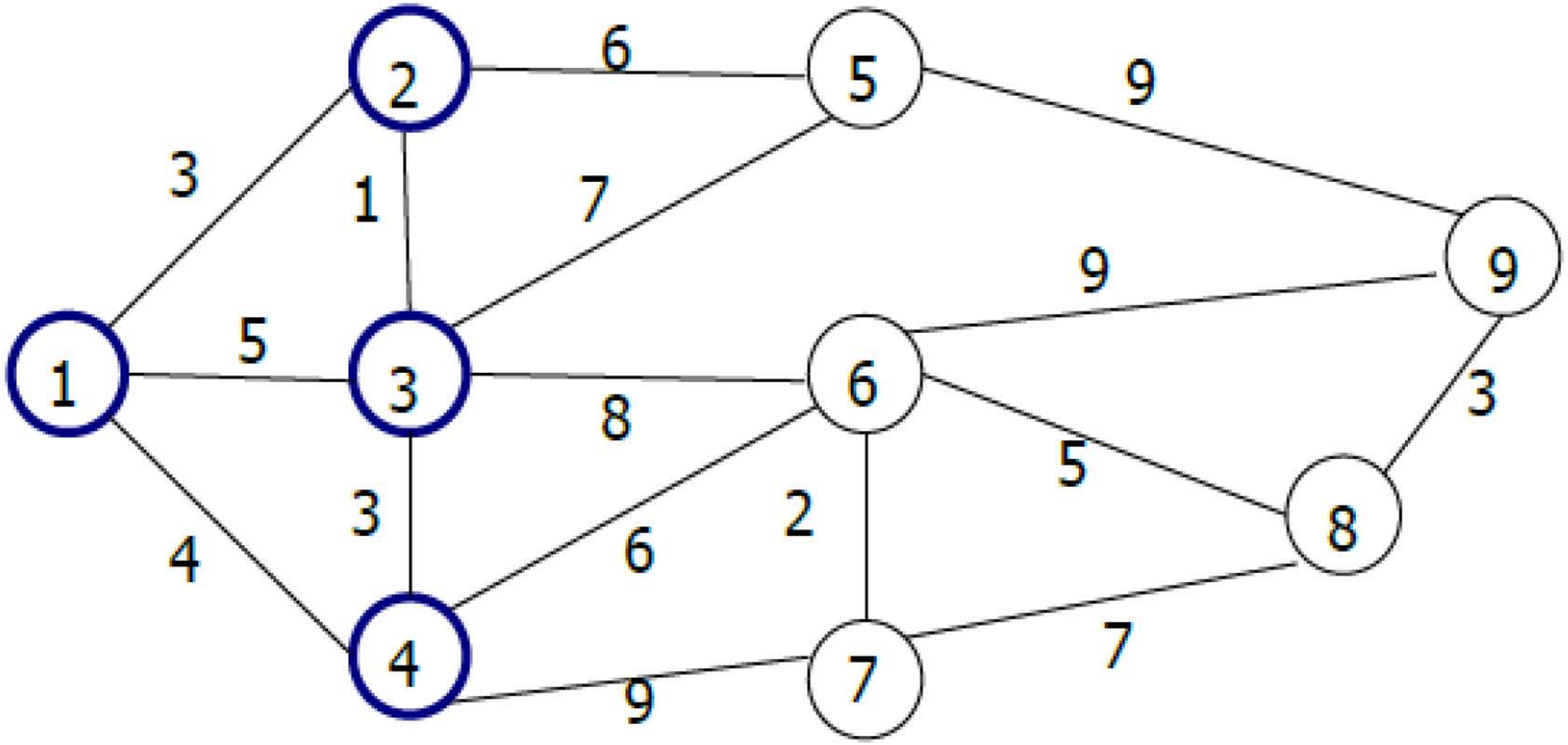
Βήμα 3: Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων {1, 2, 3}.

- κόμβος 4, με απόσταση 4 από την αφετηρία απευθείας,
- κόμβος 4, με απόσταση 5 + 3 = 8 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 3
- κόμβος 5, με απόσταση 3 + 6 = 9 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 2
- κόμβος 5, με απόσταση 5 + 7 = 12 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 3
- κόμβος 6, με απόσταση 5 + 8 = 13 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 3



<u>2η Επανάληψη του αλγορίθμου</u>

<u>Βήμα 4</u>: Διαπιστώνουμε ότι ο κόμβος 4 έχει την μικρότερη προσωρινή απόσταση από την αφετηρία και επομένως είναι ο επόμενος που θα εισέλθει στο σύνολο των μόνιμων κόμβων. Έτσι το σύνολο των μόνιμων κόμβων γίνεται {1, 2, 3, 4}



Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα:

Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
$\{1, 2, 3\} \cup \{4\}$	**1-4**	**4**	**4**	**4**
	3-4	**8**		
	2-5	**9**		
	3-5	**12**		
	3-6	**13**		

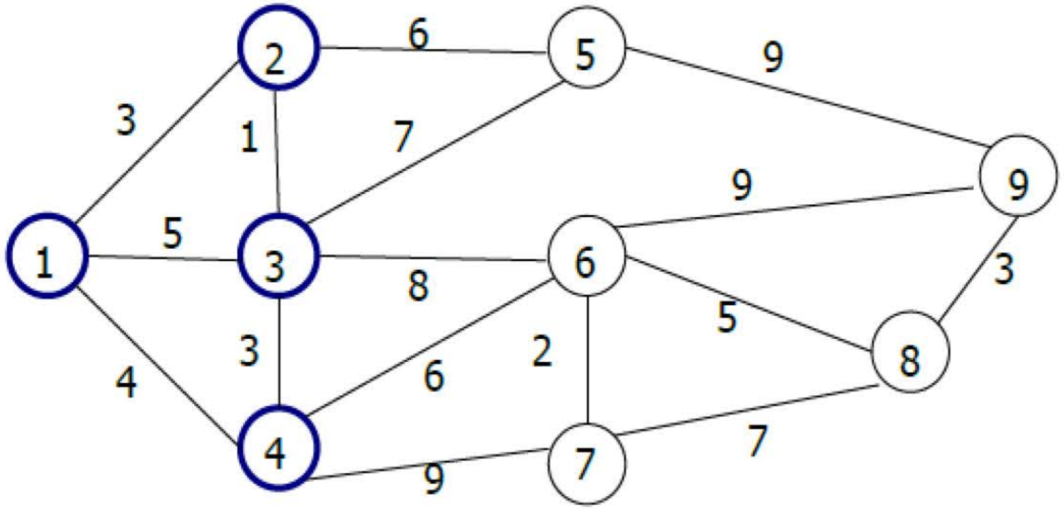
Στη συνέχεια το <u>βήμα 5</u> μας οδηγεί πάλι στο βήμα 3.

3η Επανάληψη του αλγορίθμου

Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων {1, 2, 3, 4}.

- κόμβος 5, με απόσταση 3 + 6 = 9 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 2
- κόμβος 5, με απόσταση 5 + 7 = 12 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 3
- κόμβος 6, με απόσταση 5 + 8 = 13 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 3
- κόμβος 6, με απόσταση 4 + 6 = 10 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 4
- κόμβος 7, με απόσταση 4 + 9 = 13 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 4

Επιλέγουμε τον κόμβο 5, ο οποίος έχει ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία.
Έτσι το σύνολο των μόνιμων κόμβων γίνεται {1, 2, 3, 4, 5}



Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα:

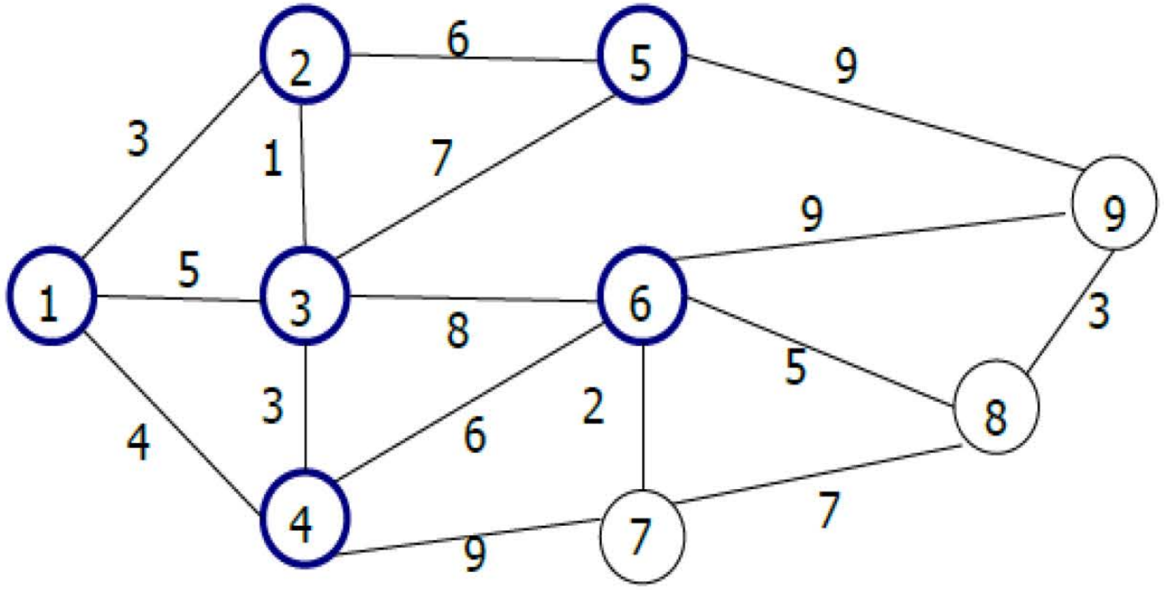
Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
$\{1, 2, 3, 4\} \cup \{5\}$	2-5	9	5	9
	3-5	12		
	3-6	13		
	4-6	10		
	4-7	13		

4η Επανάληψη του αλγορίθμου

Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων {1, 2, 3, 4, 5}.

- κόμβος 6, με απόσταση 4 + 6 = 10 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 4
- κόμβος 7, με απόσταση 4 + 9 = 13 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 4
- κόμβος 6, με απόσταση 5 + 8 = 13 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 3
- κόμβος 9, με απόσταση 9 + 9 = 18 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 5

Επιλέγουμε τον κόμβο 6, ο οποίος έχει ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία.
Έτσι το σύνολο των μόνιμων κόμβων γίνεται {1, 2, 3, 4, 5, 6}



Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα:

Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6\}$	4-6	10	6	10
	4-7	13		
	3-6	13		
	5-9	18		

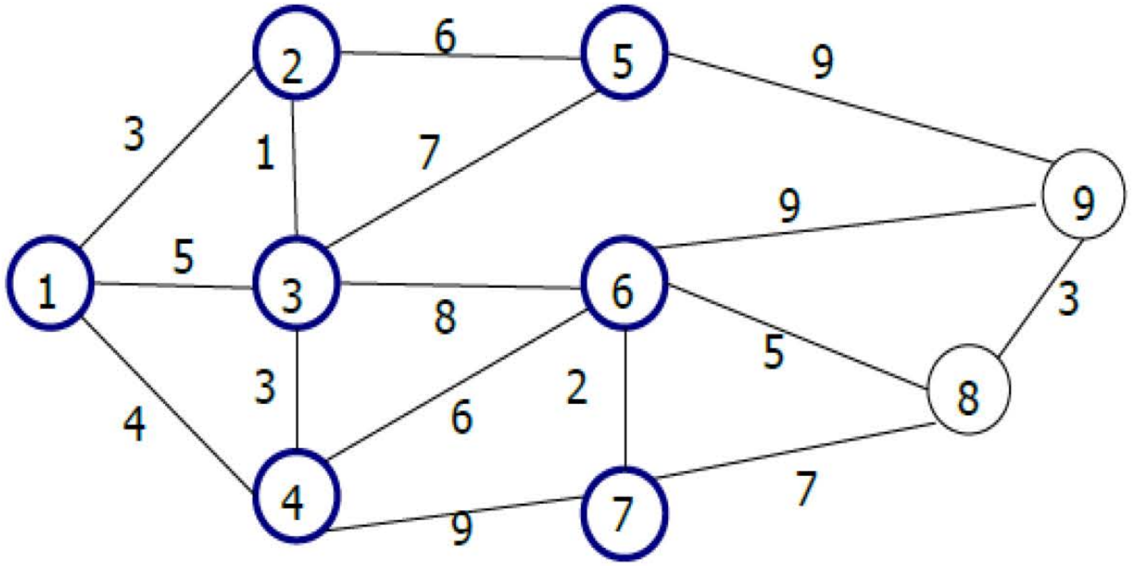
Στη συνέχεια το βήμα 5 μας οδηγεί πάλι στο βήμα 3.

5η Επανάληψη του αλγορίθμου

Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

- κόμβος 7, με απόσταση 10 + 2 = 12 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 6
- κόμβος 8, με απόσταση 10 + 5 = 15 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 6
- κόμβος 9, με απόσταση 10 + 9 = 19 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 6
- κόμβος 9, με απόσταση 9 + 9 = 18 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 5
- κόμβος 7, με απόσταση 4 + 9 = 13 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 4

Επιλέγουμε τον κόμβο 7, ο οποίος έχει ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία.
Έτσι το σύνολο των μόνιμων κόμβων γίνεται {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}



Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα:

Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
$\{1,2,3,4,5,6\} \cup \{7\}$	6-7	12	7	12
	6-8	15		
	6-9	19		
	5-9	18		
	4-7	13		

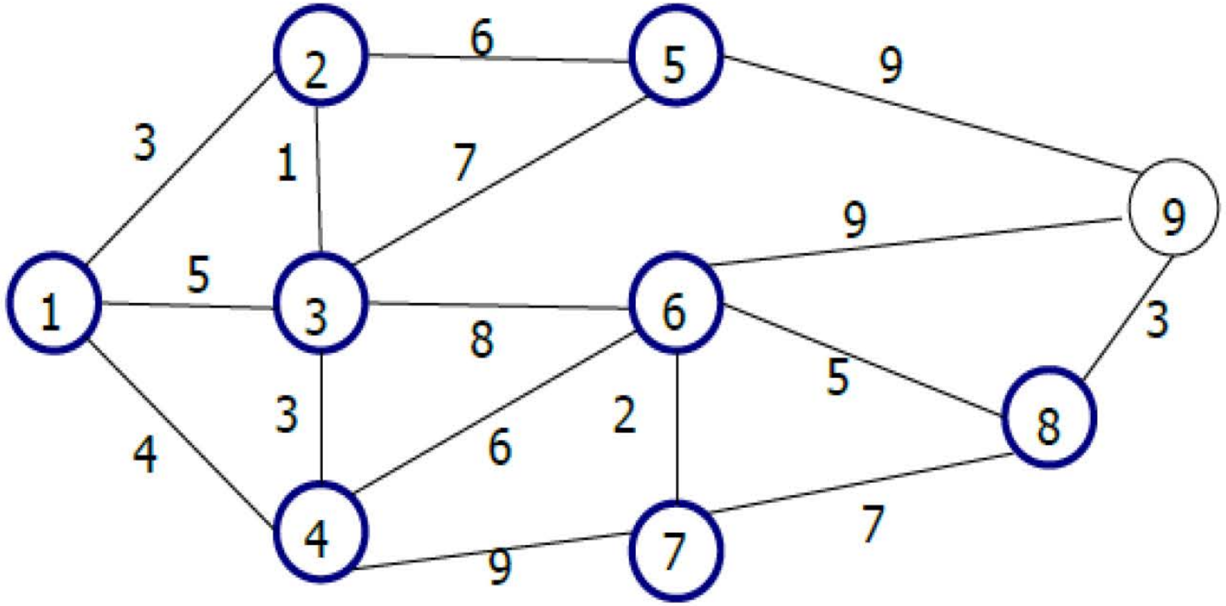
Στη συνέχεια το <u>βήμα 5</u> μας οδηγεί πάλι στο βήμα 3.

6η Επανάληψη του αλγορίθμου

Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

- κόμβος 8, με απόσταση 10 + 5 = 15 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 6
- κόμβος 9, με απόσταση 10 + 9 = 19 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 6
- κόμβος 9, με απόσταση 9 + 9 = 18 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 5
- κόμβος 8, με απόσταση 12 + 7 = 19 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 7

Επιλέγουμε τον κόμβο 8, ο οποίος έχει ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία.
Έτσι το σύνολο των μόνιμων κόμβων γίνεται {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

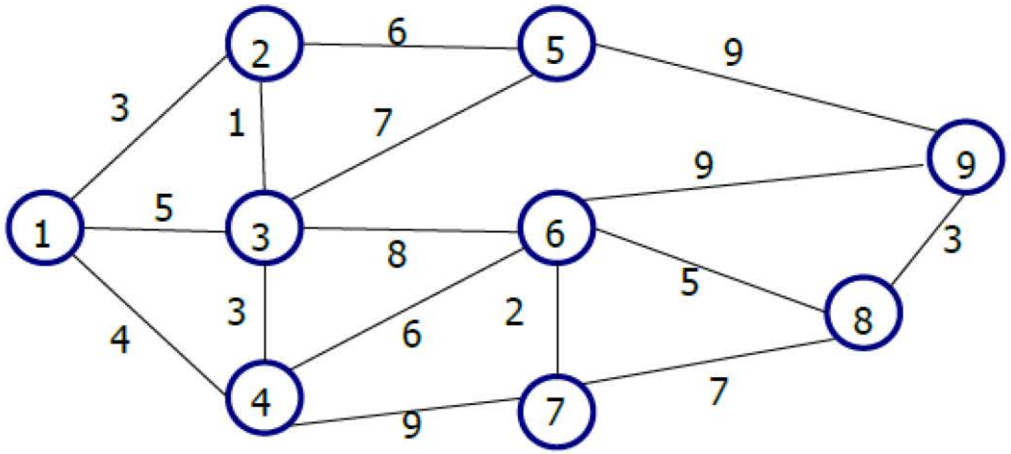


Τα παραπάνω στοιχεία παρουσιάζονται στον Πίνακα:

Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
$\{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{8\}$	6-8	15	8	15
	6-9	19		
	5-9	18		
	7-8	19		

Στη συνέχεια το βήμα 5 μας οδηγεί πάλι στο βήμα 3.

7η Επανάληψη του αλγορίθμου



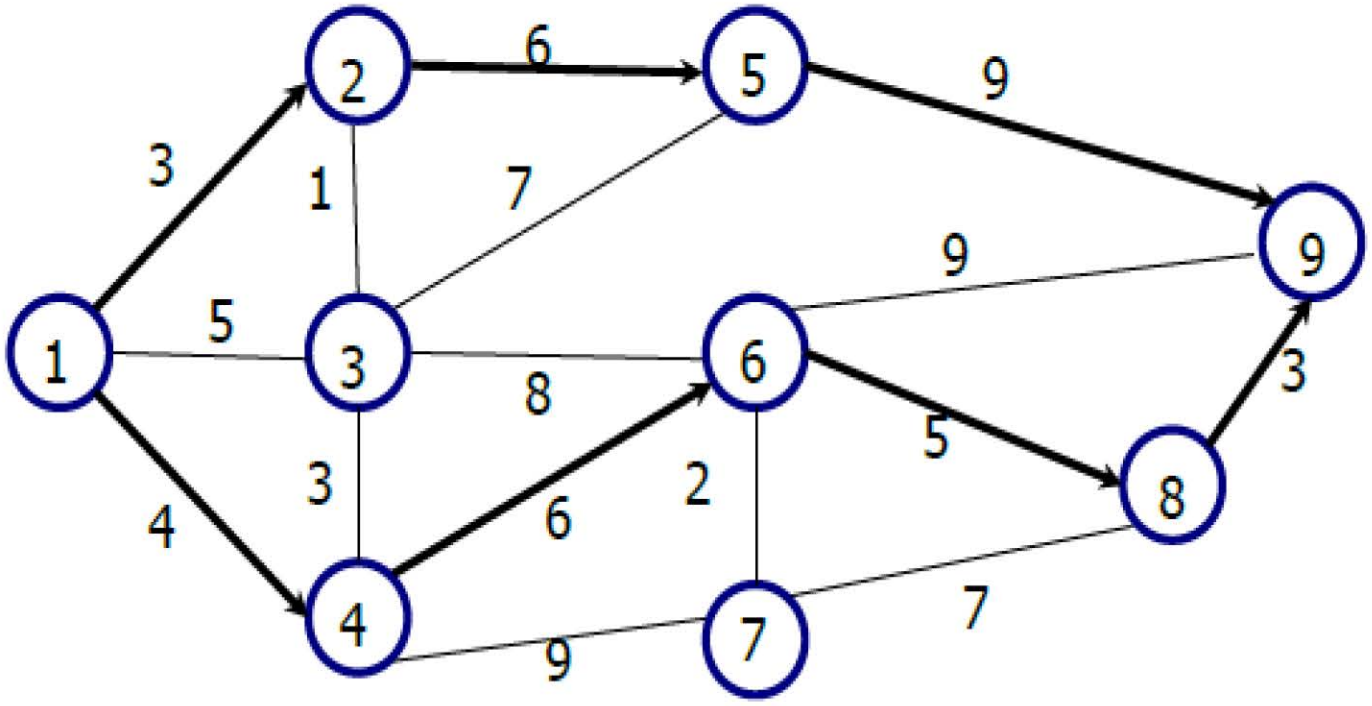
Σύνολο μονίμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Μήκος ελάχιστης διαδρομής
{1,2,3,4,5,6,7,8,9}	5-9	18	9	18
	8-9	18	9	18
	6-9	19		

Εντοπίζουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα με τουλάχιστον έναν από τους κόμβους του συνόλου των μόνιμων κόμβων {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

- κόμβος 9, με απόσταση 9 + 9 = 18 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 5
- κόμβος 9, με απόσταση 10 + 9 = 19 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 6
- κόμβος 9, με απόσταση 15 + 3 = 18 από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 8

Ο κόμβος 9, εντάσσεται στο σύνολο των μόνιμων κόμβων το οποίο περιλαμβάνει πλέον όλους τους κόμβους

Εφόσον ο προορισμός εντάχθηκε στο σύνολο των μόνιμων κόμβων, η διαδικασία ολοκληρώνεται.
Προσδιορίζουμε τη συντομότερη διαδρομή ξεκινώντας από τον προορισμό, εργαζόμενοι οπισθοδρομικά
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα υπάρχουν δύο (ισοδύναμες) βέλτιστες διαδρομές



Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον παραπάνω αλγόριθμο και δίνουμε τις συντομότερες διαδρομές και τις αποστάσεις από την αφετηρία για όλους τους κόμβους.

Κόμβος	Συντομότερη Διαδρομή	Ελάχιστη απόσταση από αφετηρία (ώρες ταξιδιού)
1	–	0 (αφετηρία)
2	$1 \rightarrow 2$	3
3	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$	4
4	$1 \rightarrow 4$	4
5	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$	9
6	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$	10
7	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7$	12
8	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$	15
9	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9$	19