Συμπίεση Δεδομένων

2014-2015

Μοναδικά Αποκωδικοποιήσιμοι Κώδικες

Έλεγχος μοναδικής Αποκωδικοποίησης Δ3

- Γενικοί ορισμοί

  - Έστω δύο κωδικές λέξεις α,β με μήκη n,m και n<m
  - Έστω ότι τα πρώτα n στοιχεία της λέξης β είναι η λέξη α

  τότε :

  - η λέξη α καλείται πρόθεμα της β
  - τα υπολειπόμενα m-n στοιχεία της λέξης β καλούνται κατάληξη της β

Έλεγχος μοναδικής Αποκωδικοποίησης Δ3

- Έλεγχος Sardinas-Patterson
  - Κατασκευή λίστας όλων των κωδικών λέξεων
  - Εξέταση όλης της λίστας για την εύρεση ζευγαριών όπου μια κωδική λέξη να είναι πρόθεμα μιας άλλης.
  - Για κάθε ένα από τα παραπάνω ζευγάρια αποθήκευση της κατάληξης στη λίστα κωδικών λέξεων
  - Επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας με τη νέα λίστα μέχρι να συμβεί μία από τις παρακάτω συνθήκες τερματισμού:
    - Προκύπτει κατάληξη η οποία είναι κωδική λέξη (Ο κώδικας **όχι μοναδικά** αποκωδικοποιήσιμος)
    - Δεν προκύπτουν νέες καταλήξεις για καταχώρηση στη λίστα (Ο κώδικας **μοναδικά** αποκωδικοποιήσιμος

Παράδειγμα (κώδικες άσκησης 2.2)

Δ3

- Ποιοι από τους παρακάτω κώδικες είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμοι

S_i	p_i	Κώδικας Α	Κώδικας Β	Κώδικας Γ	Κώδικας Δ	Κώδικας Ε	Κώδικας ΣΤ
S1	0,5	00	0	0	0	00	0
S2	0,25	01	10	01	01	01	10
S3	0,125	10	11	010	011	10	110
S4	0,125	11	11	011	111	110	111
	$\bar{l}$(bits/symbol)	2	1,5	1,75	1,75	2,125	1,75

Προθεματικοί Κώδικες

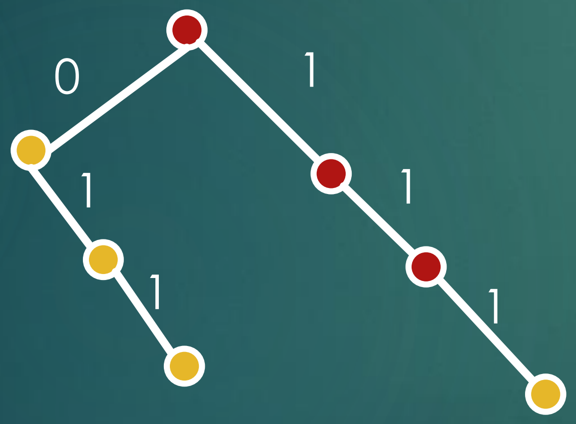
Δ3

- Υποκατηγορία των μοναδικά αποκωδικοποιήσιμων κωδίκων (Ονομάζονται και άμεσα αποκωδικοποιήσιμοι)
- Καμία κωδική λέξη δεν είναι πρόθεμα άλλης κωδικής λέξης
- Έλεγχος αν ένας κώδικας είναι προθεματικός:
  - Σχεδιασμός δυαδικού δέντρου που αναπαριστά όλες τις κωδικές λέξεις (με την ίδια σύμβαση διακλάδωσης [π.χ. αριστερά →1 , δεξιά →0])
  - Εξέταση κόμβων του δέντρου:
    - Ύπαρξη εσωτερικών κόμβων του δέντρου που είναι κωδικές λέξεις (Ο κώδικας **δεν είναι προθεματικός**)

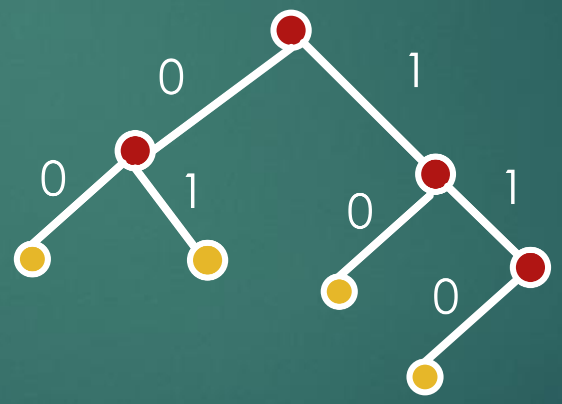
Παράδειγμα

- Να εξετάσετε ποιοι από τους κώδικες Δ,Ε,ΣΤ είναι προθεματικοί

Δ={0,01,011,111}



Ε={00,01,10,110}



Ανισότητα Kraft-McMillan

Δ3

- Έστω ένας κώδικας ο οποίος αποτελείται από N κωδικές λέξεις με μήκη $l_1, l_2, \ldots l_N$. Αν ο κώδικας είναι μοναδικά αποκωδικοποιήσιμος τότε θα ισχύει ότι :

$$\sum_{\iota=1}^{\mathrm{N}} 2^{-l_i} \leq 1$$

- Αν υπάρχουν ακέραιοι $l_1, l_2, \ldots l_N$ για τους οποίους να ισχύει η συνθήκη

$$\sum_{\iota=1}^{\mathrm{N}} 2^{-l_i} \leq 1$$

  τότε μπορεί να βρεθεί προθεματικός κώδικας με μήκη κωδικών λέξεων $l_1, l_2, \ldots l_N$

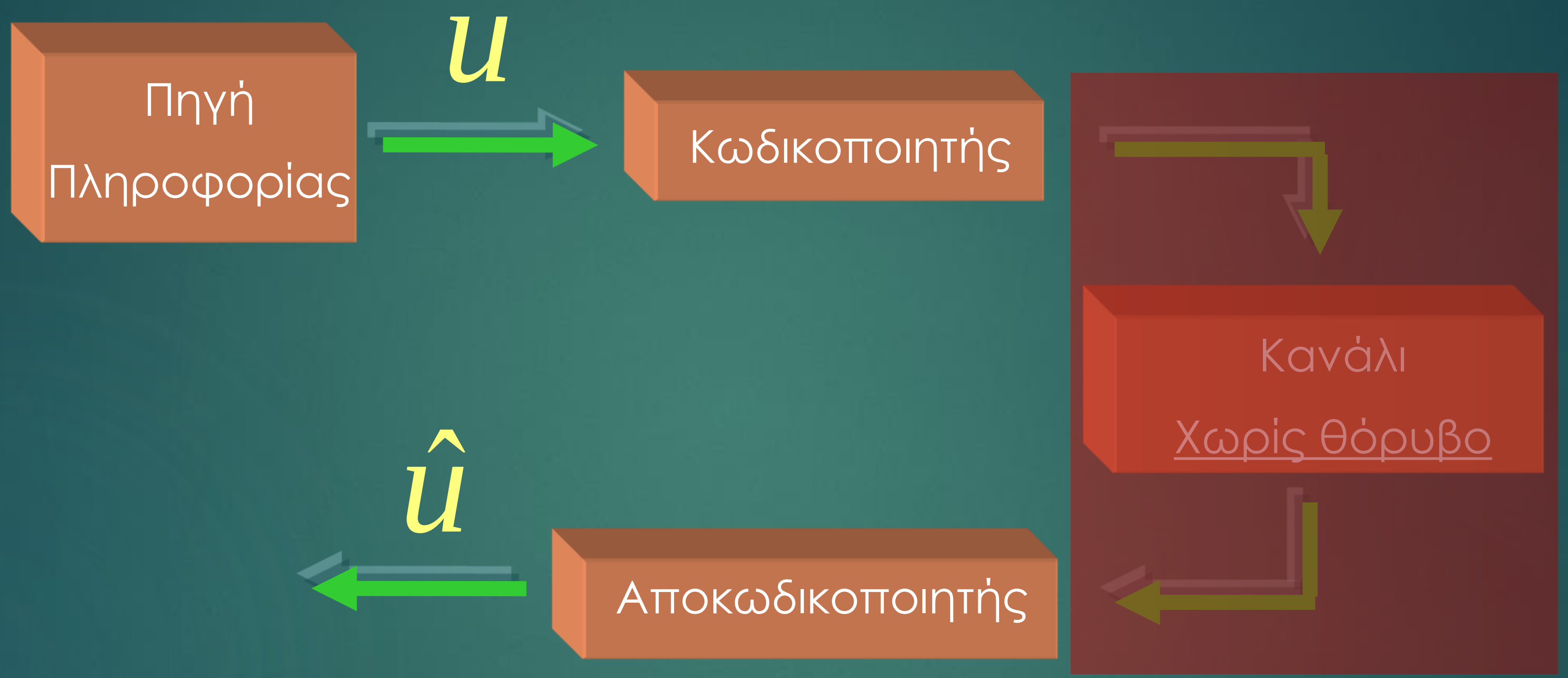
- Για κάθε μοναδικά αποκωδικοποιήσιμο κώδικα μπορεί να βρεθεί ένας προθεματικός κώδικας με το ίδιο μήκος κωδικών λέξεων

Δ3

Απωλεστική κωδικοποίηση

Κωδικοποίηση Πηγής

Δ3



<u>*Κωδικοποίηση*</u>

- Μη απωλεστική → $\hat{u} = u$
- Απωλεστική → $\hat{u} \neq u$

Μετασχηματισμοί (Γενικά)

Δ3

- Τα αρχικά δεδομένα μετασχηματίζονται σε ένα νέο χώρο και οι συντελεστές παράγονται με βάση αυτή τη διαδικασία κβαντίζονται εισάγοντας παραμόρφωση

- Είναι αναγκαίος ο σχεδιασμός βέλτιστων κβαντιστών και σχημάτων κωδικοποίησης ώστε τα διαθέσιμα bits να διανέμονται με το βέλτιστο τρόπο ανάμεσα στους συντελεστές (bit allocation)

Μέτρα παραμόρφωσης

Δ3

- Παραμόρφωση Hamming

$$d(u,\hat{u}) = \begin{cases} 1, & u \neq \hat{u} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

- Παραμόρφωση Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος

$$d(u,\hat{u}) = (u - \hat{u})^2$$

$$d(u,\hat{u}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \hat{u}_i)^2$$

Κωδικοποίηση Πηγής

Δ3

- Μη απωλεστικές μέθοδοι

Αλγόριθμοι: Huffman, Lempel-Ziv, RLE, Αριθμητική κωδικοποίηση …

- Το ανακτώμενο σήμα είναι ίδιο με το αρχικό
- Περιορισμένοι βαθμοί συμπίεσης
- Απώλειες μόνο λόγω Αναλογικής-Ψηφιακής μετατροπή

Κωδικοποίηση Πηγής

Δ3

- Απωλεστικές μέθοδοι

Αν γνωρίζουμε την παραμόρφωση (D) ενός σήματος, τότε η συνάρτηση ρυθμού παραμόρφωσης R(D) δίνει το κάτω φράγμα για το ρυθμό (R)

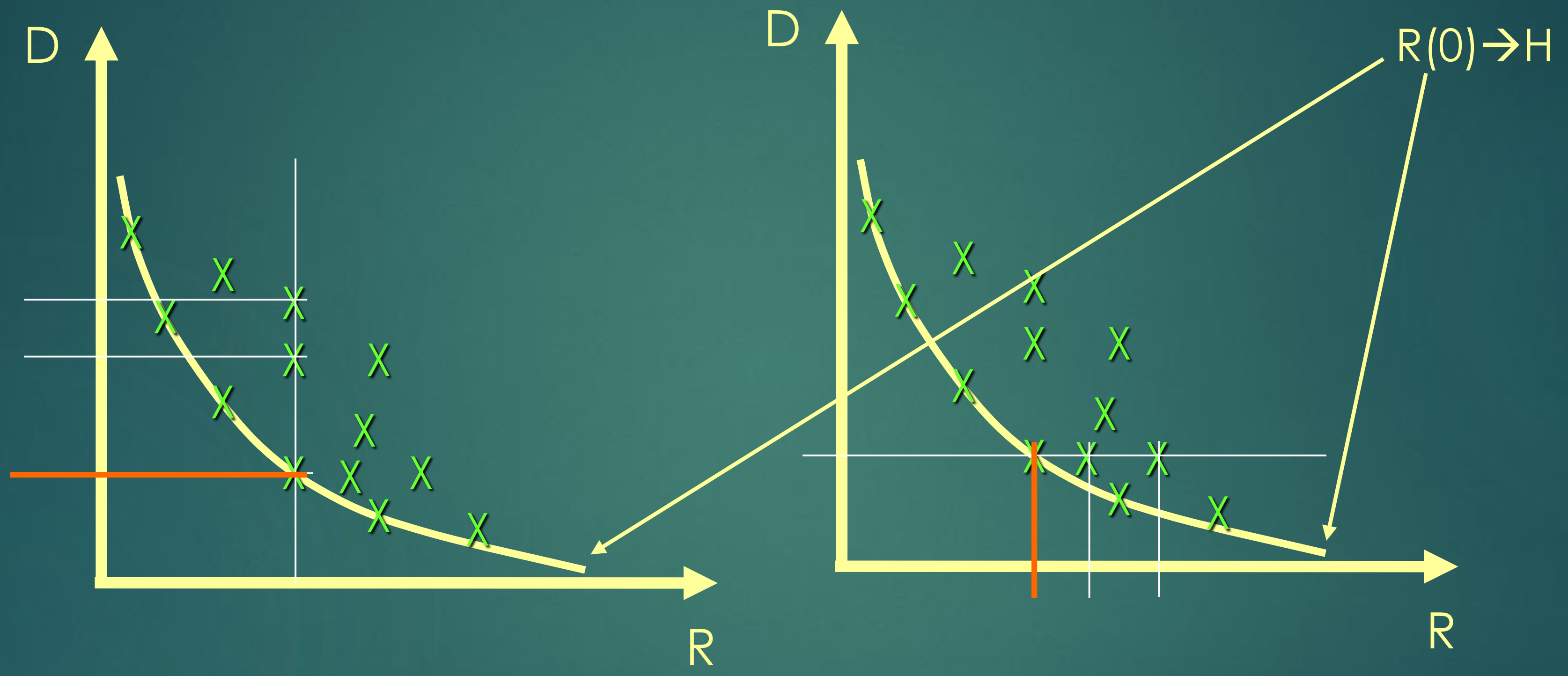
[Shannon]

Πρακτικές τεχνικές: Χρήση μετασχηματισμών και κβάντιση

- Το ανακτώμενο σήμα δεν είναι ίδιο με το αρχικό
- Μεγάλοι βαθμοί συμπίεσης
- Πώς προσδιορίζουμε την R(D);

Καμπύλη Ρυθμού-Παραμόρφωσης

Δ3



- Ποιά είναι η ελάχιστη παραμόρφωση (D) για δεδομένο ρυθμό (R);
- Ποιός είναι ο μικρότερος ρυθμός (R) για συγκεκριμένη παραμόρφωσή (D);

Κατανομή των bits

Δ3

- Έστω R_{tot} ο επιθυμητός συνολικός ρυθμός για κάθε διάνυσμα

$$u = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T$$

Τότε αν R_k ο ρυθμός για κάθε συνιστώσα προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = R_{tot}$$

- Πώς επιλέγουμε τα $R_1, R_2, \ldots R_k$ *ώστε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική παραμόρφωση* D_{tot}

Κατανομή των bits

Δ3

- Αναζητούμε το ελάχιστο της ποσότητας

$$D_1(R_1)+D_2(R_2)+\ldots+D_n(R_n)$$

με εξαντλητικές δοκιμές!

- Μήπως μπορεί να επιτευχθεί ο προσδιορισμός με καλύτερο τρόπο;
  - Ναι, αν είναι γνωστή η κατανομή που ακολουθούν οι συνιστώσες του διανύσματος *u*

Συνάρτηση R(D)

Δ3

- Αποδεικνύεται ότι για Gaussian πηγή χωρίς μνήμη, της οποίας κάθε δείγμα έχει μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ², ισχύει ότι :

$$D(R) = \sigma^2 \cdot 2^{-2\cdot R}$$

Και ισοδύναμα

$$R(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \log \frac{\sigma^2}{D} & 0 \le D \le \sigma^2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Κατανομή των bits

Δ3

- Είναι προφανές ότι με βάση τον προηγούμενο περιορισμό θα ισχύει ότι

$$D_k(R_k) = \sigma_k^2 \cdot 2^{-2 \cdot R_k}$$

- Διακρίνουμε περιπτώσεις
  - $\sigma_1^2 = \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \overline{\sigma_k^2}$
  - $\sigma_1^2 \neq \sigma_1^2 \neq \ldots \neq \sigma_n^2$

όπου $\overline{\sigma_k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$

Ίσες Διασπορές

Δ3

- Έχουμε δει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = R_{tot}$$ και θα ισχύει $$R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R_c$$

οπότε $$R_c = \frac{R_{tot}}{n}$$

- Επίσης

$$\mathrm{D}_{mean} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k(R_k) \Rightarrow \mathrm{D}_{mean} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \cdot 2^{-2\cdot R_k} \Rightarrow$$

$$\mathrm{D}_{mean} = \sigma^2 \cdot 2^{-2\cdot R_c} \Rightarrow \mathrm{D}_{mean} = \sigma^2 \cdot 2^{-2\cdot\frac{R_{tot}}{n}}$$

Ανισες Διασπορές

Δ3

- Έστω $\sigma_1^2 \geq \sigma_1^2 \geq \ldots \geq \sigma_n^2$.
  Τότε πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την παράσταση:

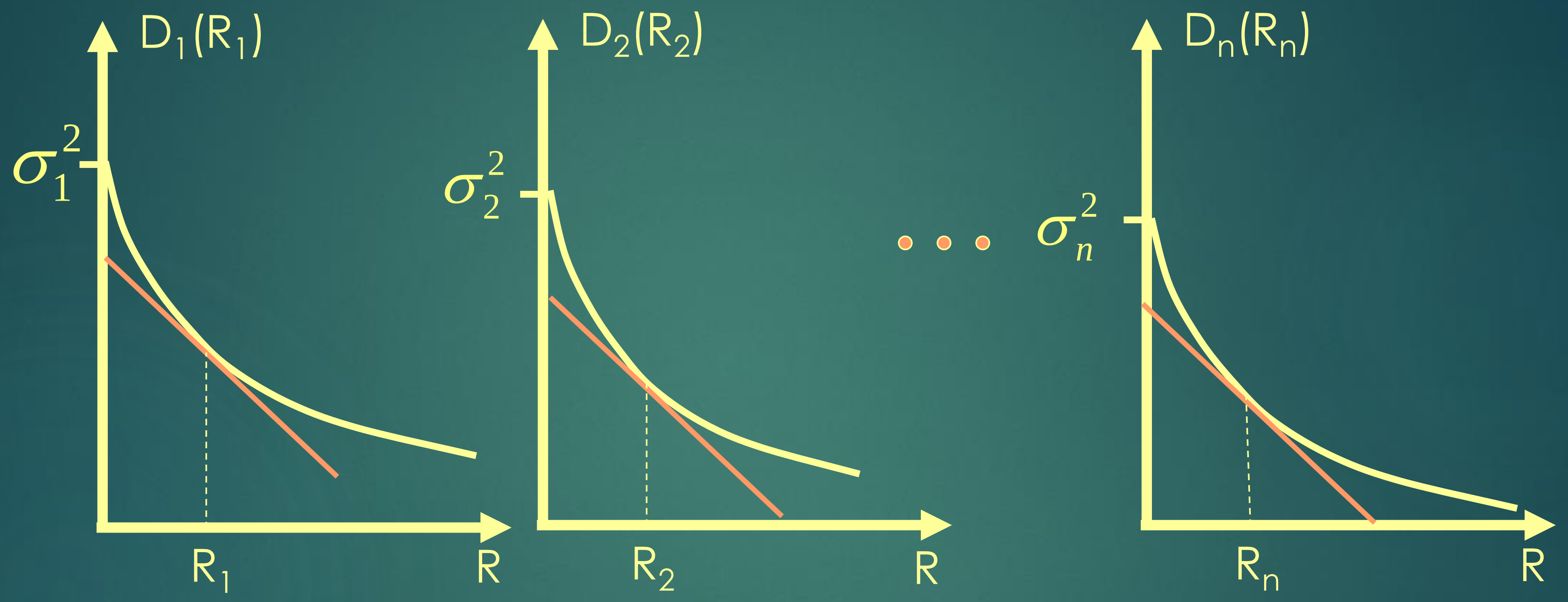
$$\sigma_1^2 \cdot 2^{-2\cdot R_1} + \sigma_2^2 \cdot 2^{-2\cdot R_2} + \ldots \sigma_k^2 \cdot 2^{-2\cdot R_k}$$

με βάση τον περιορισμό: $\sum_{k=1}^{n} R_k = R_{tot}$

Ποιοτικά η βέλτιστη επιλογή θα πρέπει να ικανοποιεί την :

$R_1 \geq R_2 \geq \ldots \geq R_n$

Ανισες Διασπορές



Ποσοτικά, η εκλογή των ρυθμών $R_1, R_2, \ldots R_n$ γίνεται με βάση τον ισχυρισμό ότι η συνολική παραμόρφωση ελαχιστοποιείται όταν

$$\frac{dD_1(R_1)}{dR_1} = \frac{dD_2(R_2)}{dR_2} = \ldots = \frac{dD_n(R_n)}{dR_n} = -\lambda$$

Άνισες διασπορές

Δ3

- Για τον τυχαίο όρο $D_k(R_k)$ θα ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} D_k(R_k) &= \sigma_k^2 \cdot 2^{-2\cdot R_k} \\ \frac{dD_k(R_k)}{dR_k} &= -\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2\cdot\sigma_\kappa^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{-2\cdot R_k} = -\lambda \Rightarrow$$

$$D_k(R_k) = \frac{\lambda}{2\cdot\ln 2} = const.$$

Άρα $\mathrm{D}_{mean} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k(R_k) \Rightarrow \mathrm{D}_{mean} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{2\cdot ln2} \Rightarrow \mathrm{D}_{mean} = \frac{\lambda}{2\cdot ln2} = D_k$

Άνισες Διασπορές

Δ3

- Ποιά σχέση μας δίνει τους ρυθμούς R_k;
  Με βάση τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε:

$$2\cdot\sigma_\kappa^2\cdot\ln 2\cdot 2^{-2\cdot R_k}=\lambda\Rightarrow R_k=-\frac{1}{2}\log_2\frac{\lambda}{\sigma_\kappa^2\cdot 2\cdot\ln 2}\Rightarrow$$

$$R_k=-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{D_k}{\sigma_\kappa^2}\right)$$

Άνισες Διασπορές

Δ3

- Ο συνολικός ρυθμός γίνεται:

$$R_{tot} = \sum_{k=1}^{n} R_k = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\log_2\left(\frac{D_k}{\sigma_\kappa^2}\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{D^n}{\prod_{k=1}^{n}\sigma_\kappa^2}$$

- Ενώ η μια πιο γενική έκφραση για τη συνολική μέση παραμόρφωση D_{mean} μπορεί να γραφεί ως:

$$D = 2^{-2\cdot\frac{R_{tot}}{n}} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sigma_\kappa^2} \xRightarrow{D_{mean}=D} D_{mean} = 2^{-2\cdot\frac{R_{tot}}{n}} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\sigma_\kappa^2}$$

Άνισες Διασπορές

Δ3

- Αντίστοιχα με βάση το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει ότι:

$$R_k = \frac{R_{tot}}{n} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}{\sigma_\kappa^2}$$

- <u>Συμπεράσματα</u>
  - Όσο μεγαλύτερη η διασπορά τόσο μεγαλύτερος ο ρυθμός που απαιτείται για κάποιο R_k ώστε να ελαχιστοποιηθεί η παραμόρφωση
  - Όσο αυξάνεται η ανισοκατανομή στα σ_κ^2 τόσο μειώνεται η D_{mean} άρα και η D_{tot} για σταθερό ρυθμό R_{tot}

Οριακές καμπύλες διαφόρων σ.π.π. για μετρική MSE (Όριο Shannon)

Δ3

- Gaussian σ.π.π.

$$D_s(R) = \sigma^2 \cdot 2^{-2\cdot\mathrm{R}}$$

- Laplacian σ.π.π.

$$D_s(R) = \frac{e}{\pi} \cdot \sigma^2 \cdot 2^{-2\cdot\mathrm{R}}$$

- Ομοιόμορφη σ.π.π.

$$D_s(R) = \frac{6}{\pi \cdot e} \cdot \sigma^2 \cdot 2^{-2\cdot\mathrm{R}}$$

Άσκηση 3.1

- Έστω μία δυαδική πηγή χωρίς μνήμη με ισοπίθανα σύμβολα. Αν θεωρήσουμε ότι κατά την εκπομπή N συμβόλων η πηγή εκπέμπει μόνο τα N-1 ενώ το άλλο αποκωδικοποιείται τυχαία στο δέκτη και ότι για την εκτίμηση της παραμόρφωσης της πηγής χρησιμοποιείται η μετρική Hamming,
- να υπολογίσετε το ρυθμό εκπομπής
- Να βρείτε μία σχέση που συνδέει το ρυθμό με την παραμόρφωση της πηγής.

Άσκηση 3.2(Proakis 6.42)

Δ3

- Αν μία συνάρτηση ρυθμού παραμόρφωσης για μία Laplacian σ.π.π. $f_X(x) = \frac{1}{2\lambda} \cdot e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$ και παραμόρφωση $d(x, \hat{x}) = |x - \hat{x}|$ δίνεται από τη σχέση

$$R(D) = \begin{cases} log_2 \frac{\lambda}{\mathrm{D}} & 0 \leq \mathrm{D} \leq \lambda \\ 0 & \mathrm{D} > \lambda \end{cases}$$

- Να υπολογίσετε πόσα bits/δείγμα απαιτούνται για την επίτευξη παραμόρφωσης που δεν υπερβαίνει την τιμή $\frac{\lambda}{2}$
- Πώς επιδρά η τιμή του λ στην γραφική παράσταση της καμπύλης R(D)

Άσκηση 3.3

Δ3

- Να υπολογίσετε την οριακή καμπύλη ρυθμού παραμόρφωσης, θεωρώντας μετρική μέσου τετραγωνικού σφάλματος για τις ακόλουθες σ.π.π.

- $f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x > 0 \quad (ισχύει : D_s(R) = \frac{e}{2\pi}\sigma^2 \cdot 2^{-2\mathrm{R}})$

- $f_X(x) = \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda \cdot |x|} \quad (ισχύει : D_s(R) = \frac{e}{\pi}\sigma^2 \cdot 2^{-2\mathrm{R}})$

- Για την ίδια παραμόρφωση και για την ίδια τιμή του λ ποια πηγή από τις δύο απαιτεί μικρότερο ρυθμό;