

Συμπίεση Δεδομένων

2014-2015

Κβάντιση

Αναλογικά – Ψηφιακά Σήματα

Δ4

- ▶ Αναλογικό Σήμα

- ▶ $x(t)$, $t \in [t_{min}, t_{max}]$, $x \in [x_{min}, x_{max}]$

- ▶ Δειγματοληψία

- ▶ $t \rightarrow n$, $x(t) \rightarrow x(n)$, $n = 1, \dots, N$

- ▶ Κβάντιση

- ▶ $x(n) \rightarrow \hat{x}(n)$

- ▶ Έστω ότι το εύρος του σήματος $x(t)$ άρα και του $x(n)$ είναι δ . Ορίζεται ένα αλφάβητο \mathcal{C} διακριτών συμβόλων στο διάστημα δ που είναι πεπερασμένο υποσύνολο του δ
- ▶ Η παραγόμενη από την διαδικασία της κβάντισης ακολουθία $\hat{x}(n)$ αντιστοιχίζεται στα στοιχεία του διακριτού αλφάβητου \mathcal{C}

Τεχνικές κβάντισης

Δ4

- ▶ Βαθμωτή κβάντιση ($L=1$)
- ▶ Διανυσματική κβάντιση ($L>1$)

Βαθμωτή κβάντιση

Βαθμωτή κβάντιση

- ▶ Πεδίο ορισμού των τιμών πλάτους του αναλογικού σήματος (άρα και του διακριτού)
 - ▶ Όλη η ευθεία των πραγματικών
- ▶ Διαχωρισμός του πεδίου ορισμού σε N τμήματα
 - ▶ s_1, s_2, \dots, s_N
- ▶ Ορισμός σταθμών κβάντισης
 - ▶ $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_N$
- ▶ Για κάθε δείγμα του αναλογικού σήματος προσδιορίζεται το διάστημα που ανήκει και ανατίθεται η αντίστοιχη στάθμη
 - ▶ $x(n) \rightarrow \hat{x}(n) = \hat{X}_k(n)$
- ▶ Πρακτικά αποτελεί μία απεικόνιση των διαστημάτων s_1, s_2, \dots, s_N στις τιμές $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_N$
- ▶ Στην περίπτωση κωδικοποίησης κάθε στάθμης με σταθερού μήκους λέξεις, ο ρυθμός για ένα κβαντιστή με N στάθμες καθορίζεται από τη σχέση $R = \lceil \log_2 N \rceil$

Βαθμωτή κβάντιση

Δ4

▶ Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

▶ Ομοιόμορφη

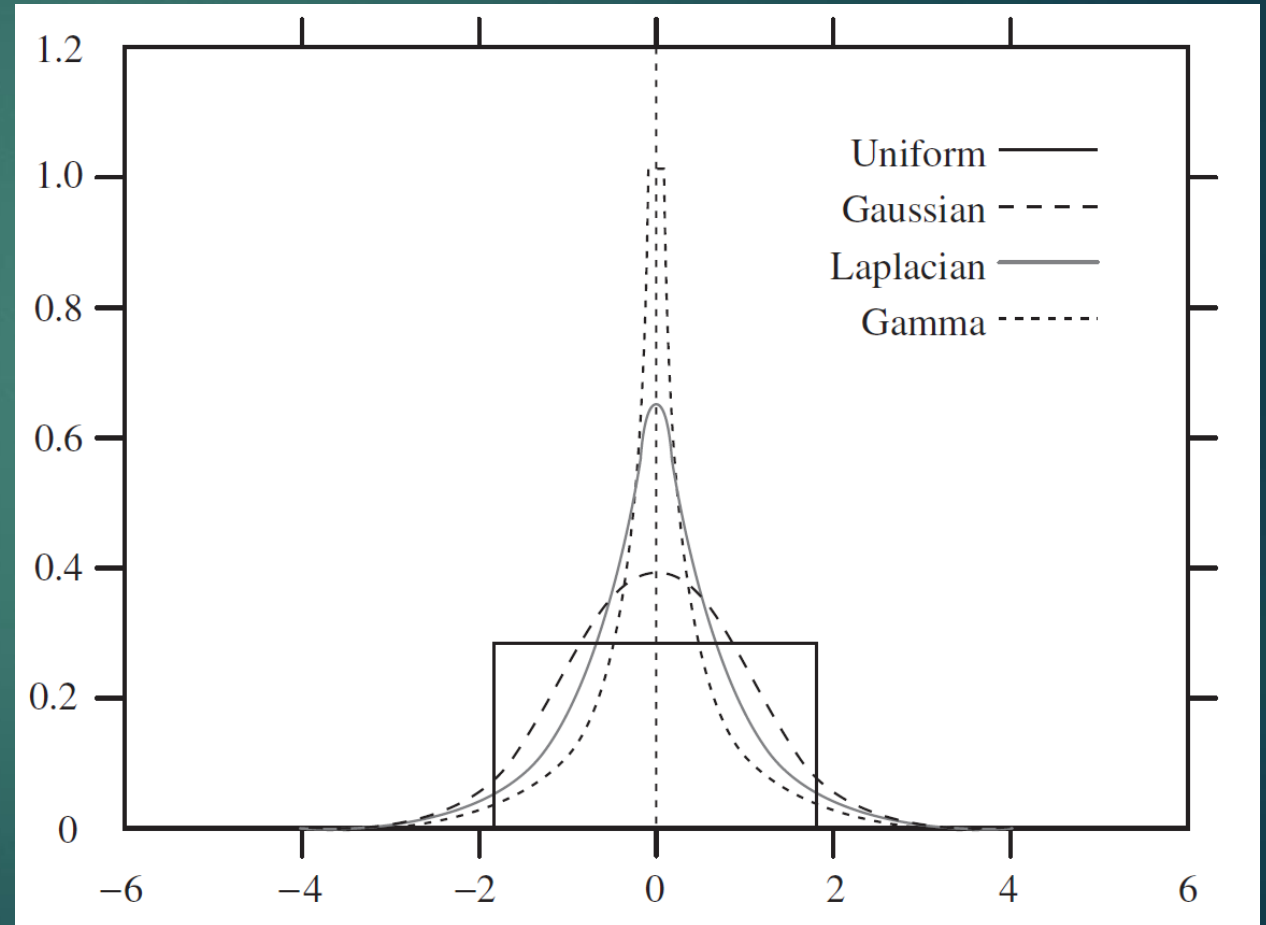
▶ Κανονική

▶ Λαπλασιανή

▶

▶ Γάμμα

▶ ...



Βαθμωτή κβάντιση

- Φορμαλισμός : Παραμόρφωση μέσου τετραγωνικού σφάλματος

$$D = E \left[(x - \hat{x})^2 \right]$$

$$D = E \left[(x_i - \hat{x}_i)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hat{x})^2 f_x(x) dx$$



σ.π.π.

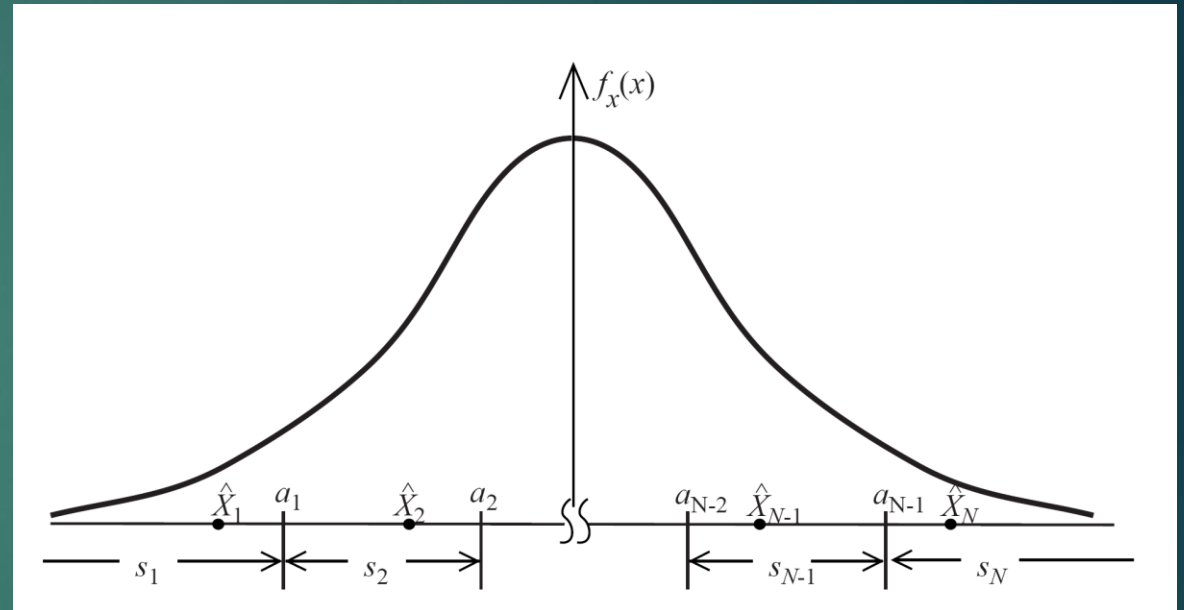
Παραμόρφωση βαθμωτού κβαντιστή

Δ4

$$D = E[d(X, \hat{X})] = E[(X - Q(X))^2]$$

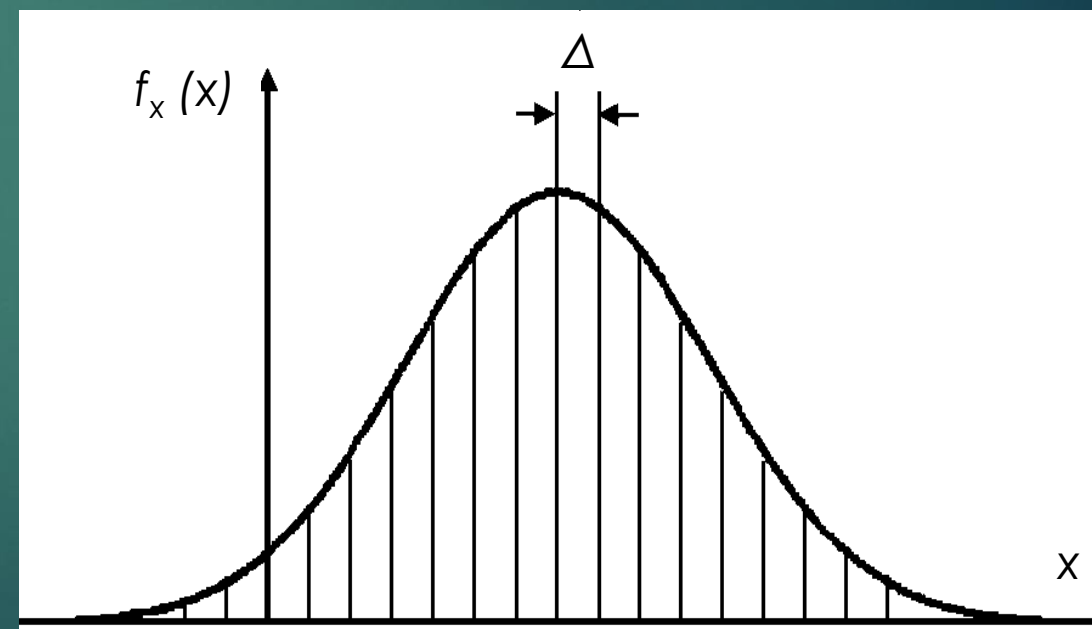
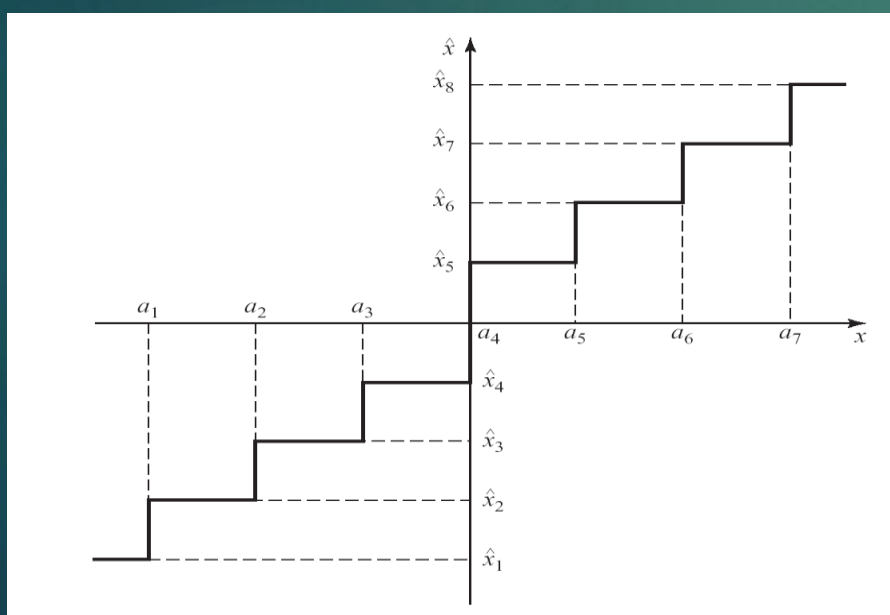
$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))^2 f_x(x) dx$$

$Q(x) = \hat{x}_i$: συνάρτηση κβάντισης



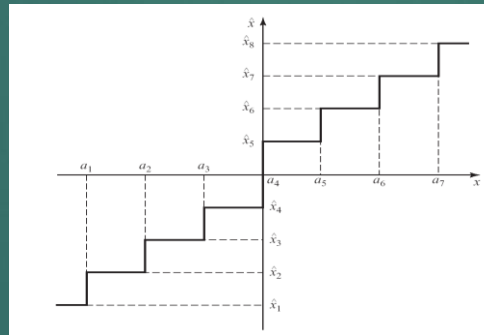
Παραμόρφωση ομοιόμορφου βαθμωτού κβαντιστή

- ▶ Διαχωρισμός διαστήματος κβάντισης σε N τμήματα όλα ίσα εκτός των ακραίων
- ▶ Δημιουργία $N-2$ διαστημάτων ίδιου εύρους ($a_{i+1} - a_i = \Delta, 1 \leq i \leq N - 2$)
- ▶ Στους ομοιόμορφους κβαντιστές συνήθως για τα ίσα διαστήματα κβάντισης ως στάθμη κβάντισης ορίζεται το μέσον του αντίστοιχου διαστήματος



Παραμόρφωση ομοιόμορφου βαθμωτού κβαντιστή

- ▶ Διαχωρισμός διαστήματος κβάντισης σε N τμήματα
- ▶ Δημιουργία $N-2$ διαστημάτων ίδιου εύρους ($a_{i+1} - a_i = \Delta, 1 \leq i \leq N - 2$)
- ▶ Στους ομοιόμορφους κβαντιστές συνήθως για τα ίσα διαστήματα κβάντισης ως στάθμη κβάντισης ορίζεται το μέσον του αντίστοιχου διαστήματος



$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hat{x})^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f_X(x) dx + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 f_X(x) dx$$

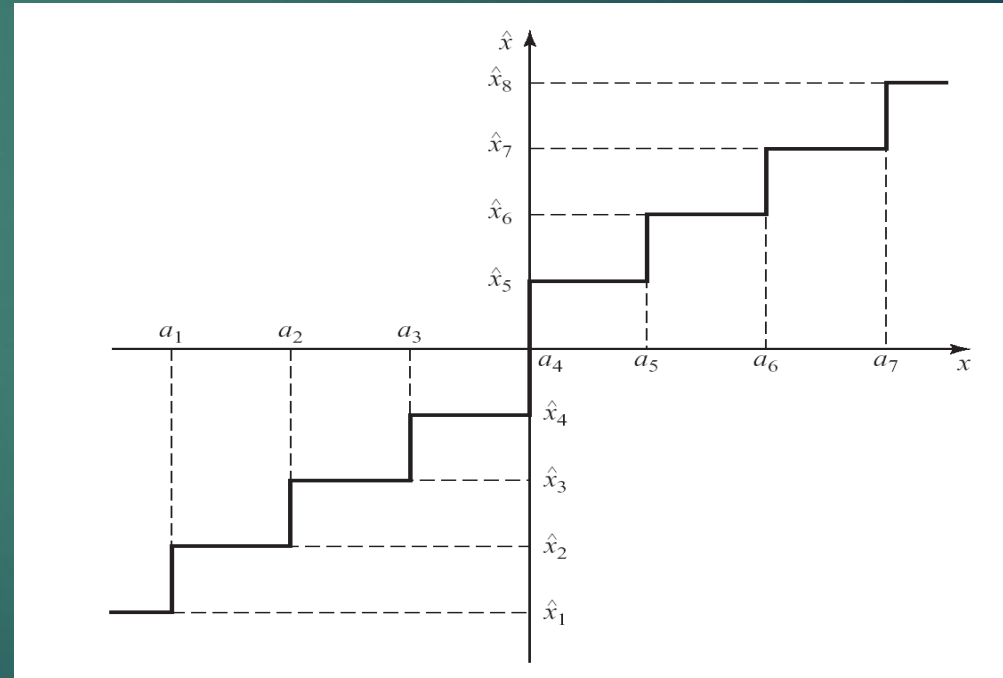
Παραμόρφωση ομοιόμορφου βαθμωτού κβαντιστή

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_1+(i-1)\Delta}^{a_1+i\Delta} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f_X(x) dx \\ + \int_{a_1+(N-2)\Delta}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 f_X(x) dx$$

Άσκηση 4.1

- ▶ Να δοθεί η έκφραση για τον υπολογισμό της παραμόρφωσης ενός κβαντιστή με 8 στάθμες

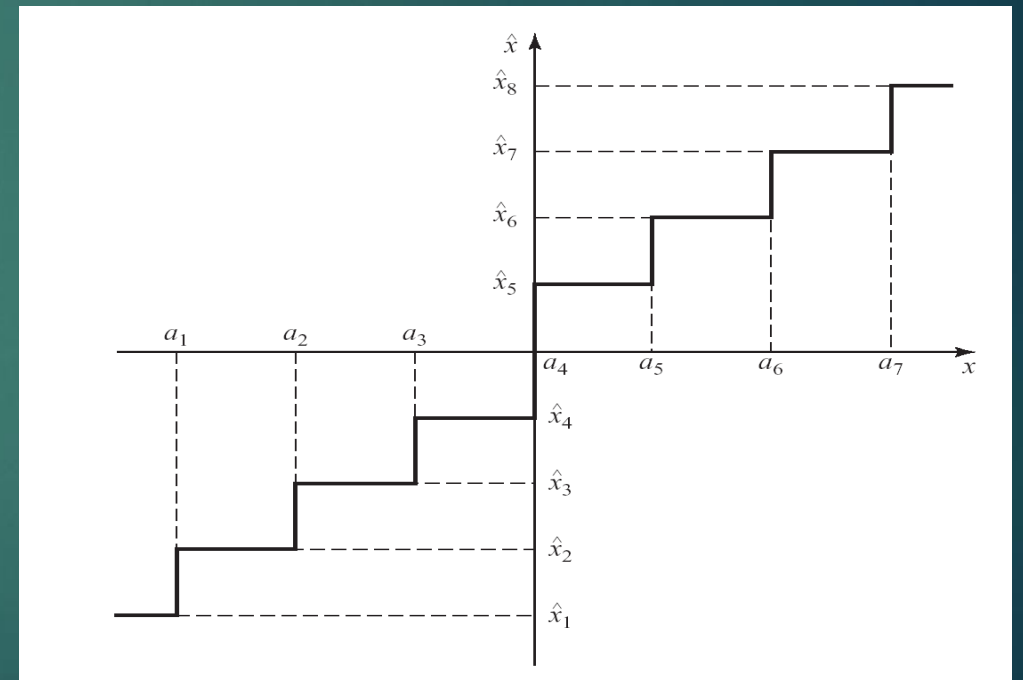
$$D = E \left[(X - \hat{X})^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))^2 f_X(x) dx$$



Άσκηση 4.1

- ▶ Να δοθεί η έκφραση για τον υπολογισμό της παραμόρφωσης ενός κβαντιστή με 8 στάθμες

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{X}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{X}_{i+1})^2 f_X(x) dx + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{X}_N)^2 f_X(x) dx$$



Άσκηση 4.2

Δ4

- ▶ Στην αναπαράσταση μιας πηγής με κανονική κατανομή μέσης τιμής μηδέν και μοναδιαίας διακύμανσης, ποια είναι η ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση αν χρησιμοποιηθούν 8 bit/σύμβολο. Ποιος είναι ο συντελεστής μείωσης παραμόρφωσης αν χρησιμοποιηθούν 16bits/σύμβολο

Άσκηση 4.2

- ▶ Στην αναπαράσταση μιας πηγής με κανονική κατανομή μέσης τιμής μηδέν και μοναδιαίας διακύμανσης, ποια είναι η ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση αν χρησιμοποιηθούν 8 bit/σύμβολο. Ποιος είναι ο συντελεστής μείωσης παραμόρφωσης αν χρησιμοποιηθούν 16bits/σύμβολο
- ▶ $D_8=1.52 \cdot 10^{-5}$
- ▶ $D_{16}=2.32 \cdot 10^{-10}$
- ▶ $D_8/D_{16}=65283.5 \approx 2^{16}$
- ▶ $D_8/D_{16}(\text{dB})=48\text{dB}$

Άσκηση 4.3

- ▶ Μία πηγή $X(t)$ εκπέμπει σύμβολα με στατική κανονική κατανομή και φασματική πυκνότητα ισχύος που δίνεται από τη σχέση

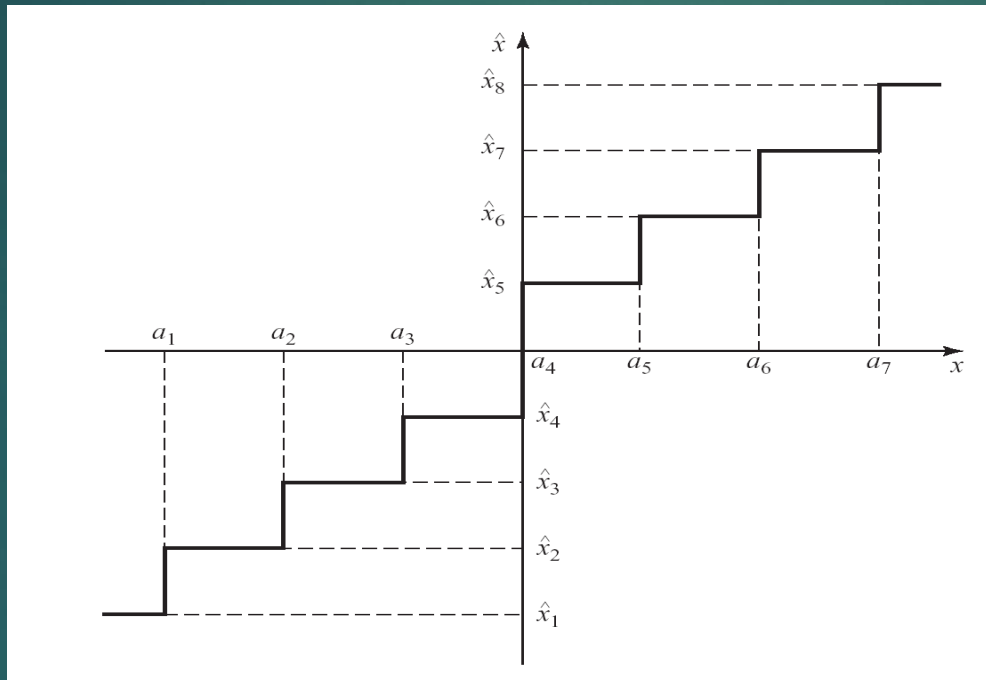
$$S_x(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 100 \text{ Hz} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η πηγή δειγματοληπτείται με ρυθμό Nyquist και κάθε δείγμα κβαντίζεται χρησιμοποιώντας τον κβαντιστή της άσκησης 4.1 με 8 στάθμες. Να υπολογίσετε την παραμόρφωση και τον ρυθμό που προκύπτει για τη δεδομένη παραμόρφωση.

a1	-60	\hat{x}_1	-70
a2	-40	\hat{x}_2	-50
a3	-20	\hat{x}_3	-30
a4	0	\hat{x}_4	-10
a5	20	\hat{x}_5	10
a6	40	\hat{x}_6	30
a7	60	\hat{x}_7	50
		\hat{x}_8	70

Άσκηση 4.3

Δ4



a1	-60	\hat{x}_1	-70
a2	-40	\hat{x}_2	-50
a3	-20	\hat{x}_3	-30
a4	0	\hat{x}_4	-10
a5	20	\hat{x}_5	10
a6	40	\hat{x}_6	30
a7	60	\hat{x}_7	50
		\hat{x}_8	70

Άσκηση 4.3

- ▶ Υπολογισμός διακύμανσης

$$\sigma^2 = E[X_i^2] = R_X(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = \int_{-100}^{100} 2 df = 400$$

- ▶ Υπολογισμός ρυθμού μετάδοσης
 - ▶ Το πλήθος των απαιτούμενων bits/δείγμα είναι 3 (γιατί;)

$$R = 3f_s = 600 \text{ bits/sec.}$$

Άσκηση 4.3

- ▶ Υπολογισμός σ.π.π

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 400}} e^{-\frac{x^2}{800}}$$

- ▶ Υπολογισμός παραμόρφωσης

$$D = E[(X - \hat{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))^2 f_X(x) dx = \sum_{i=1}^8 \int_{\mathcal{R}_i} (x - Q(x))^2 f_X(x) dx$$

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=2}^7 \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x - \hat{x}_i)^2 f_X(x) dx + \int_{a_7}^{\infty} (x - \hat{x}_8)^2 f_X(x) dx$$

$$D=33.8$$

Άσκηση 4.3

Δ4

- ▶ Υπολογισμός αναμενόμενης παραμόρφωσης για το δεδομένο ρυθμό (bits/σύμβολο)
 $D=6.25$
- ▶ Αίτια απόκλισης
 - ▶ Η κβάντιση έγινε χωριστά για κάθε εκπεμπόμενο σύμβολο (βαθμωτή).
 - ▶ Δεν επιλέχθηκαν σωστά τα a_i και οι στάθμες κβάντισης \hat{x}_i .
 - ▶ Μετά την κβάντιση οι έξοδοι είναι δεν είναι ισοπίθανες άρα μπορούν να συμπιεστούν περαιτέρω ($p(\hat{x}_1) = p(\hat{x}_8) = 0.0014, p(\hat{x}_2) = p(\hat{x}_7) = 0.0214, p(\hat{x}_3) = p(\hat{x}_6) = 0.1359, p(\hat{x}_4) = p(\hat{x}_5) = 0.3414$)
 - ▶ $H=2.105\text{bits/symbol} \rightarrow D=21.61$

Μέτρα Εκτίμησης Θορύβου Κβάντισης Δ4

- ▶ Λόγος σήματος προς θόρυβο κβάντισης

$$\text{SQNR} = \frac{E[X^2]}{E[(X - Q(X))^2]}$$

- ▶ Ισχύς θορύβου κβάντισης

$$P_{\tilde{X}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[(X(t) - Q(X(t)))^2] dt$$

- ▶ Ισχύς σήματος

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X(t)^2] dt$$

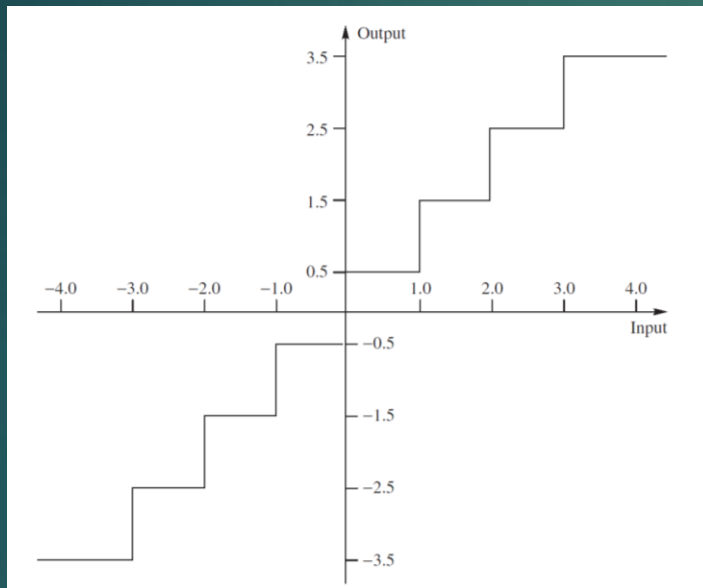
Μέτρα Εκτίμησης Θορύβου Κβάντισης Δ4

- ▶ Λόγος σήματος προς θόρυβο κβάντισης

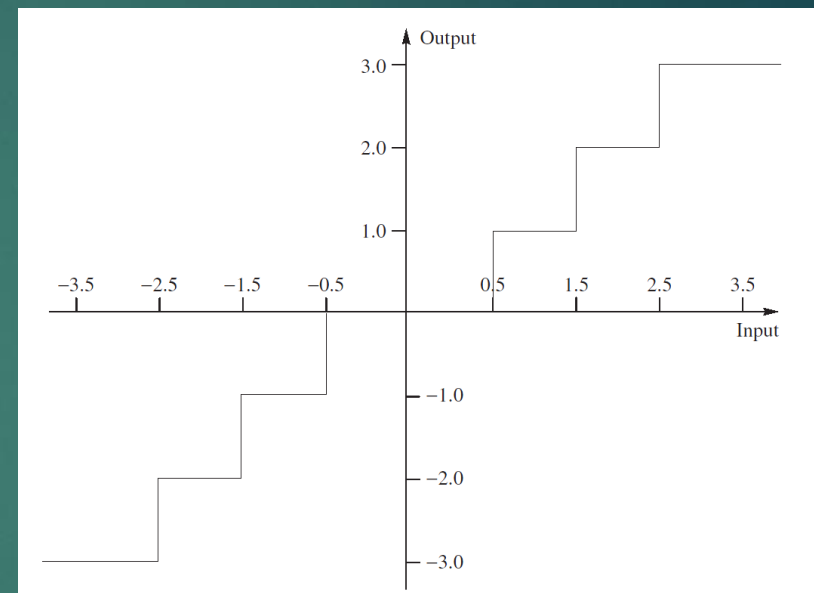
$$\text{SQNR} = \frac{P_X}{P_{\tilde{X}}}$$

- ▶ Πως αλλιώς θα μπορούσε να γραφεί η παραπάνω σχέση;

Συμμετρία επιπέδων κβάντισης



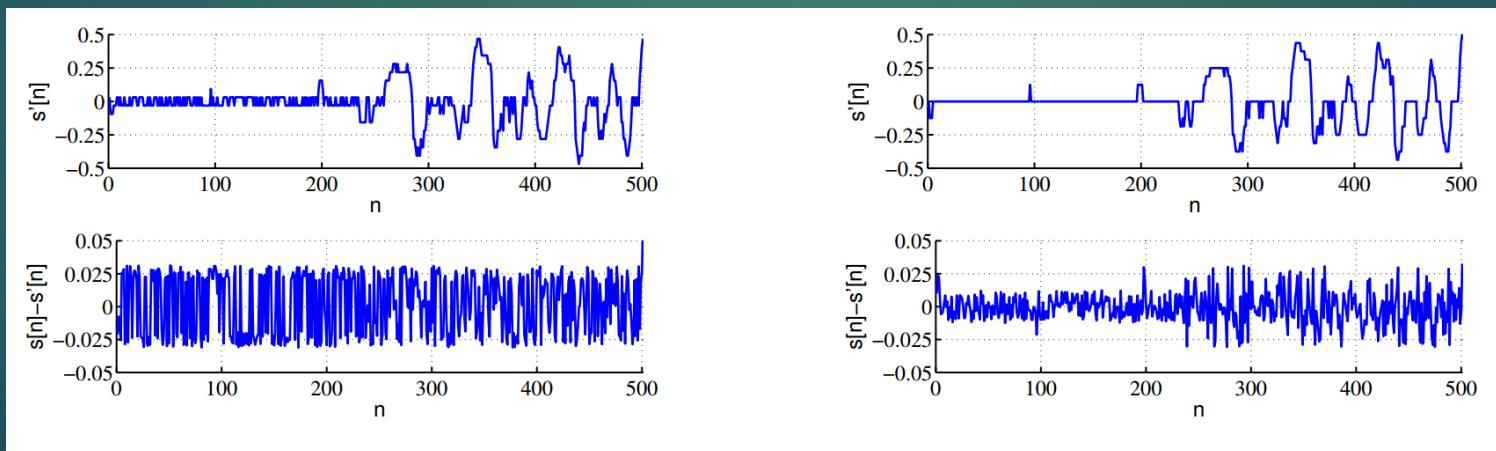
Άρτιο πλήθος επιπέδων



Περιττό πλήθος επιπέδων
(ύπαρξη επιπέδου στο 0)

Συμμετρία επιπέδων κβάντισης

- ▶ Χρήση περιττού πλήθους σταθμών (με ύπαρξη στάθμης 0) όταν απαιτείται η ακριβής αναπαράσταση του 0 μηδενός
 - ▶ Ψηφιακά συστήματα ελέγχου
 - ▶ Συστήματα κωδικοποίησης ήχου όπου υπάρχουν μεγάλες παύσεις
- ▶ Ο θόρυβος που δημιουργείται στους κβαντιστές χωρίς μηδενική στάθμη έχει διασπορά $\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{4}$
- ▶ Κατά την ανάθεση δυαδικών κωδικών λέξεων σε κβαντιστές περιττού πλήθους σταθμών προκύπτουν στάθμες που δεν χρησιμοποιούνται



Κωδικοποίηση μεταβλητού μήκους

- ▶ Κωδικοποίηση κάθε στάθμης με κώδικα μεταβλητού μήκους
- ▶ Ο ρυθμός θα υπολογίζεται με βάση την πιθανότητα p_i παρατήρησης της κάθε στάθμης

$$R = \sum_{i=1}^N p_i \cdot l_i$$

- ▶ Η πιθανότητα παρατήρησης της κάθε στάθμης εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της κατανομής και τα όρια του κάθε διαστήματος

$$p_i = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f_X(x) dx$$

- ▶ Άρα

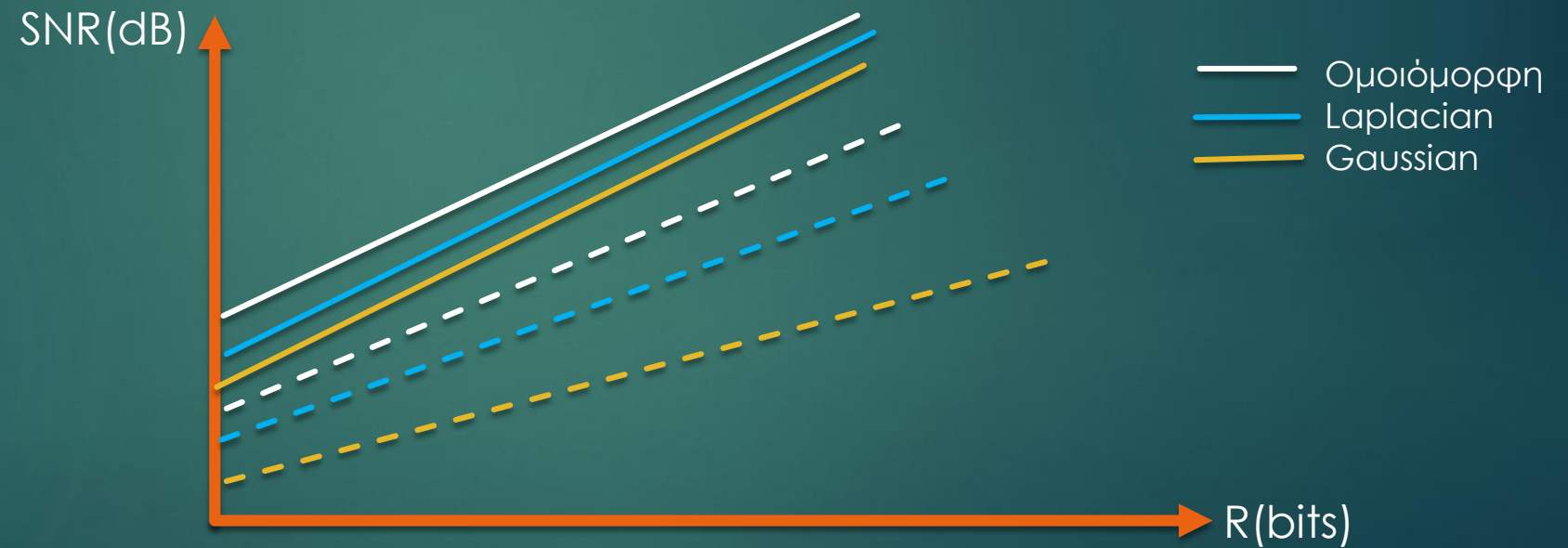
$$R = \sum_{i=1}^N l_i \cdot \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f_X(x) dx$$

Βαθμωτή κβάντιση

Δ4

- ▶ Χωρίς χρήση της συνάρτησης κατανομής κατά το σχεδιασμό του κβαντιστή (διακεκομμένες καμπύλες)

- ▶ Με χρήση της συνάρτησης κατανομής κατά το σχεδιασμό του κβαντιστή (συνεχείς καμπύλες)



- ▶ Μείωση της παραμόρφωσης για βαθμωτό κβαντιστή μπορεί να επιτευχθεί με:
 - ▶ Χρήση κβαντιστών προσαρμοσμένων στην σ.π.π. της πηγής
 - ▶ Αύξηση του ρυθμού (άρα και του πλήθους των επιπέδων κβάντισης)
 - ▶ Χρήση μεταβλητών κωδικών για την κωδικοποίηση των κβαντισμένων συμβόλων
 - ▶ Χρήση μεταβλητού βήματος κβάντισης