# Συμπίεση Δεδομένων

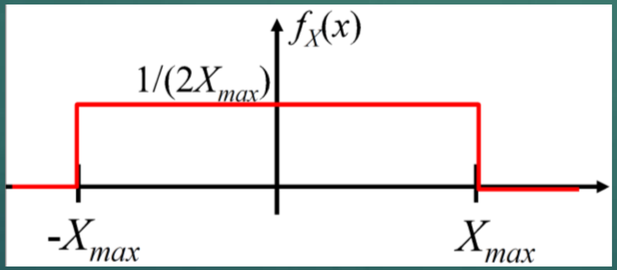
2014-2015

# Κβάντιση

# Άσκηση 5.1

Δ5

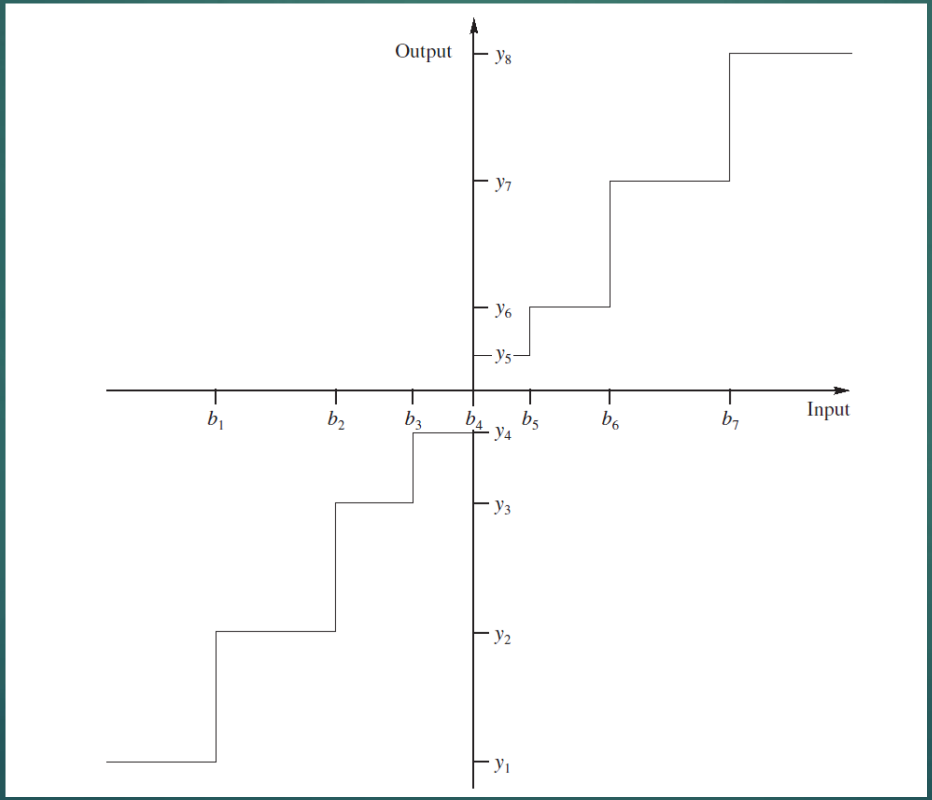
- Για ένα σήμα που έχει τη σ.π.π. του σχήματος να υπολογίσετε:
- μήκος του δυαδικού κώδικα για N επίπεδα κβάντισης για σταθερό μήκος λέξης;
- το εύρος του διαστήματος κβάντισης
- την παραμόρφωση λόγω της κβάντισης
- το SQNR
- Μία έκφραση για την καμπύλη ρυθμού παραμόρφωσης



# Μη ομοιόμορφοι βαθμωτοί κβαντιστές



- Τα διαστήματα κβάντισης δεν έχουν σταθερό εύρος




Πηγή: Sayood

# Μη ομοιόμορφοι βαθμωτοί κβαντιστές

Δ5

- Πρόβλημα προσδιορισμού N σταθμών κβάντισης και N-1 διαστημάτων κβάντισης, δηλαδή 2N-1 παραμέτρων

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hat{x})^2 f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{x}_{i+1})^2 f_X(x) dx + \int_{\alpha_{\mathrm{N}-1}}^{\infty} (x - \hat{x}_{\mathrm{N}})^2 f_X(x) dx$$

# Βέλτιστος μη ομοιόμορφος βαθμωτός κβαντιστής

Δ5

- Διαφόριση της παραμόρφωσης ως προς $a_i$ και ως προς $\hat{x}_i$.
- Ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης $(\frac{\vartheta D}{\vartheta a_i} = 0, \frac{\vartheta D}{\vartheta \hat{x}_i} = 0)$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} D = f_X(a_i)[(a_i - \hat{x}_i)^2 - (a_i - \hat{x}_{i+1})^2] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} D = \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2(x - \hat{x}_i) f_X(x)\, dx = 0$$

# Βέλτιστος μη ομοιόμορφος βαθμωτός κβαντιστής

Δ5

$$\frac{\vartheta \mathrm{D}}{\vartheta a_i} = 0 \rightarrow a_i = \frac{1}{2}(\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1})$$

$$\frac{\vartheta \mathrm{D}}{\vartheta x_i} = 0 \rightarrow x_i = \frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i} x f_X(x) dx}{\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_X(x) dx}$$

# Βέλτιστος μη ομοιόμορφος βαθμωτός κβαντιστής

Δ5

- Κριτήρια για βέλτιστο βαθμωτό κβαντιστή (Lloyd-Max)
  - Τα άκρα των περιοχών κβάντισης δίνονται από τον αριθμητικό μέσο των γειτονικών τιμών κβάντισης
  - Οι τιμές κβάντισης είναι τα κέντρα μάζας των περιοχών κβάντισης
- Δεν δίνονται αναλυτικές λύσεις για το βέλτιστο κβαντιστή αλλά είναι δυνατός ο υπολογισμός μέσω επαναληπτικής μεθόδου

# Σχεδιασμός βέλτιστου μη ομοιόμορφου κβαντιστή

Δ5

- 1. Θέσε $j$=1 και όρισε μια μονότονα αύξουσα ακολουθία από $N$ στάθμες κβάντισης: $\hat{x}_{j1}, \hat{x}_{j2},\dots, \hat{x}_{jN}$
- 2. Όρισε τα N-1σημεία διαχωρισμού των διαστημάτων κβάντισης $a_{ji}$ ώστε:

$$a_{ji} = \frac{1}{2}\left(\hat{x}_{ji} + \hat{x}_{ji+1}\right)$$

- 3. Θέσε $j$=$j$+1 και όρισε τις $N$ νέες τιμές των σταθμών κβάντισης ως:

$$x_{ji} = \frac{\int_{a_{j-1,i-1}}^{a_{j-1,i}} x f_X(x)dx}{\int_{a_{j-1,i-1}}^{aj-1,i} f_X(x)dx}$$

- 4. Επανάλαβε από το βήμα 2 μέχρι η μετακίνηση των σημείων κβάντισης να γίνει μικρότερη από ένα ορισμένο κατώφλι.

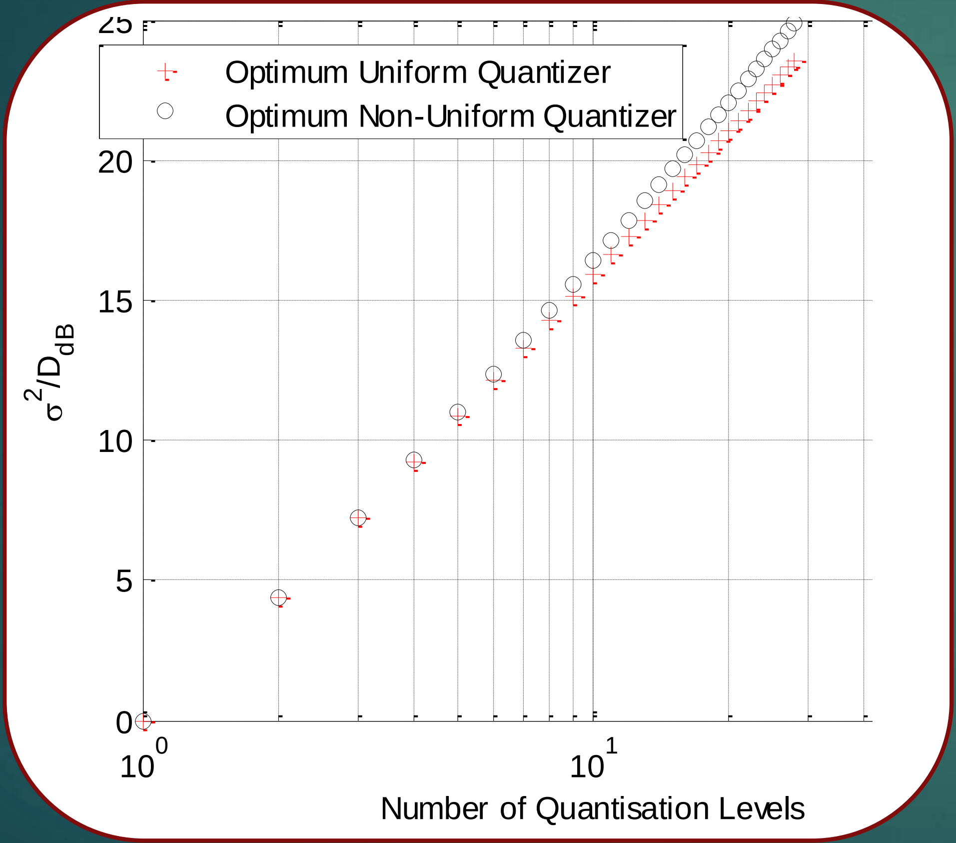
# Σύγκριση ομοιόμορφου – μη ομοιόμορφου κβαντιστή

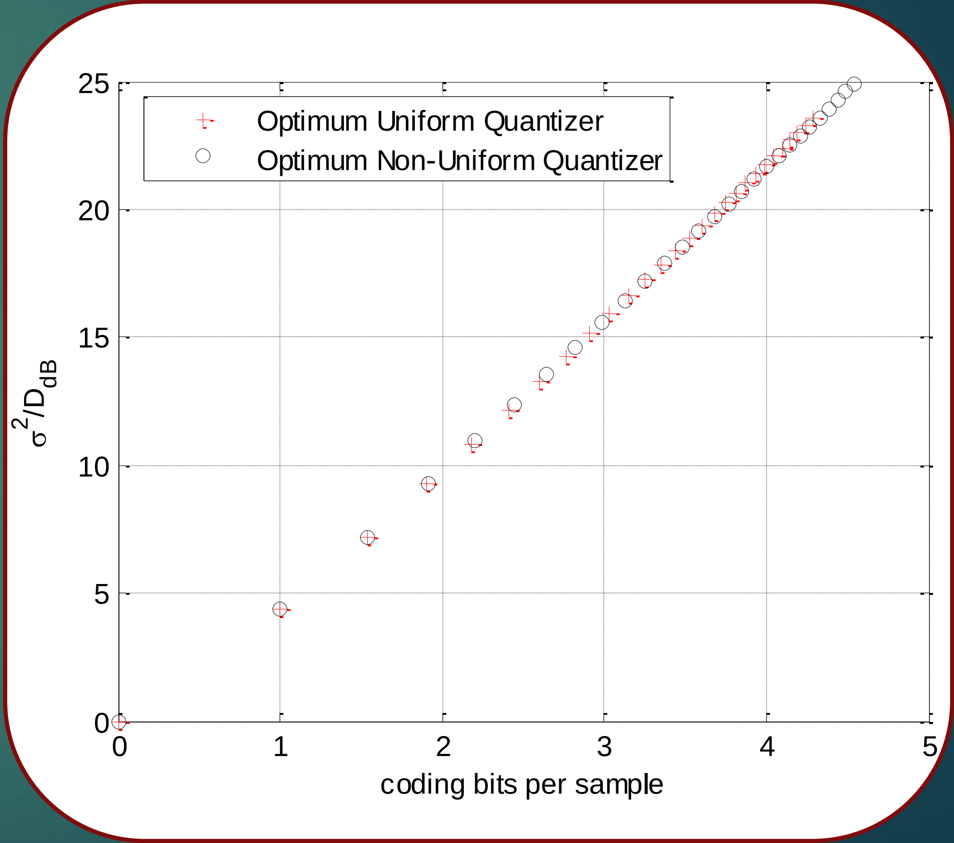
Δ5

- Για βέλτιστους ομοιόμορφους (Optimal Uniform Quatnizer-OUQ) και μη ομοιόμορφους (Optimal Non-Uniform Quantizer – ONUQ) κβαντιστές με ίδιο πλήθος σταθμών προκύπτει ότι:
- Η ποσότητα SQNR  είναι μεγαλύτερη για τους ONUQ σε σχέση με τους OUQ και η διαφορά μεγαλώνει με αύξηση του πλήθους των σταθμών (1.5dB ,N=28)
- Η ποσότητα SQNR δεν διαφέρει μεταξύ των ONUQ και των OUQ αν χρησιμοποιηθούν κωδικοποιητές εντροπίας

# Σύγκριση ομοιόμορφου – μη ομοιόμορφου κβαντιστή

Δ5



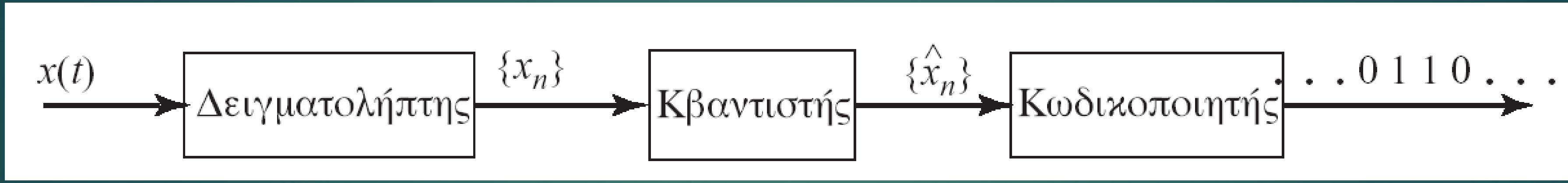
# Σύγκριση ομοιόμορφου – μη ομοιόμορφου κβαντιστή

Δ5

- Συμπεράσματα
  - Αν χρησιμοποιήσουμε κώδικα εντροπίας για την κωδικοποίηση του κβαντισμένου σήματος/πηγής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο OUQ
  - Αν χρησιμοποιηθεί κώδικας σταθερού μήκους η απόδοση είναι μεγαλύτερη αν χρησιμοποιηθεί ο ONUQ

# Παλμοκωδική διαμόρφωση

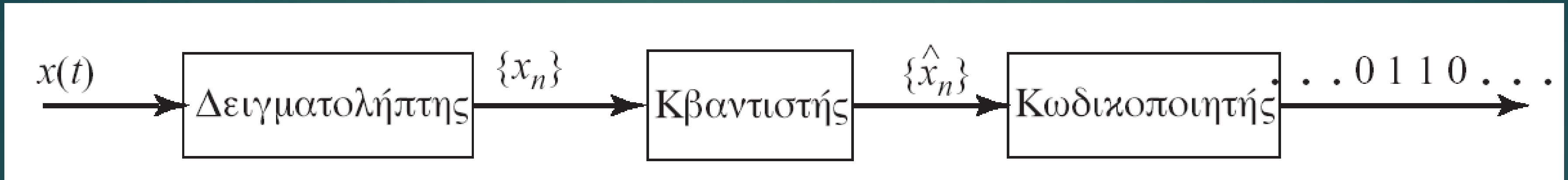
Δ5



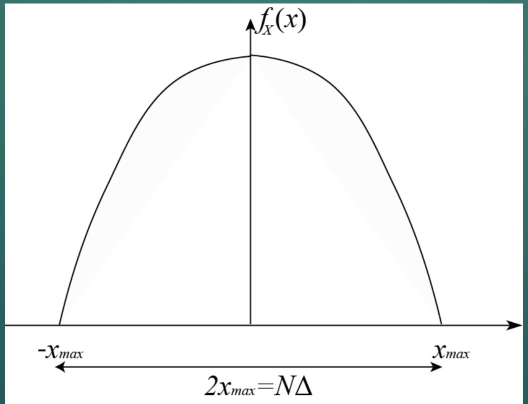

Θεωρείστε ότι το σήμα $x(t)$ έχει PDF $f_X(x)$ συμμετρικό ως προς το μηδέν και ότι ισχύει $f_X(x)=0$ εκτός του πεπερασμένου διαστήματος $[-x_{max}, x_{max}]$.

# Παλμοκωδική διαμόρφωση

Δ5




- Θεωρείστε ότι το σήμα $x(t)$ έχει σ.π.π $f_X(x)$ συμμετρικό ως προς το μηδέν και ότι ισχύει $f_X(x)=0$ εκτός του πεπερασμένου διαστήματος $[-x_{max}, x_{max}]$.
- Ορίζουμε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή με $N$ διαστήματα κβάντισης ίσου μήκους Δ και ορίζουμε το μέσον κάθε διαστήματος ως στάθμη κβάντισης.



# Παράδειγμα 5.1

Δ5

- Ποιο το εύρος του διαστήματος κβάντισης στην παλμοκωδική διαμόρφωση;

- Ποιο το εύρος του διαστήματος κβάντισης για δυαδικό κώδικα σταθερού μήκους;

# Παράδειγμα 5.1

Δ5

- Ποιο το εύρος του διαστήματος κβάντισης στην παλμοκωδική διαμόρφωση;

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N}$$

- Ποιο το εύρος του διαστήματος κβάντισης για δυαδικό κώδικα σταθερού μήκους;

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N} = \frac{x_{\max}}{2^{\nu-1}}$$

# Παράδειγμα 5.1

Δ5

- Ποια η διακύμανση του σφάλματος;

$$E[\tilde{X}^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} \tilde{x}^2 \, d\tilde{x} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} = \frac{x_{\max}^2}{3 \times 4^\nu}$$

- Ποιο το SQNR του κβαντισμένου σήματος;

$$\text{SQNR} = \frac{\overline{X^2}}{\overline{\tilde{X}^2}} = \frac{3 \times N^2 \overline{X^2}}{x_{\max}^2} = \frac{3 \times 4^\nu \overline{X^2}}{x_{\max}^2}$$

# Παράδειγμα 5.1

Δ5

- Ορίζοντας την ισχύ της κανονικοποιημένης μορφής του σήματος ως

$$P_{mn} = \frac{\overline{X^2}}{x_{\max}^2}$$

- Η έκφραση για το SQNR θα παίρνει τη μορφή

$$SQNR = 3 \cdot 4^{\nu} P_{mn}$$

# Παράδειγμα 5.1



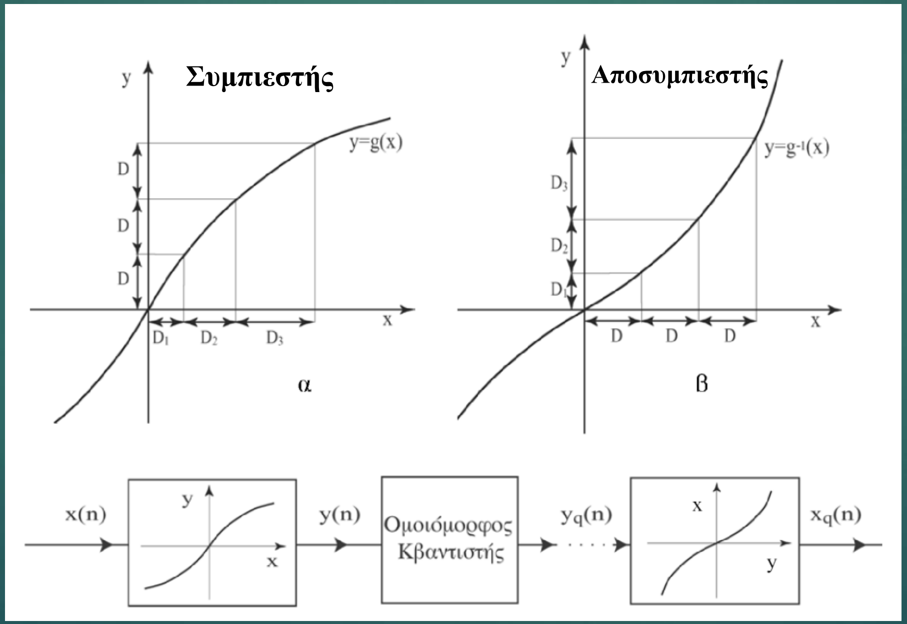
- Η μετατροπή του SQNR σε μονάδες dB παίρνει τη μορφή

$$SQNR_{dB} = 6v + 4.8 + P_{mn|\mathrm{dB}}$$

- Παρατηρήσεις
  - αύξηση της τιμής του ρυθμού κωδικοποίησης v κατά μία μονάδα, αυξάνει την ποιότητα του σήματος κατά 6 dB
  - Η τιμή του όρου $P_{mndB}$ εξαρτάται αποκλειστικά από τη σ.π.π. $f_X(x)$ του σήματος που διαβιβάζεται μέσω του PCM.
  - Για ομοιόμορφη σ.π.π. του σήματος $x(t)$ $P_{mn}$=1/3 και $P_{mndB}$=-4.8 dB οπότε επαληθεύονται τα αποτελέσματα της ασκησης 5.1.

# Μη ομοιόμορφη παλμοκωδική διαμόρφωση

Δ5

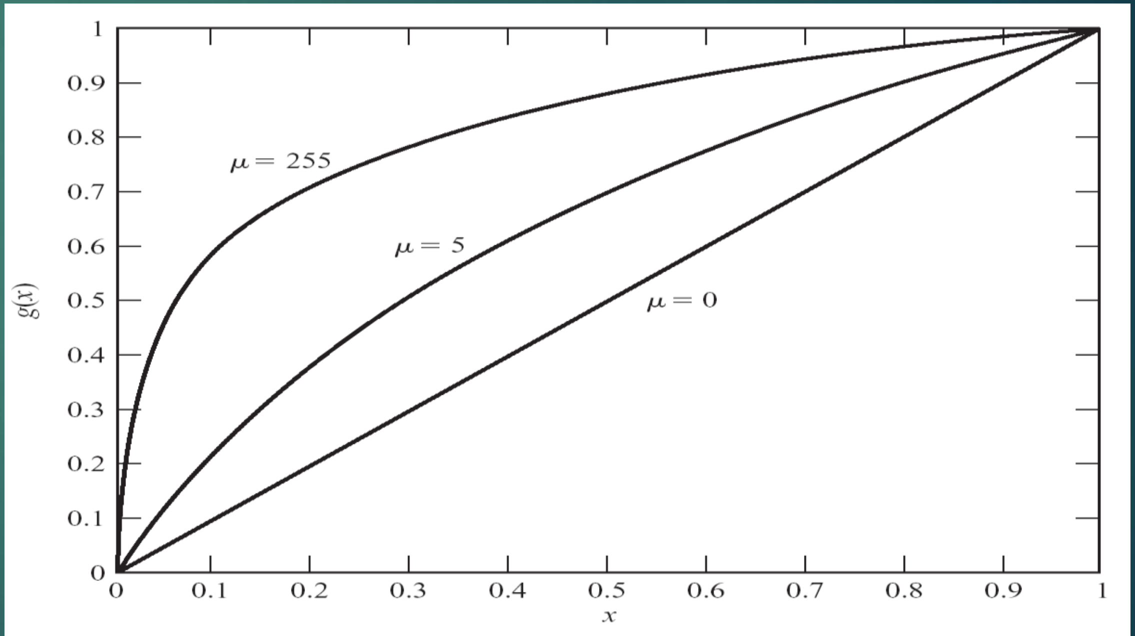



# Μη ομοιόμορφη παλμοκωδική διαμόρφωση



- Συμπιεστής τύπου ‘$\mu$’ (ΗΠΑ)

$$g(x) = \frac{\log\left(1+\mu\left|x/x_{\max}\right|\right)}{\log(1+\mu)} sgn(x)$$

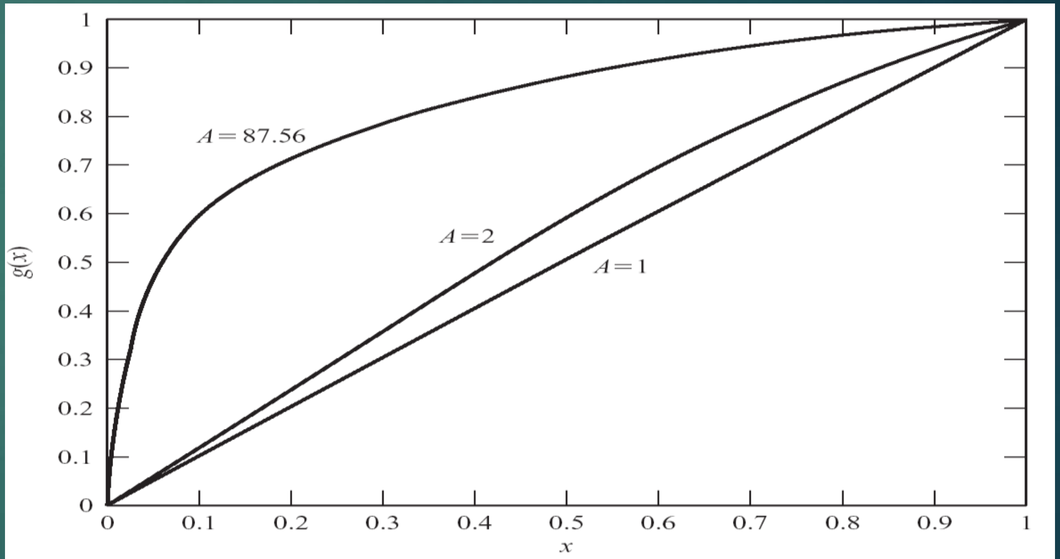


# Μη ομοιόμορφη παλμοκωδική διαμόρφωση

Δ5

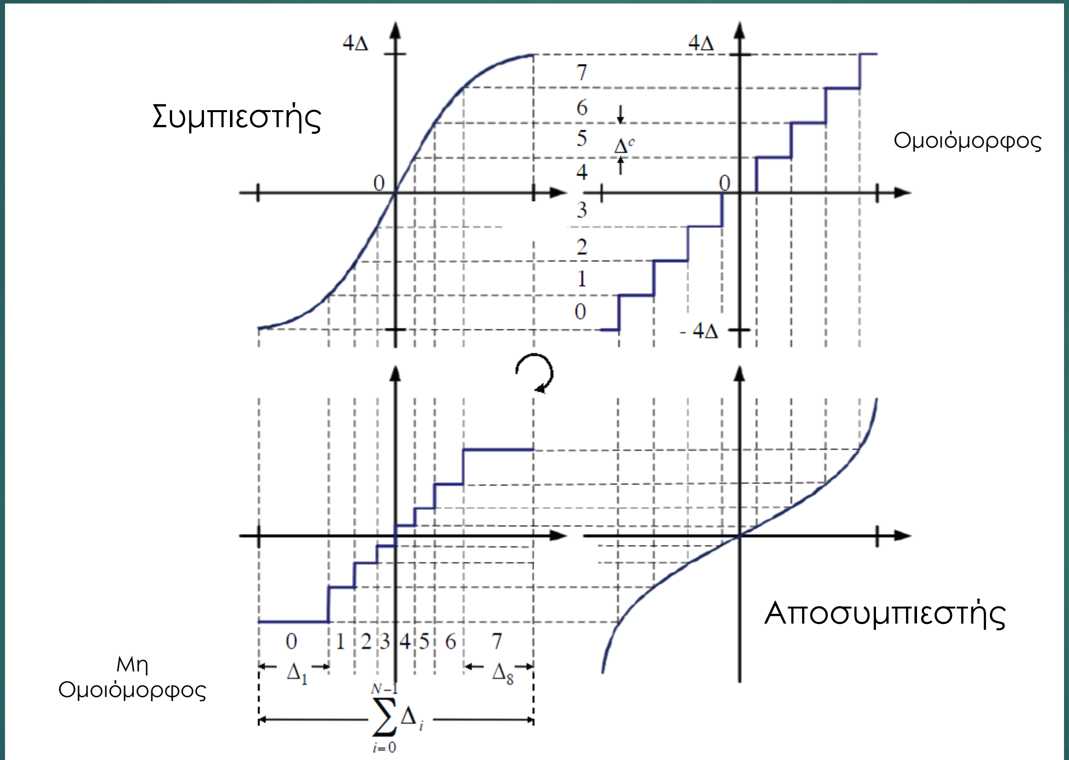
- Συμπιεστής τύπου 'A' (Καναδάς-Ευρώπη)

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{A\left|x/x_{\max}\right|}{1+\log A}\operatorname{sgn}(x), & 0\le\left|x/x_{\max}\right|\le 1/A\\[2ex] \dfrac{1+\log\left(A\left|x/x_{\max}\right|\right)}{1+\log A}\operatorname{sgn}(x), & 1/A\le\left|x/x_{\max}\right|\le 1\end{cases}$$



# Συμπιεστές - Αποσυμπιεστές

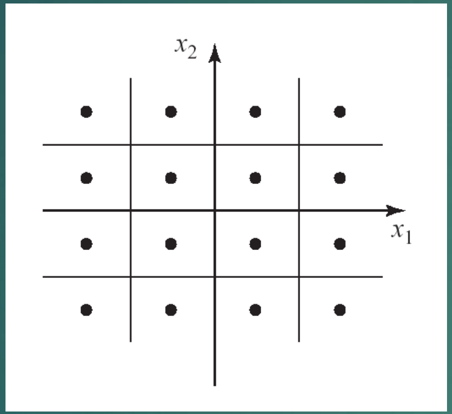




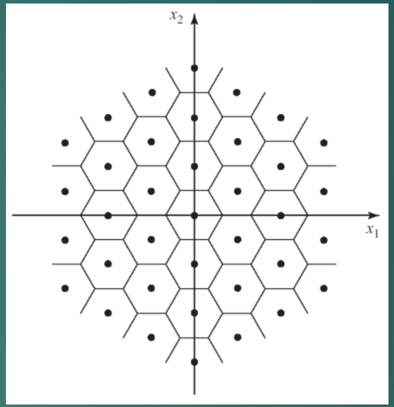
# Διανυσματική Κβάντιση

Δ5

- Διανυσματική κβάντιση




K=16




K=37

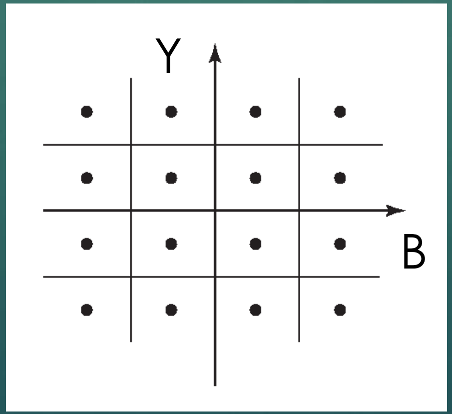
- Ρυθμός κώδικα

$$R = \frac{logK}{n} \frac{bits}{\text{Εξοδο } πηγης}$$

# Παράδειγμα 5.2



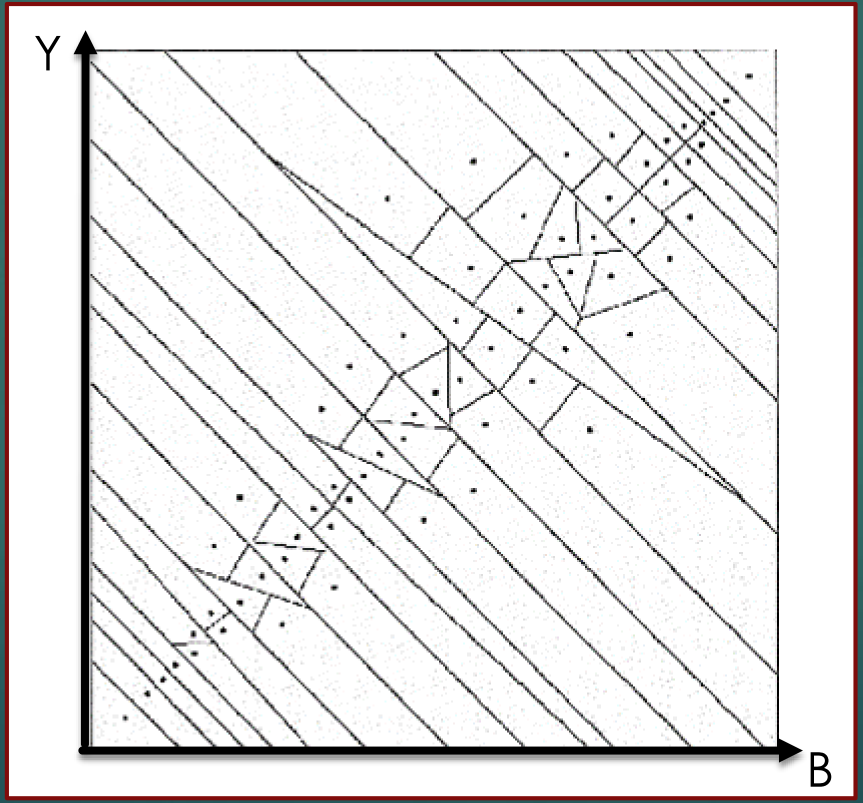
- Έστω πηγή η οποία παράγει ζευγάρια αριθμών (π.χ. ύψος, βάρος): $\Upsilon \in [160,200]$ και $\mathrm{B} \in [60,130]$ οι οποίοι ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή. Για την κωδικοποίηση χρησιμοποιούνται 4 bit ανά ζευγάρι.
- Πόσα επίπεδα θα μπορούσαν να οριστούν για κάθε μία μεταβλητή του ζευγαριού;
  - Αναθέτωντας 2 bit ανα μεταβλητή το διάστημα στο οποίο ανήκει μπορεί να χωριστεί σε 4 επίπεδα
- Ποια η μορφή ενός ομοιόμορφου διανυσματικού κβαντιστή για το παραπάνω σύνολο δεδομένων;



# Παράδειγμα 5.2

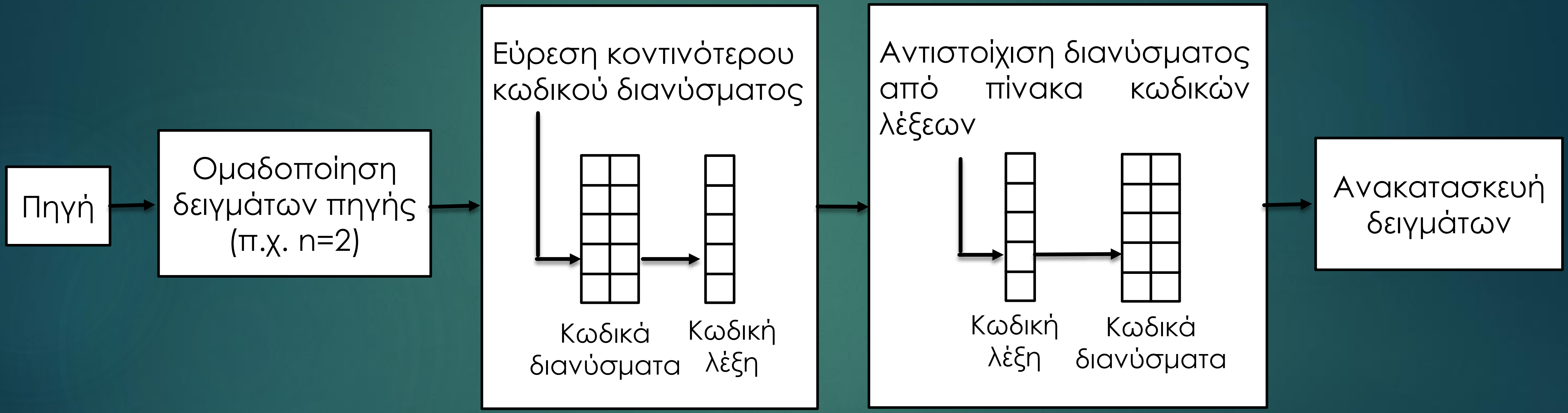
Δ5

- Επειδή τα ύψη και τα βάρη είναι συσχετισμένα μεγέθη κάποια ζευγάρια δεν θα παρατηρούνται , ή θα παρατηρούνται εξαιρετικά σπάνια π.χ. Y=210 cm και B=60 kg
  - Η τελική μορφή του κβαντιστή θα μπορούσε να είναι:



# Διανυσματική Κβάντιση





# Βέλτιστοι διανυσματικοί κβαντιστές

Δ5

- Ο βέλτιστος διανυσματικός κβαντιστής εξαρτάται από την επιλογή διάστασης n και πλήθους περιοχών K
- Μία περιοχή είναι το σύνολο των σημείων στο n-διάστατο χώρο που βρίσκονται πιο κοντά στη στάθμη κβάντισης $\hat{\boldsymbol{x}}_j$ για κάθε $j \neq i$

$$\mathscr{R}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\| < \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_j\|,\ \forall j \neq i\}$$

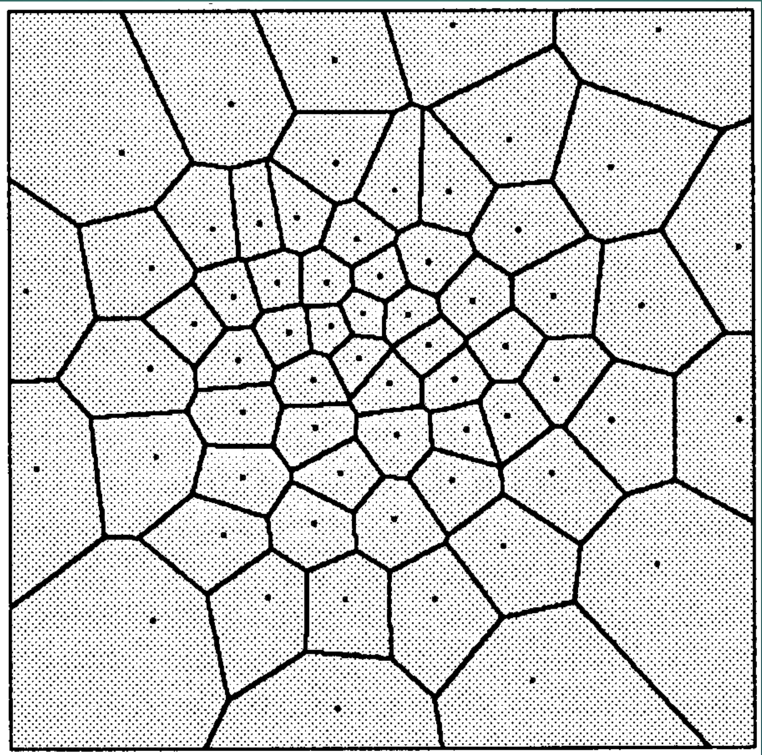
- Μία στάθμη κβάντισης είναι το κέντρο μάζας της περιοχής

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{P(\mathbf{X} \in \mathscr{R}_i)} \int\int \dots \int_{\mathscr{R}_i} \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

# Βέλτιστοι διανυσματικοί κβαντιστές

Δ5

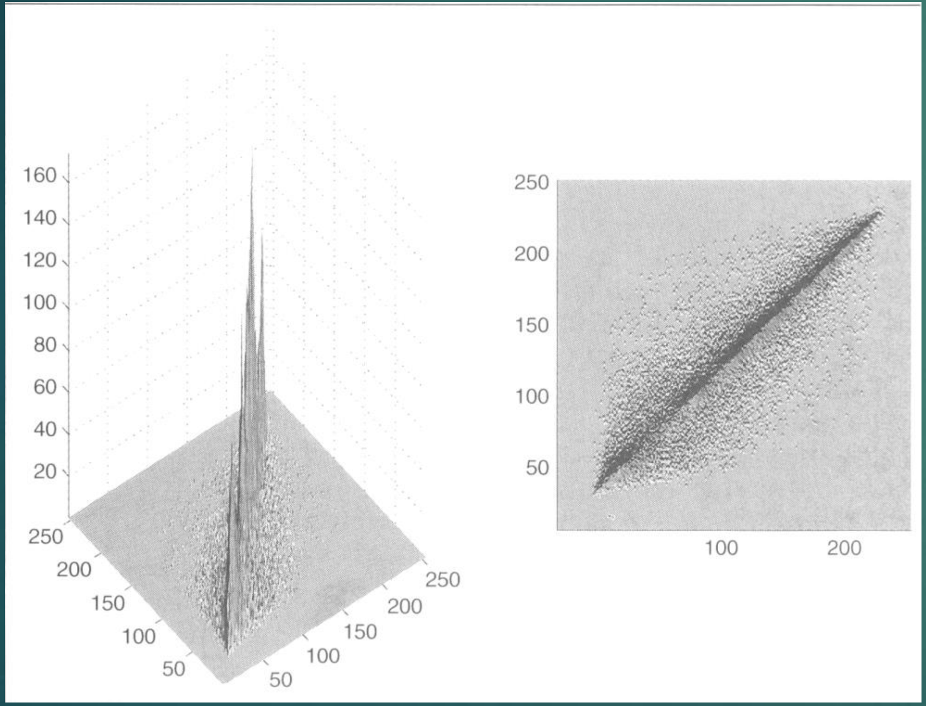
- Κανονική κατανομή με n=2, K=64, R=3bit/έξοδο πηγής

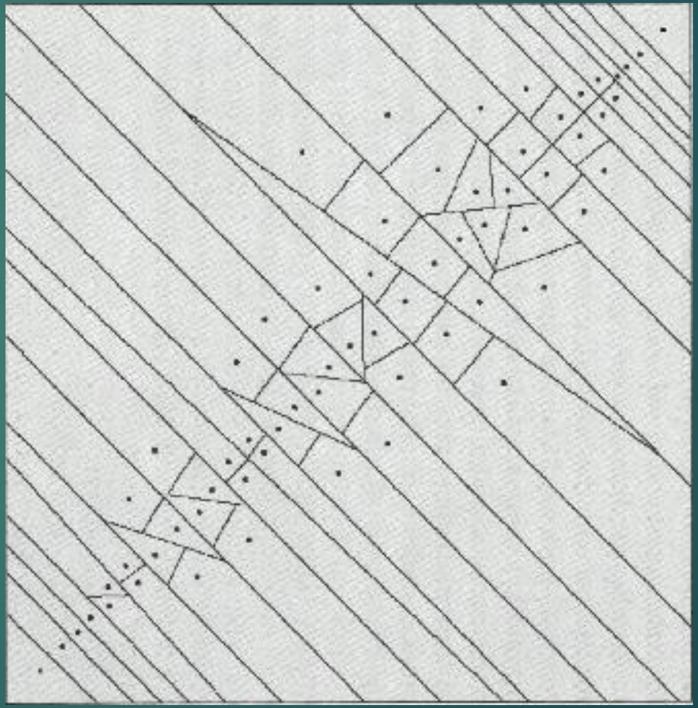


# Βέλτιστοι διανυσματικοί κβαντιστές

Δ5

- Λαμβάνεται υπόψη ο ν-διάστατος συσχετισμός των δεδομένων

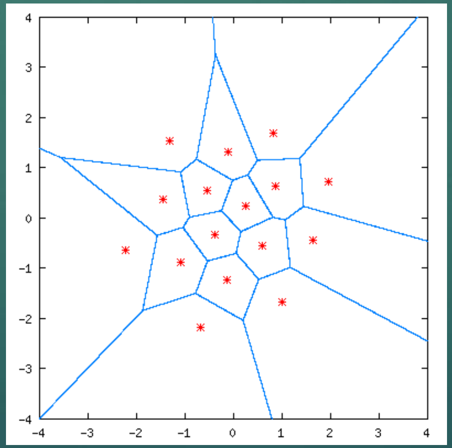


# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

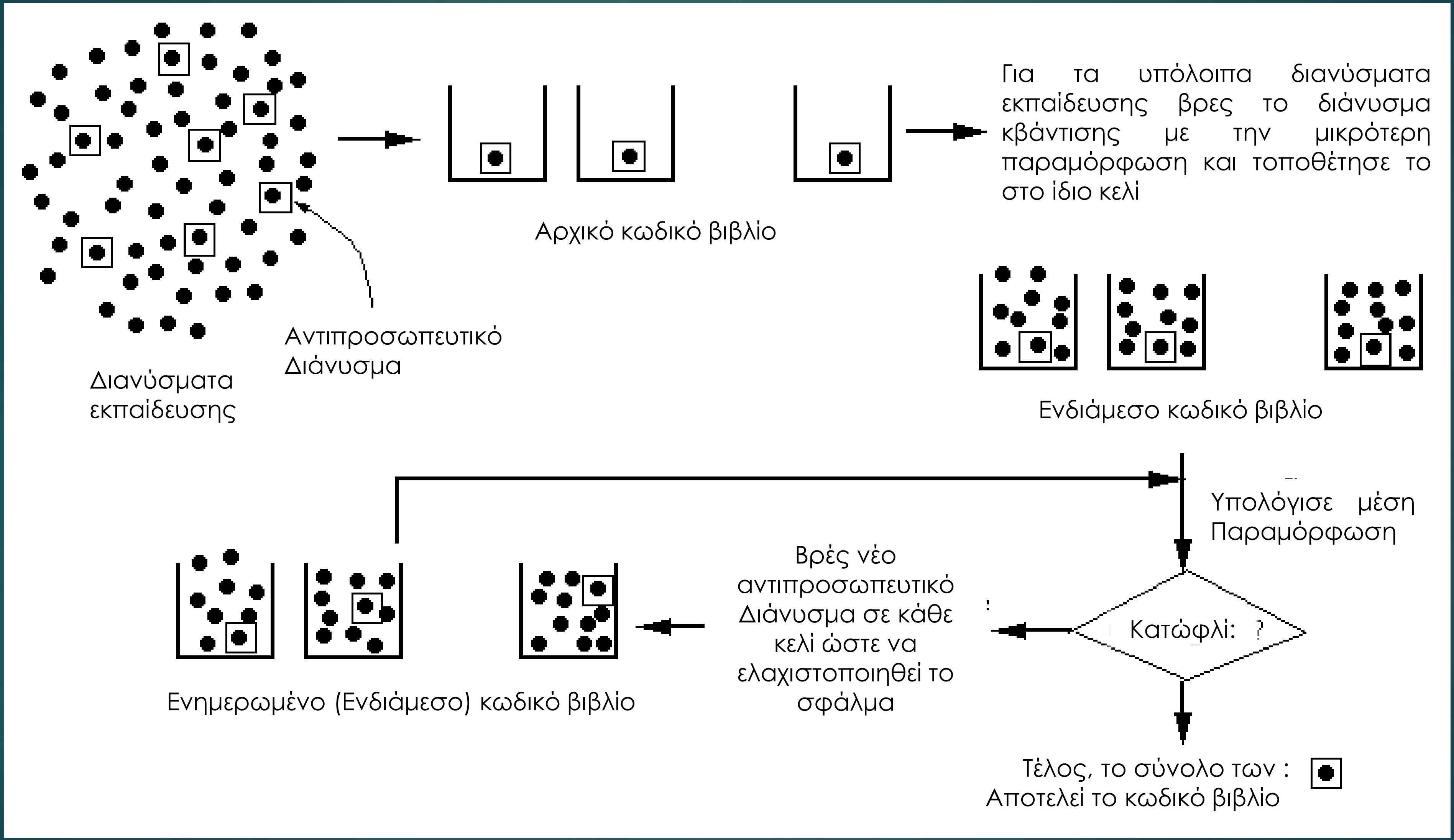
Δ5

- Αποτελεί γενίκευση του Αλγορίθμου Lloyd για τους βέλτιστους βαθμωτούς κβαντιστές
- Είναι μία μέθοδος εύρεσης ενός κωδικού βιβλίου και μίας διαμέρισης του χωρου στον οποίο ορίζονται τα διανύσματα μιας πηγής η οποία εξασφαλίζει την ελάχιστη μέση  παραμόρφωση.



# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

Δ5



# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

Δ5

Ορισμοί

- Έστω ένα σύνολο από M διανύσματα εκπαίδευσης k-διαστάσεων μιας πηγής που ορίζουν το σύνολο $\mathrm{T} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_M}\}$.

- Έστω N<<M επιθυμητά επίπεδα (διανύσματα) κβάντισης ή κωδικές λέξεις $\boldsymbol{c_i}$ στον k-διαστάσεων χώρο τα οποία θα δίνονται από την

$$\boldsymbol{c_i} = \frac{\sum_{\boldsymbol{x_m} \in \boldsymbol{S_i}} x_m}{\sum_{\boldsymbol{x_m} \in \boldsymbol{S_i}} 1}$$

και ορίζουν το σύνολο $C = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_N}\}$ .

# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

Δ5

Ορισμοί

- Έστω μία περιοχή $\boldsymbol{S_i} = \{\boldsymbol{x}: \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c_i}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c_{i'}}\|^2, \forall\, i' = 1,2, \dots, N\}$ γύρω από το διανύσμα κβάντισης $\boldsymbol{c_i}$ ώστε τα διανύσματα της πηγής $\mathbf{x}$ που ανήκουν σε αυτή την περιοχή κωδικοποιούνται στο διάνυσμα κβάντισης $\boldsymbol{c_i}$.

  Ορίζεται το σύνολο των περιοχών ως $P = \{\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \dots, \boldsymbol{S_N}\}$.

- Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του κβαντιστή θα είναι

$$D = \frac{1}{Mk} \sum_{m=1}^{M} \|\boldsymbol{x_m} - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x_m})\|^2, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x_m}) = \boldsymbol{c_i} \; \forall \boldsymbol{x_m} \in \boldsymbol{S_i}$$

- Έστω $\epsilon$>0 αυθαίρετα μικρό

# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

Δ5

- Για τον ορισμό των αρχικών διανυσμάτων κβάντισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί πληθώρα μεθόδων.
  - Τυχαία επιλογή από τα διανύσματα του δείγματος εκπαίδευσης
  - Μέθοδος διαίρεσης με διαταραχή των διανυσμάτων κβάντισης
  - Εκπαίδευση με διαφορετικά υποσύνολα εκπαίδευσης
  - K-NN

# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

Δ5

Υπολογισμός αρχικών διανυσμάτων με τη μέθοδο διαίρεσης

- 1. Για N=1

$$\boldsymbol{c}_1^* = \frac{1}{M}\sum_{\boldsymbol{m}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}}$$

οπότε

$$D^* = \frac{1}{Mk}\sum_{m=1}^{M} \|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}})\|^2$$

- 2. Για i=1,2,…N

$$c_i^{(0)} = (1+\epsilon)\cdot c_i^*$$
$$c_{N+i}^{(0)} = (1-\epsilon)\cdot c_i^*$$

- 3. $N = 2 \cdot N$

# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

Δ5

- 4. i=0 , $D^{(0)} = D^*$

  i. Για m=1,2,…M $\lambda=\min_m \left\| x_m - c_n^{(i)} \right\|^2$ για κάθε n=1,2,…N

  ii. έστω ότι ο δείκτης $n^*$ αντιστοιχεί στο λ. Τότε $Q(x_m) = c_{n^*}^{(i)}$

  iii. Για n=1,2,…,N, ενημέρωσε τις στάθμες κβάντισης

$$\boldsymbol{c_n^{(i+1)}} = \frac{\sum_{\boldsymbol{Q(x_m)=c_n^{(i)}}} x_m}{\sum_{\boldsymbol{Q(x_m)=c_n^{(i)}}} 1}$$

i=i+1

# Αλγόριθμος Linde-Buzo-Gray (LBG)

Δ5

- Υπολόγισε την παραμόρφωση

$$D^{(\iota)} = \frac{1}{Mk}\sum_{m=1}^{M}\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_m)\|^2$$

- Όσο $\frac{\mathrm{D}^{(i-1)} - D^{(i)}}{\mathrm{D}^{(i-1)}} > \epsilon$ επέστρεψε στο βήμα 4i
- Θέσε $D^* = D^{(0)}$
- Για n=1,2,…,N θέσε $c_n^* = c_n^{(i)}$
- Επέστρεψε στο βήμα 3 έως ότου επιτευχθεί ο απαιτούμενος αριθμός διανυσμάτων κβάντισης