

## Κεφάλαιο 2

# Μιγαδικοί Αριθμοί

Συμπληρωματικά, διαβάστε όλο το Κεφάλαιο 2 των Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης της 3ης Λυκείου

Τα στοιχεία του συνόλου των μιγαδικών αριθμών είναι εκφράσεις της μορφής

$$a + ib$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$ , και  $i$  είναι ένα σύμβολο,

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Με προφανή τρόπο μπορούμε να ταυτίσουμε τα στοιχεία του  $\mathbb{C}$  με διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών,

$$a + ib \longleftrightarrow (a, b)$$

και μέσω αυτών με τα σημεία ενός επιπέδου στο οποίο έχει επιλεγεί ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς,

$$a + ib \longleftrightarrow a \vec{i} + b \vec{j}.$$

Εάν  $z = a + ib$ , τότε  $a = \operatorname{Re} z$  ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του  $z$ , ενώ  $b = \operatorname{Im} z$  ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του  $z$ . Προσέξτε ότι  $\operatorname{Re} z$  και  $\operatorname{Im} z$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Το υποσύνολο  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$  το ταυτίζουμε με τους πραγματικούς αριθμούς.

**Μέτρο** του μιγαδικού αριθμού  $z = a + ib$  είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Στο  $\mathbb{C}$  ορίζονται πρόσθεση και πολλαπλασιασμός έτσι ώστε να συμφωνούν με τις πράξεις στο  $\mathbb{R}$  όταν περιοριστούν στο σύνολο  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$  και να ικανοποιείται

η σχέση  $i \cdot i = -1$ .

$$\text{πρόσθεση} : (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$\text{πολλαπλασιασμός} : (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Ο μιγαδικός αριθμός  $a - ib$  ονομάζεται **συζυγής** του  $z = a + ib$ , και συμβολίζεται  $\bar{z}$ . Παρατηρούμε ότι

$$z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z$$

$$z - \bar{z} = i2b = i2\operatorname{Im} z$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός έχει αντίστροφο. Παρατηρούμε ότι αφού  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  είναι πραγματικός αριθμός,  $z \cdot \left(\frac{1}{|z|^2} \bar{z}\right) = 1$ , και συνεπώς

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \quad \text{ή} \quad (a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Από εδώ έχουμε και τον κανόνα για τη διαίρεση

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} \quad \text{ή} \quad \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$$

Εύκολα ελέγχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

Σημειώνουμε τις ακόλουθες ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού

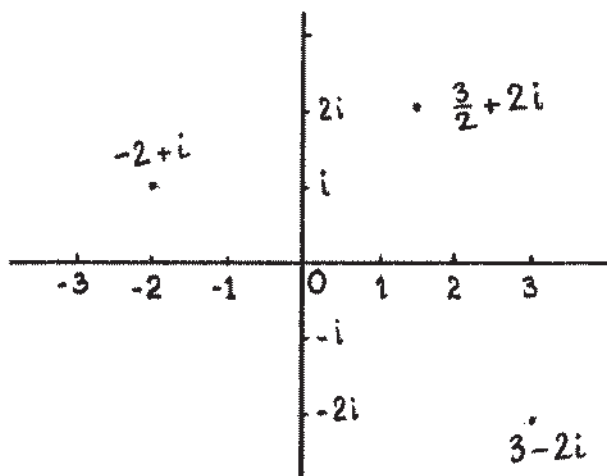
$$|z| = |\bar{z}| = |-z|$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Αναφέραμε τη δυνατότητα ταύτισης του συνόλου των μιγαδικών αριθμών,  $\mathbb{C}$ , με το επίπεδο, εφοδιασμένο με ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς. Μέσω αυτής της ταύτισης θα μιλάμε για το **μιγαδικό επίπεδο**. Στο μιγαδικό επίπεδο έχουμε τον **πραγματικό άξονα**, τον οποίο ταυτίζουμε με το  $\mathbb{R}$ , και τον **φανταστικό άξονα**, τον οποίο συμβολίζουμε  $\mathbb{R}i$ .

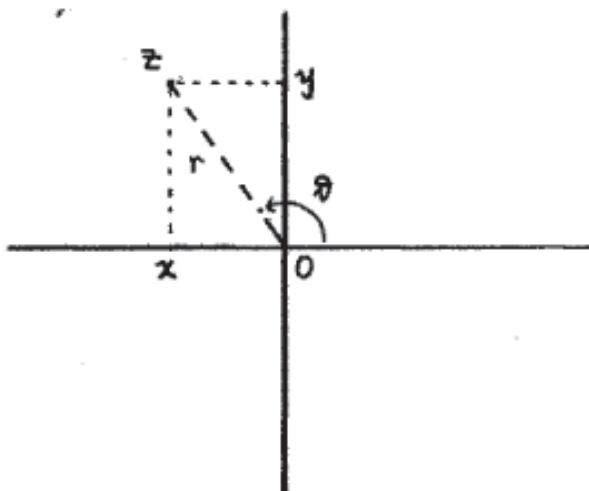
Θα αξιοποιήσουμε αυτή τη δυνατότητα, χρησιμοποιώντας και γεωμετρικές έννοιες στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών. Ήδη έχουμε δει την έννοια του μέτρου μιγαδικού αριθμού, το οποίο προφανώς είναι ίσο με την απόσταση από το 0 στο μιγαδικό επίπεδο. Μία άλλη παρατήρηση είναι ότι ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών αποτελούνται από σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



Σχήμα 2.1: Σημεία του μιγαδικού επιπέδου

## Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε ένα μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$ , στο επίπεδο, και υποθέτουμε ότι η ημιευθεία από το 0 μέσω του  $z$ , σχηματίζει γωνία  $\vartheta$  με τη θετική ημιευθεία του πραγματικού άξονα, όπου  $0 \leq \vartheta < 2\pi$ .



Σχήμα 2.2: Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Η γωνία  $\vartheta$  συνδέεται με τα  $x = \operatorname{Re} z$  και  $y = \operatorname{Im} z$  μέσω των σχέσεων

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.1)$$

Εάν  $z \neq 0$ , η μοναδική τιμή  $\vartheta$  η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις 2.1 και βρίσκεται στο διάστημα  $0 \leq \vartheta < 2\pi$  ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού αριθμού  $z$ , και συμβολίζεται με  $\text{Arg}(z)$ . Κάθε άλλη τιμή  $\vartheta$  που ικανοποιεί τις εξισώσεις 2.1 ονομάζεται **όρισμα** του  $z$  και συμβολίζεται  $\arg(z)$ . Είναι φανερό ότι δύο ορίσματα του  $z$  διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του  $2\pi$ . Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\arg(z) \equiv \arg(w)$$

για να δηλώσουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί  $\arg(z)$  και  $\arg(w)$  διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .

Εάν γνωρίζουμε ένα όρισμα του  $z$ , και την απόσταση  $r$  του  $z$  από το 0, μπορούμε να προσδιορίσουμε το  $z$ . Το πραγματικό μέρος του  $z$  είναι  $x = r \cos \vartheta$ , ενώ το φανταστικό μέρος του  $z$  είναι  $y = r \sin \vartheta$ . Συνεπώς

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r \cos \vartheta + ir \sin \vartheta \\ &= r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ .

**Παράδειγμα 2.1** Εάν  $\vartheta = \frac{11}{6}\pi$  και  $r = 2$ , τότε

$$\begin{aligned} z &= 2 \left( \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) \\ &= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left( -\frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

Αυτή η **τριγωνομετρική μορφή** έκφρασης των μιγαδικών αριθμών μας επιτρέπει να περιγράψουμε τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών γεωμετρικά.

Θεωρούμε τους αριθμούς  $z_1 = r_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$  και  $z_2 = r_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$ , και υπολογίζουμε το γινόμενο

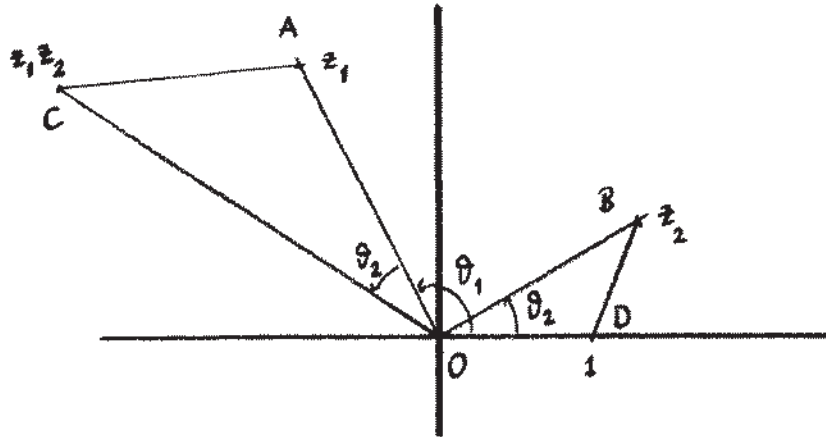
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2)] \\ &= r_1 r_2 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)). \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το άθροισμα των ορισμάτων των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  είναι ένα όρισμα του γινομένου τους

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2, \quad (2.2)$$

και το μέτρο του γινομένου των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  είναι το γινόμενο των μέτρων τους

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|. \quad (2.3)$$



Σχήμα 2.3: Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών

Στο Σχήμα 2.3, τα σημεία  $A, B, C, D$  αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2, z_1 z_2$  και  $1$  αντίστοιχα. Από τις σχέσεις 2.2 και 2.3 συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα  $ODB$  και  $OAC$  είναι όμοια. Ο πολλαπλασιασμός με το  $z_2$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι μία **ομοιοθεσία**, ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο  $z_1$  του επιπέδου σε ένα σημείο  $z_3$  τέτοιο ώστε το τρίγωνο που σχηματίζουν τα  $z_1$  και  $z_3$  με το  $0$ , να είναι όμοιο με το τρίγωνο που σχηματίζουν τα  $1$  και  $z_2$  με το  $0$ . Με αυτή την έννοια, το  $z_1 z_2$  είναι προς το  $z_1$ , όπως το  $z_2$  είναι προς το  $1$ ,

$$z_1 z_2 : z_1 = z_2 : 1.$$

όπου ως αναλογία δεν εννοούμε απλώς την ισότητα του λόγου των μηκών (όπως στην ευθεία των πραγματικών αριθμών) αλλά και την ισότητα των αντίστοιχων γωνιών.

Με όρους διανυσμάτων, ο πολλαπλασιασμός με το  $z_2$ , στρέφει το διάνυσμα θέσης του  $z_1$  κατά γωνία  $\text{Arg}(z_2)$ , και το πολλαπλασιάζει με τον αριθμό  $|z_2|$ .

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός με  $z$  τέτοιο ώστε  $|z| = 1$ , είναι απλώς στροφή του μιγαδικού επιπέδου κατά γωνία  $\text{Arg}(z)$ . Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός με τη φανταστική μονάδα  $i$ , είναι περιστροφή κατά  $\pi/2$ . Από αυτή την άποψη αποκτά γεωμετρικό νόημα η ιδιότητα  $i^2 = -1$  : η επανάληψη της περιστροφής κατά  $\pi/2$  δίδει περιστροφή κατά γωνία  $\pi$ , η οποία απεικονίζει κάθε σημείο στο αντίθετο του :

$$i^2 z = -z.$$

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού  $z \neq 0$ , υπολογίζεται εύκολα εάν ο  $z$  είναι σε τριγωνομετρική μορφή.

Έστω  $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ , και υποθέτουμε ότι ο αντίστροφος έχει τριγωνομετρική μορφή  $z^{-1} = t(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= z w \\ &= r t (\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)) \end{aligned}$$

αλλά ο μιγαδικός αριθμός 1 έχει μέτρο 1 και όρισμα 0. Συνεπώς  $rt = 1$  και  $\vartheta + \varphi \equiv 0$ , και καταλήγουμε

$$z^{-1} = \frac{1}{r} (\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta))$$

δηλαδή  $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ , και  $-\vartheta$  είναι ένα όρισμα του  $z^{-1}$ ,  $\arg z^{-1} \equiv -\vartheta$ . Ειδικότερα, για το πρωτεύον όρισμα του  $z^{-1}$  έχουμε

$$\operatorname{Arg} z^{-1} = \begin{cases} 2\pi - \operatorname{Arg} z & \text{εάν } \operatorname{Arg} z \neq 0 \\ 0 & \text{εάν } \operatorname{Arg} z = 0 \end{cases}$$

Η τριγωνομετρική μορφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών. Θεωρούμε τον αριθμό  $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  και τις δυνάμεις του

$$\begin{aligned} z^2 &= r r (\cos(\vartheta + \vartheta) + i \sin(\vartheta + \vartheta)) \\ &= r^2 (\cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= r^2 r (\cos(2\vartheta + \vartheta) + i \sin(2\vartheta + \vartheta)) \\ &= r^3 (\cos(3\vartheta) + i \sin(3\vartheta)) \end{aligned}$$

και, όπως δείχνουμε εύκολα με επαγωγή στο  $n$ ,

$$z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) .$$

Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται Θεώρημα του De Moivre. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα στο  $z^{-1}$ , βλέπουμε ότι μπορεί να επεκταθεί και σε αρνητικούς ακέραιους. Εάν  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$z^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\vartheta) + i \sin(-n\vartheta)) .$$

**Θεώρημα 2.1** (Θεώρημα De Moivre) Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$ , και κάθε ακέραιο  $n \in \mathbb{Z}$ , εάν  $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ , τότε

$$z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$$

**Άσκηση 2.1** Εάν  $z$  βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο  $S^1$ , τότε

$$z^{-1} = \bar{z} .$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κλασματικές δυνάμεις.

## Ρίζες της μονάδας

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , ο αριθμός 1 έχει μία μοναδική  $n$ -οστή ρίζα εάν  $n$  είναι περιττός, ενώ έχει δύο  $n$ -οστές ρίζες, 1 και  $-1$ , εάν ο  $n$  είναι άρτιος. Θα δούμε ότι στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ο αριθμός 1 έχει ακριβώς  $n$   $n$ -οστές ρίζες για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ .

Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^n = 1.$$

Γράφουμε το  $z$  σε τριγωνομετρική μορφή,  $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  και έχουμε

$$z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = 1,$$

συνεπώς  $r^n = 1$ ,  $\cos(n\vartheta) = 1$  και  $\sin(n\vartheta) = 0$ . Συμπεραίνουμε ότι κάθε  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας γράφεται στη μορφή  $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ , όπου  $\vartheta$  ικανοποιεί τις σχέσεις  $\cos(n\vartheta) = 1$  και  $\sin(n\vartheta) = 0$ . Από τις σχέσεις αυτές έχουμε ότι  $n\vartheta = 2k\pi$  για  $k \in \mathbb{Z}$ , και συνεπώς ότι

$$\vartheta = \frac{k}{n} 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Απομένει να δούμε ποιές από αυτές τις τιμές του ορίσματος δίδουν διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς. Εάν συμβολίσουμε  $\vartheta_k = \frac{2k\pi}{n}$ , έχουμε

$$\vartheta_{k+n} = \vartheta_k + 2\pi$$

και συνεπώς  $\cos \vartheta_{k+n} + i \sin \vartheta_{k+n} = \cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k$ . Για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , έχουμε τις τιμές

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \vartheta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad \dots, \quad \vartheta_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

οι οποίες δίδουν όλες διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς.

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ακριβώς  $n$   $n$ -οστες ρίζες της μονάδας στο μιγαδικό επίπεδο, οι αριθμοί

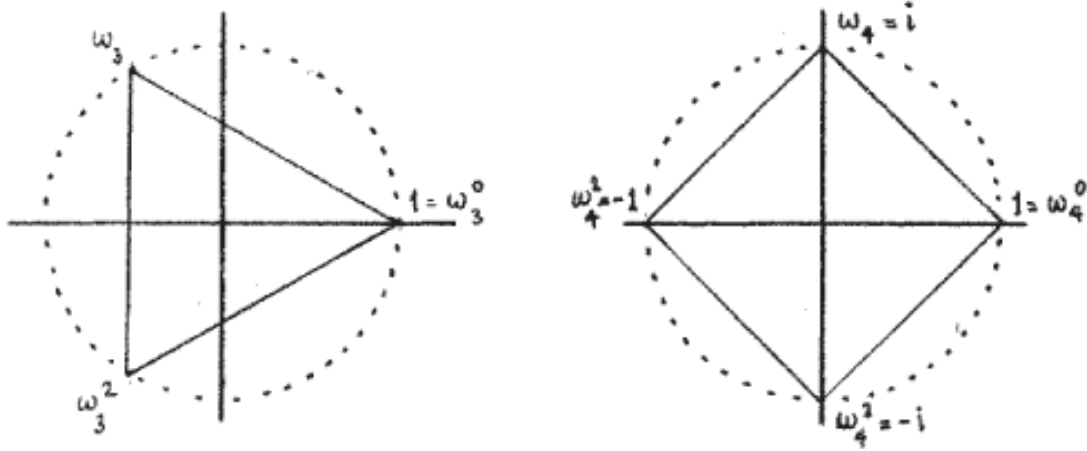
$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Εάν τώρα ορίσουμε  $w_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , έχουμε, για  $k = 0, \dots, n-1$

$$w_n^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Πού βρίσκονται αυτοί οι αριθμοί στο μιγαδικό επίπεδο; Για  $k = 0$  έχουμε το 1. Όλες οι  $n$ -οστές ρίζες της μονάδας βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , και η γωνία που σχηματίζεται από το 0 μεταξύ διαφορετικών ριζών είναι πολλαπλάσιο του  $\frac{2\pi}{n}$ . Συμπεραίνουμε ότι οι  $n$ -οστές ρίζες βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου, με  $n$  κορυφές, μία εκ των οποίων βρίσκεται στο 1.



Σχήμα 2.4: Τρίτες και τέταρτες ρίζες της μονάδας

## Ρίζες του $a \in \mathbb{C}$

Εάν  $a = 0$ , τότε για κάθε  $n$ , η μοναδική  $n$ -οστή ρίζα του  $a$  είναι 0:

$$z^n = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Εάν  $a \neq 0$ , υποθέτουμε ότι  $a$  γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή ως  $a = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Ο πραγματικός αριθμός  $s$  είναι θετικός, και συμβολίζουμε  $s^{1/n}$  τη θετική πραγματική  $n$ -οστή ρίζα του  $s$ . Θέτουμε  $z_0 = s^{1/n} (\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})$ , και παρατηρούμε ότι  $z_0^n = a$ , δηλαδή  $z_0$  είναι μία από τις  $n$ -οστές ρίζες του  $a$ .

Εάν  $z_k$  είναι μια άλλη  $n$ -οστή ρίζα του  $a$ , έχουμε  $\left(\frac{z_k}{z_0}\right)^n = 1$ , και συνεπώς  $\frac{z_k}{z_0}$  είναι μία  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας. Καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 2.2** Κάθε μιγαδικός αριθμός  $a \neq 0$ , έχει  $n$  διαφορετικές μιγαδικές  $n$ -οστές ρίζες, και εάν  $a = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  είναι μία τριγωνομετρική μορφή του  $a$ , οι  $n$ -οστές ρίζες είναι

$$z_k = s^{1/n} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

για  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

## Εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

Θεωρούμε τους αριθμούς  $t + i\vartheta$  και  $s + i\varphi$ , καθώς και τους  $e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  και  $e^s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Παρατηρούμε ότι

$$e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \cdot e^s(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{t+s}(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi))$$



και

$$[e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = e^{nt}(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) ,$$

δηλαδή ότι η αντιστοίχιση

$$t + i\vartheta \mapsto e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

έχει τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, να απεικονίζει αθροίσματα σε γινόμενα και ακέραια πολλαπλάσια σε δυνάμεις.

Με βάση αυτή την παρατήρηση θα ορίσουμε τη **μιγαδική εκθετική συνάρτηση**

$$e^{t+i\vartheta} = e^t(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) ,$$

ή

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)) .$$

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί σε **εκθετική μορφή**

$$z = e^{\log |z| + i \arg z} .$$

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση έχει τις ιδιότητες

$$\alpha'. \quad e^z e^w = e^{z+w}$$

$$\beta'. \quad (e^z)^n = e^{nz}$$

$$\gamma'. \quad (e^z)^{-1} = e^{-z}$$

$$\delta'. \quad e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$$

$$\varepsilon'. \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \text{ και } \arg(e^z) \equiv \operatorname{Im} z$$

**Άσκηση 2.2** Επαληθεύσατε τις παραπάνω ιδιότητες της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

## Εφαρμογές

**Παράδειγμα 2.2** Αναπτύγματα δυνάμεων των  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$ .

Εάν  $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ , τότε  $\frac{1}{z} = \cos \vartheta - i \sin \vartheta$  και

$$\begin{aligned} 2 \cos \vartheta &= z + \frac{1}{z} \\ 2i \sin \vartheta &= z - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Από τους τύπους του De Moivre,  $z^n = \cos n\vartheta + i \sin n\vartheta$  και  $z^{-n} = \cos n\vartheta - i \sin n\vartheta$ .  
Άρα

$$2 \cos n\vartheta = z^n + \frac{1}{z^n} \quad (2.4)$$

$$2i \sin n\vartheta = z^n - \frac{1}{z^n} \quad (2.5)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την 2.4 για να εκφράσουμε το  $\cos^6 \vartheta$  σε πολλαπλάσια της  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} 2^6 \cos^6 \vartheta &= \left( z + \frac{1}{z} \right)^6 \\ &= z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15\frac{1}{z^2} + 6\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} \\ &= \left( z^6 + \frac{1}{z^6} \right) + 6 \left( z^4 + \frac{1}{z^4} \right) + 15 \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 20 \\ &= 2 \cos 6\vartheta + 12 \cos 4\vartheta + 30 \cos 2\vartheta + 20 \end{aligned}$$

και καταλήγουμε

$$\cos^6 \vartheta = \frac{1}{32} (\cos 6\vartheta + 6 \cos 4\vartheta + 15 \cos 2\vartheta + 10)$$

Ανάλογα υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} (2i)^5 \sin^5 \vartheta &= \left( z - \frac{1}{z} \right)^5 \\ &= \left( z^5 - \frac{1}{z^5} \right) - 5 \left( z^3 - \frac{1}{z^3} \right) + 10 \left( z - \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

και από την 2.5 έχουμε

$$2^5 \sin^5 \vartheta = 2(\sin 5\vartheta - 5 \sin 3\vartheta + 10 \sin \vartheta)$$

και

$$\sin^5 \vartheta = \frac{1}{16} (\sin 5\vartheta - 5 \sin 3\vartheta + 10 \sin \vartheta).$$

### Παράδειγμα 2.3 Αναπτύγματα των $\cos n\vartheta$ , $\sin n\vartheta$ σε δυνάμεις.

Από την ταυτότητα

$$\begin{aligned} (\cos 6\vartheta + i \sin 6\vartheta) &= (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^6 \\ &= \cos^6 \vartheta + 6i \cos^5 \vartheta \sin \vartheta + 15i^2 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 20i^3 \cos^3 \vartheta \sin^3 \vartheta + 15i^4 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta \\ &\quad + 6i^5 \cos \vartheta \sin^5 \vartheta + i^6 \sin^6 \vartheta, \end{aligned}$$

χωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, έχουμε

$$\cos 6\vartheta = \cos^6 \vartheta - 15 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta + 15 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta - \sin^6 \vartheta$$

και

$$\sin 6\vartheta = 6 \cos^5 \vartheta \sin \vartheta - 20 \cos^3 \vartheta \sin^3 \vartheta + 6 \cos \vartheta \sin^5 \vartheta.$$

**Παράδειγμα 2.4** Οι διωνυμικοί συντελεστές  $\binom{n}{k}$ , για  $k = 0, 1, \dots, n$  ορίζονται ως οι συντελεστές του αναπτύγματος του διωνύμου

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

και μπορούμε να τους υπολογίσουμε από τον τύπο

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{1\cdot 2\cdots k}.$$

Προσέξτε ότι  $0! = 1$ , και συνεπώς  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

Θεωρούμε τα αθροίσματα

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos k\vartheta \\ &= 1 + n \cos \vartheta + \frac{n(n-1)}{2} \cos 2\vartheta + \dots + \cos n\vartheta \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin k\vartheta \\ &= n \sin \vartheta + \frac{n(n-1)}{2} \sin 2\vartheta + \dots + \sin n\vartheta. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι  $C$  και  $S$  είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, του αναπτύγματος του  $(1 + e^{i\vartheta})^n$ :

$$\begin{aligned} (1 + e^{i\vartheta})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\vartheta} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos k\vartheta + i \sin k\vartheta) \\ &= C + iS. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

έχουμε

$$\begin{aligned} (1 + e^{i\vartheta})^n &= (1 + \cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n \\ &= \left( 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + 2i \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^n \\ &= \left( 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^n \left( \cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right)^n \\ &= \left( 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^n \left( \cos \frac{n\vartheta}{2} + i \sin \frac{n\vartheta}{2} \right). \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$C = \left( 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^n \cos \frac{n\vartheta}{2}$$

και

$$S = \left( 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^n \sin \frac{n\vartheta}{2}.$$

**Παράδειγμα 2.5** Εξετάζουμε το άθροισμα των  $n$ -οστών ριζών της μονάδας,

$$Q = 1 + w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} w_n Q &= w_n(1 + w_n + \dots + w_n^{n-1}) \\ &= w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1} + w_n^n \\ &= Q \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι  $(w_n - 1)Q = 0$ , και εφ' όσον  $w_n \neq 1$ , έχουμε

$$1 + w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1} = 0.$$

## Ευθείες και κύκλοι στο μιγαδικό επίπεδο

Η ευθεία που είναι παράλληλη στο διάνυσμα με συντεταγμένες  $(a, b)$  και διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες  $(c, d)$  αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες της μορφής  $(x, y) = (c, d) + t(a, b)$  για  $t \in \mathbb{R}$ . Από αυτή την σχέση παίρνουμε, με

απαλοιφή του  $t$ , την εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες  $(x, y)$  των σημείων της ευθείας:

$$b(x - c) = a(y - d) \quad \text{ή} \quad bx - ay = cb - da.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση της ευθείας χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς. Εάν  $\alpha = a + ib$  και  $\gamma = c + id$ , το γενικό σημείο  $z = x + iy$  της ευθείας που διέρχεται από το  $\gamma$  και είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το  $\alpha$  ικανοποιεί τη σχέση  $z = \gamma + t\alpha$  για  $t \in \mathbb{R}$ . Για να απαλείψουμε το  $t$  από τις σχέσεις  $z = \gamma + t\alpha$  και  $\bar{z} = \bar{\gamma} + t\bar{\alpha}$  πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με  $\bar{\alpha}$  και τη δεύτερη με  $\alpha$  και παίρνουμε

$$\bar{\alpha}z - \bar{\alpha}\gamma = t\bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\gamma}.$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση που ικανοποιούν τα σημεία  $z$  της ευθείας,

$$\bar{\alpha}(z - \gamma) - \alpha(\bar{z} - \bar{\gamma}) = 0. \quad (2.6)$$

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο με συντεταγμένες  $(c, d)$  και ακτίνα  $r > 0$  αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες  $(x, y)$  που απέχουν  $r$  από το σημείο  $(c, d)$ , δηλαδή που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2.$$

Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο  $\kappa = c + id$  και ακτίνα  $r > 0$  αποτελείται από τα σημεία  $z = x + iy$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $|z - \kappa| = r$ , δηλαδή

$$(z - \kappa)(\bar{z} - \bar{\kappa}) = r^2. \quad (2.7)$$

## Οι απεικονίσεις αντιστροφής στο μιγαδικό επίπεδο

Στην πραγματική ευθεία  $\mathbb{R}$  η απεικόνιση αντιστροφής  $t \mapsto 1/t$  διατηρεί σταθερά τα σημεία 1 και  $-1$  και απεικονίζει τα σημεία του διαστήματος  $(0, 1)$  στο διάστημα  $(1, \infty)$  και τα σημεία του διαστήματος  $(-1, 0)$  στο διάστημα  $(-\infty, -1)$ , και αντίστροφα τα σημεία του διαστήματος  $(1, \infty)$  στο διάστημα  $(0, 1)$  και τα σημεία του διαστήματος  $(-\infty, -1)$  στο διάστημα  $(-1, 0)$ . Η απεικόνιση αντιστροφής δεν ορίζεται στο 0.

Στο μιγαδικό επίπεδο θα θεωρήσουμε δύο απεικονίσεις αντιστροφής, την  $z \mapsto 1/z$ , την οποία θα ονομάσουμε **αναλυτική αντιστροφή**, και την  $z \mapsto 1/\bar{z}$ , την οποία θα ονομάσουμε **γεωμετρική αντιστροφή**. Και οι δύο αυτές απεικονίσεις ορίζονται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το 0.

Η αναλυτική αντιστροφή απεικονίζει το  $z = re^{i\vartheta} = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  στο  $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\vartheta} = r^{-1}(\cos \vartheta - i \sin \vartheta)$ , δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του  $z$ , και το όρισμα είναι το αντίθετο του ορίσματος του  $z$ .

Η γεωμετρική αντιστροφή απεικονίζει το  $z = re^{i\vartheta} = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  στο  $\bar{z}^{-1} = r^{-1}e^{-(-i\vartheta)} = r^{-1}(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ , δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του  $z$ , και το όρισμα είναι ίσο με το όρισμα του  $z$ . Η γεωμετρική αντιστροφή διατηρεί σταθερά τα σημεία στο μοναδιαίο κύκλο  $S^1$  με κέντρο στο 0, για τα οποία  $|z| = 1$  και στέλνει τα σημεία στο εσωτερικό του  $S^1$  σε σημεία στο εξωτερικό του  $S^1$ .

Θεωρούμε ένα κύκλο με κέντρο  $\kappa$  και ακτίνα  $r$ , του οποίου τα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση  $|z - \kappa| = r$ . Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εικόνα του κύκλου από την απεικόνιση  $f(z) = 1/z$ , δηλαδή το σύνολο

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{1}{z}, |z - \kappa| = r \right\} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{w} - \kappa \right| = r \right\}.$$

Από την εξίσωση του κύκλου έχουμε

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{w} - \kappa \right) \left( \frac{1}{\bar{w}} - \bar{\kappa} \right) &= r^2 \\ \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{\kappa}}{w} - \frac{\kappa}{\bar{w}} + \kappa\bar{\kappa} &= r^2 \\ \frac{1 - \bar{\kappa}\bar{w} - \kappa w}{w\bar{w}} &= r^2 - \kappa\bar{\kappa}. \end{aligned}$$

Εάν  $r^2 - \kappa\bar{\kappa} \neq 0$ , η εξίσωση γίνεται

$$w\bar{w} = \frac{r^2 - \kappa\bar{\kappa}}{(r^2 - \kappa\bar{\kappa})^2} - \frac{\bar{\kappa}\bar{w} + \kappa w}{r^2 - \kappa\bar{\kappa}}$$

$$\begin{aligned} w\bar{w} + \frac{\bar{\kappa}\bar{w}}{r^2 - \kappa\bar{\kappa}} + \frac{\kappa w}{r^2 - \kappa\bar{\kappa}} + \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(r^2 - \kappa\bar{\kappa})^2} &= \frac{r^2}{(r^2 - \kappa\bar{\kappa})^2} \\ \left( w - \frac{\bar{\kappa}}{\kappa\bar{\kappa} - r^2} \right) \left( \bar{w} - \frac{\kappa}{\kappa\bar{\kappa} - r^2} \right) &= \frac{r^2}{(\kappa\bar{\kappa} - r^2)^2} \\ \left| w - \frac{\bar{\kappa}}{\kappa\bar{\kappa} - r^2} \right| &= \frac{r}{|\kappa\bar{\kappa} - r^2|}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Δηλαδή το σημείο  $w$  βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο  $\frac{\bar{\kappa}}{\kappa\bar{\kappa} - r^2}$  και ακτίνα  $\frac{r}{|\kappa\bar{\kappa} - r^2|}$ .

Εάν  $r^2 - \kappa\bar{\kappa} = 0$ , η εξίσωση γίνεται

$$\kappa w + \bar{\kappa}\bar{w} = 1 \quad (2.9)$$

που είναι η εξίσωση μίας ευθείας.

Συνοψίζοντας, η αναλυτική αντιστροφή  $z \mapsto 1/z$  απεικονίζει τον κύκλο  $C$

- σε κύκλο, εάν  $0 \notin C$
- σε ευθεία, εάν  $0 \in C$ ,

και απεικονίζει την ευθεία  $\varepsilon$

- σε κύκλο, εάν  $0 \notin \varepsilon$
- σε ευθεία, εάν  $0 \in \varepsilon$ ,

**Άσκηση 2.3** Δείξτε ότι η ευθεία με εξίσωση (2.9) περνάει από το σημείο  $\frac{1}{2\kappa}$  και είναι κάθετη προς την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το  $\bar{\kappa}$ .