

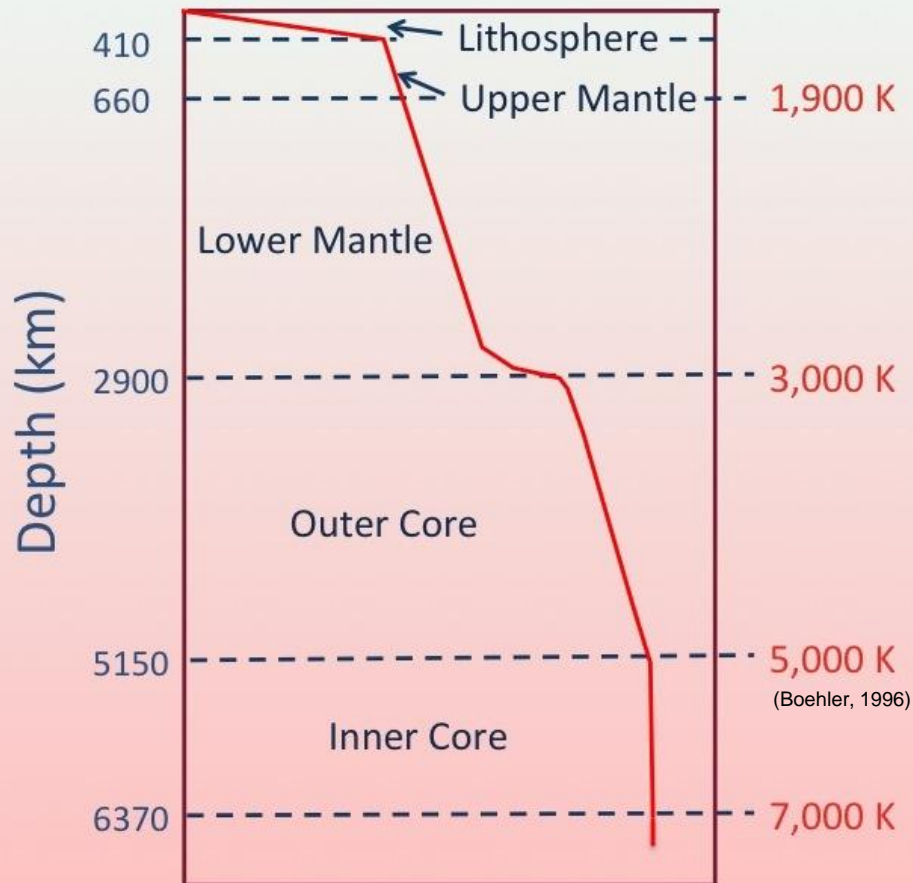


ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΦΥΣΙΚΗΣ – ΓΕΩΘΕΡΜΙΑΣ

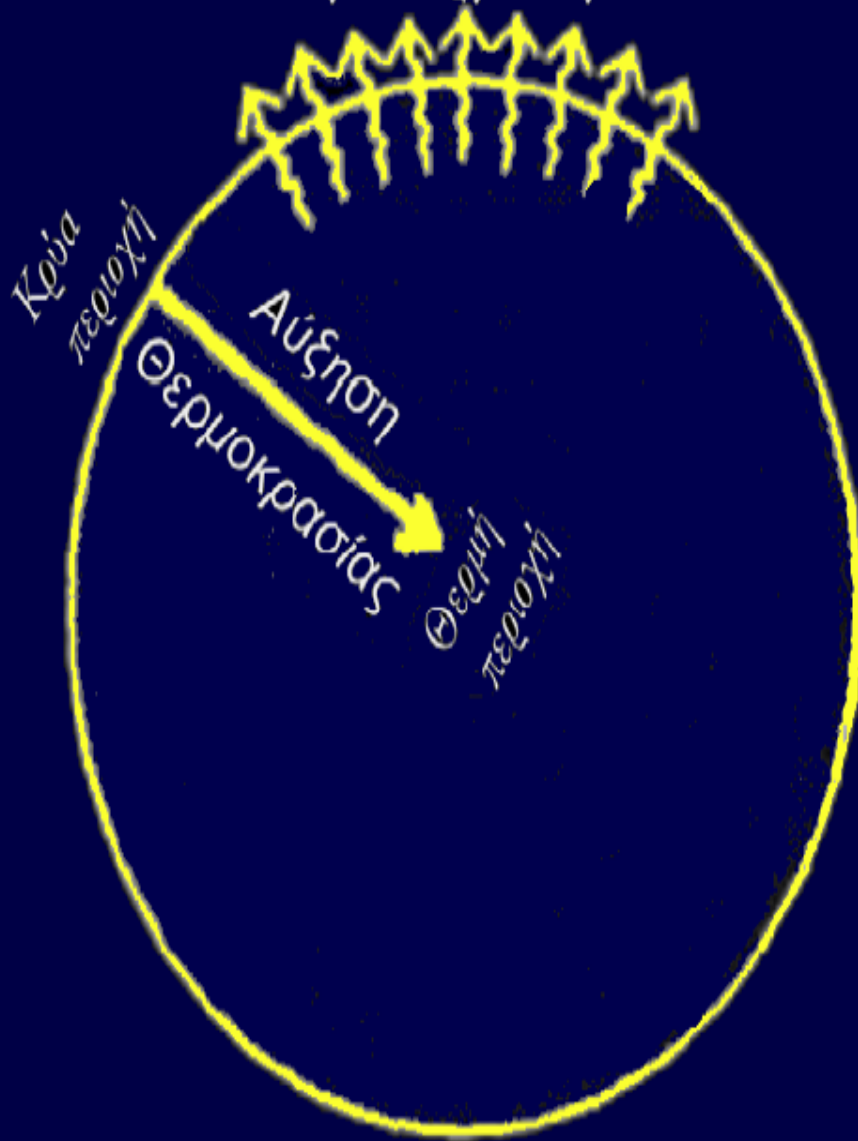
ΘΕΡΜΙΚΟ ΚΑΘΕΣΤΟΣ και ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΗΣ ΓΗΣ Γεω-Θερμοδυναμική-I

Καθ. Φίλιππος Βαλλιανάτος

Temperature



Ροή Θερμότητας



Η θερμότητα ρέει προς τα έξω, μακριά από τη θερμή εσωτερική περιοχή της γης, εγκάρσια προς τη κρύα επιφάνεια της. Ο μέσος ρυθμός είναι περίπου 0.08 W/m^2 , που ισοδυναμεί με $1.9 \times 10^{-6} \text{ cal/cm}^2/\text{s}$ HFU.



Η θερμότητα που φτάνει στην επιφάνεια της Γης προέρχεται από το εσωτερικό της και από τον Ήλιο.

Η θερμότητα που φτάνει στην επιφάνεια της Γης από τον Ήλιο είναι:

$$\sim 2 \times 10^{17} \text{ W}$$

Η θερμότητα που αποβάλλει η Γη από το εσωτερικό της είναι:

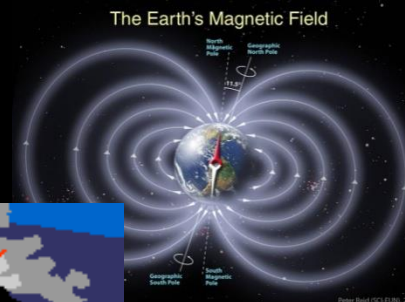
$$\sim 44 \times 10^{12} \text{ W}$$

Σχεδόν το σύνολο της θερμότητας που φτάνει από τον Ήλιο επανακτινοβολείται στο διάστημα και καθορίζει φυσικά φαινόμενα που συμβαίνουν κοντά στην επιφάνεια της Γης.

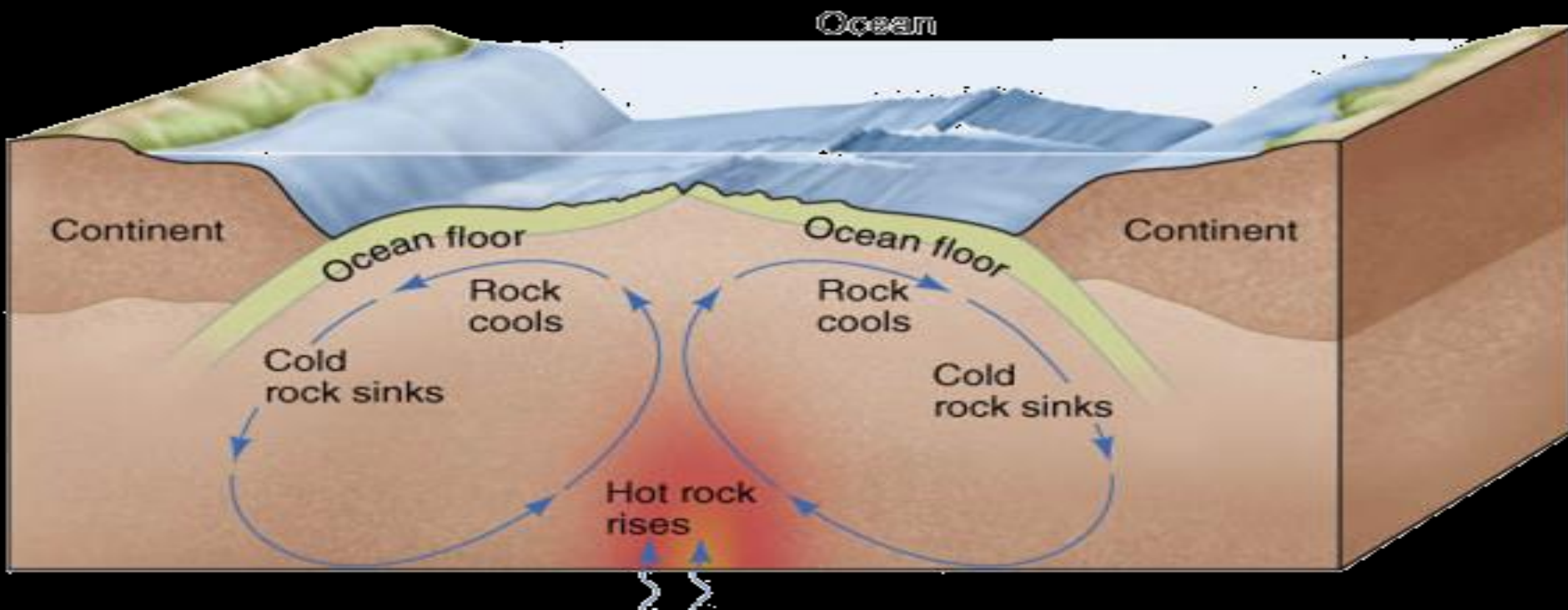
βροχοπτώσεις, κλίμα, αποσάθρωση πετρωμάτων, κλπ.

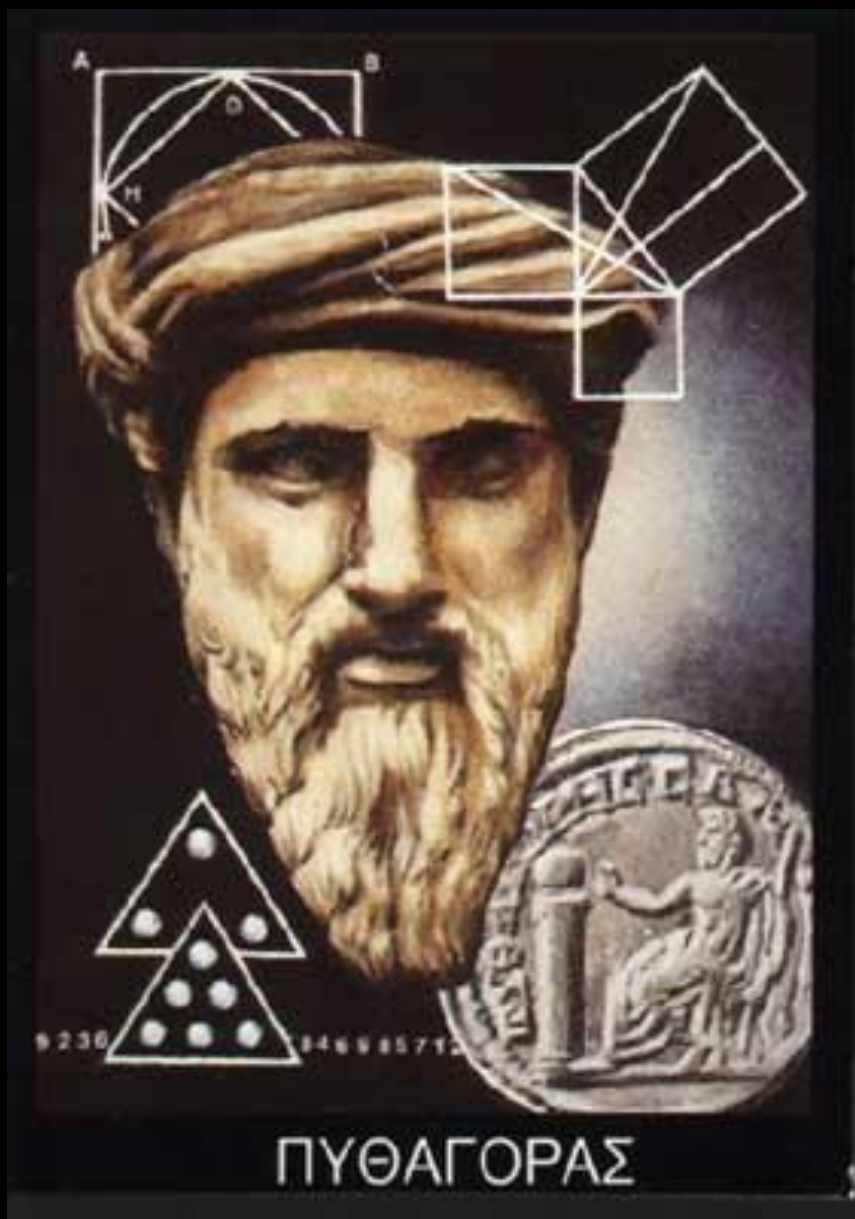
Η ροή θερμότητας από το εσωτερικό της Γης είναι αυτή που καθορίζει και συνδέεται με το σύνολο των γεωδυναμικών διαδικασιών, όπως:

- η σεισμογένεση
- η ηφαιστειότητα
- το μαγνητικό πεδίο της Γης
- οι τεκτονικές κινήσεις



B.

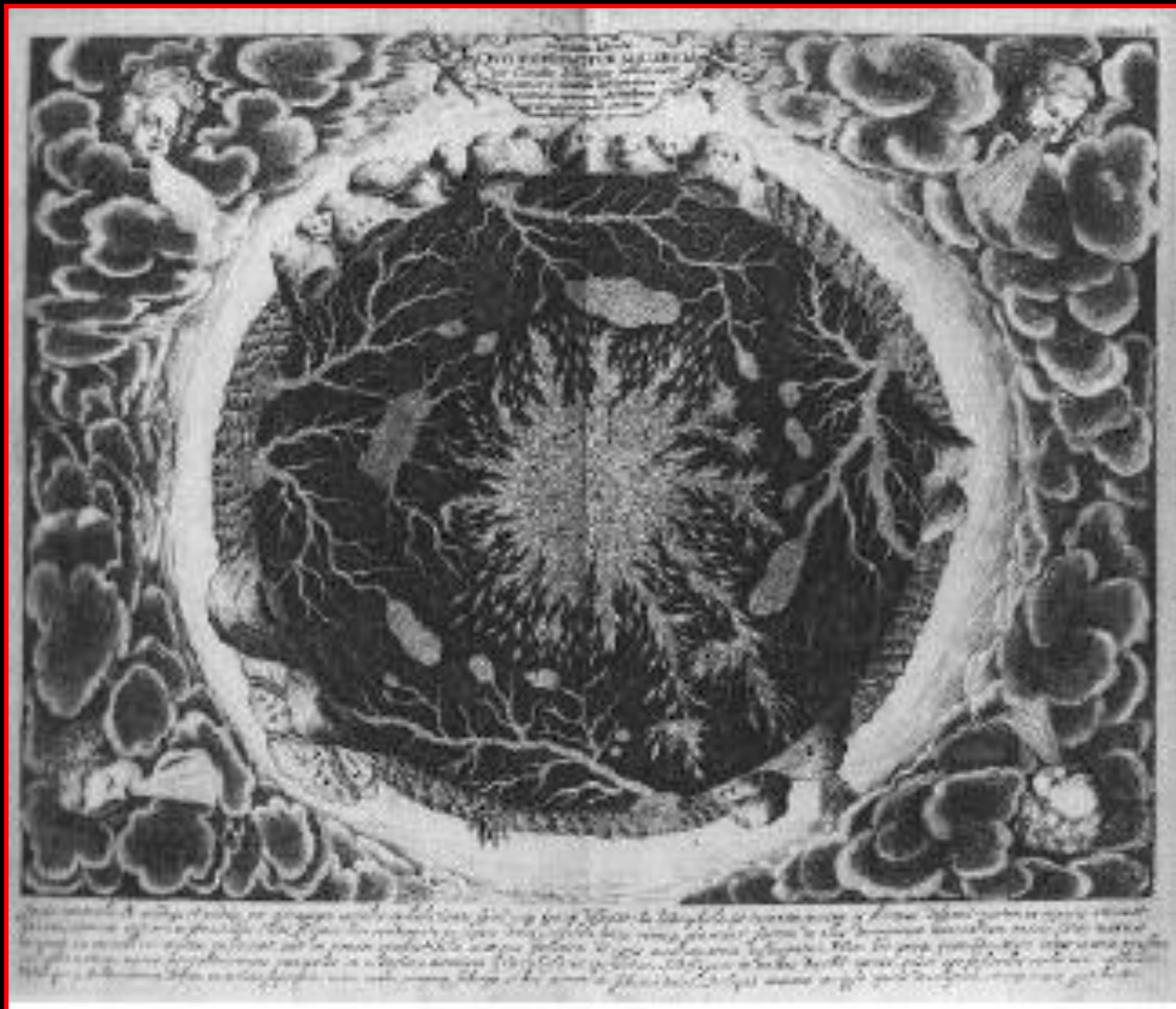




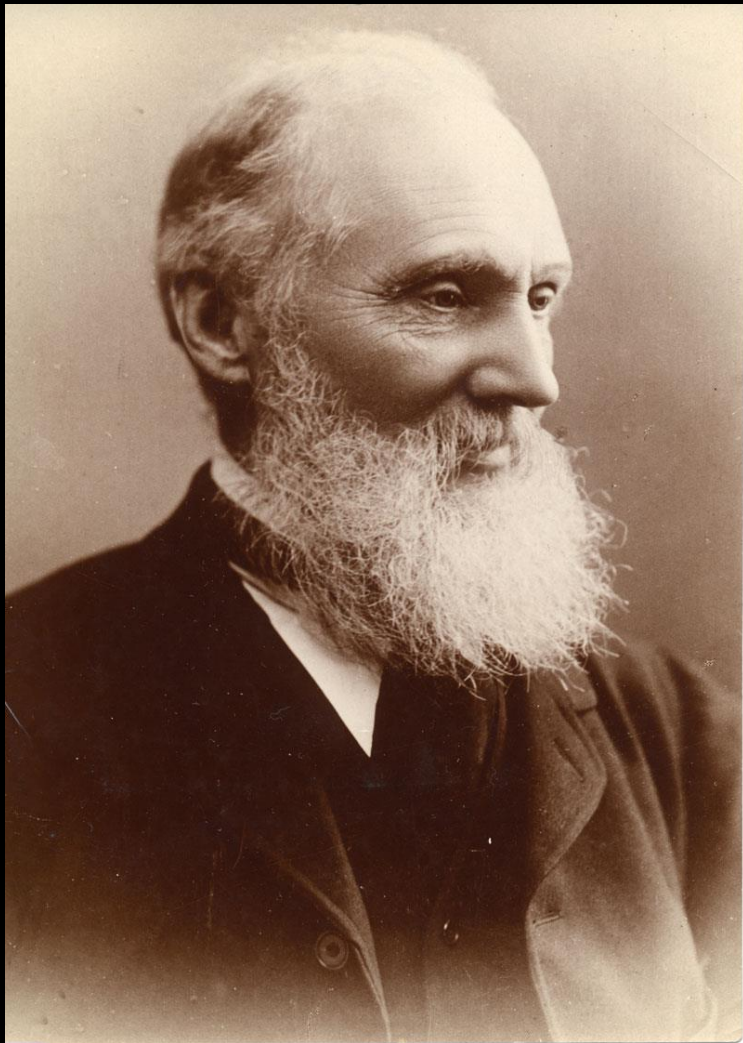
Πυθαγόρας:

«Κεντρικόν πυρ»





Το εσωτερικό της Γης, όπως το αναπαρέστησε γραφικά τον 17^ο αιώνα, ο Γερμανός φιλόσοφος, μαθηματικός και φυσικός Athanasius Kircher.



William Kelvin

Ο Kelvin (1862) βασιζόμενος στην υπόθεση ότι η Γη ψύχεται συνεχώς λόγω αποβολής θερμότητας με αγωγή, προσπάθησε να υπολογίσει την ηλικία της Γης.

25-30 Ma



Μη αποδεκτή τιμή, κυρίως λόγω:

- Διάδοση θερμότητας με μεταφορά

- Σημαντική συμβολή της ραδιενέργειας στην παραγωγή θερμότητας στο εσωτερικό της Γης

Φυσικές ποσότητες που αφορούν τις θερμικές διαδικασίες στο εσωτερικό της Γης είναι κατά κύριο λόγο η **θερμοκρασία**, η **θερμοβαθμίδα**, η **ροή θερμότητας**, η παραγωγή θερμότητας και η **εντροπία**.

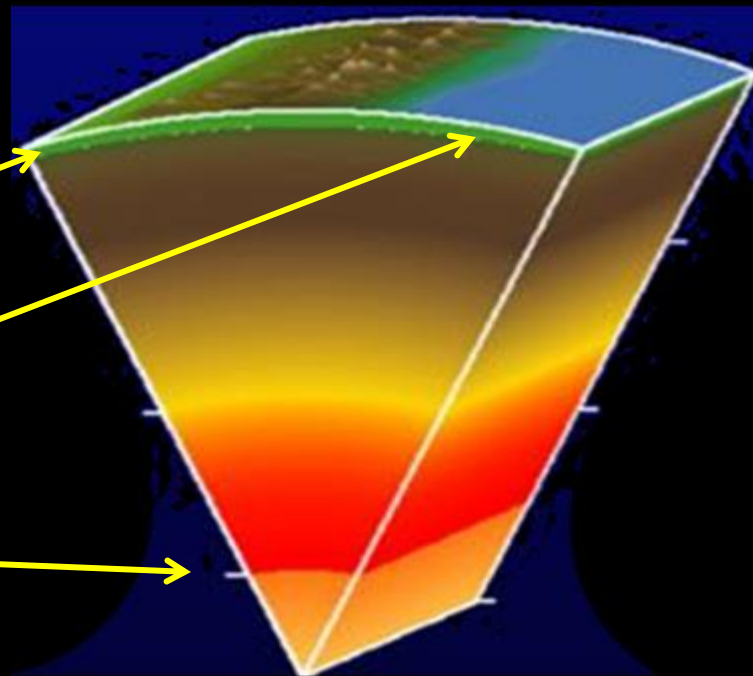
➤ Η **θερμοκρασία** μετριέται σε **βαθμούς Κελσίου, °C**, ή σε βαθμούς Kelvin, K (απόλυτη θερμοκρασία) και ισχύει η σχέση $K = °C + 273.16$.

Η θερμοκρασία έχει τιμή κατά μέσο όρο :

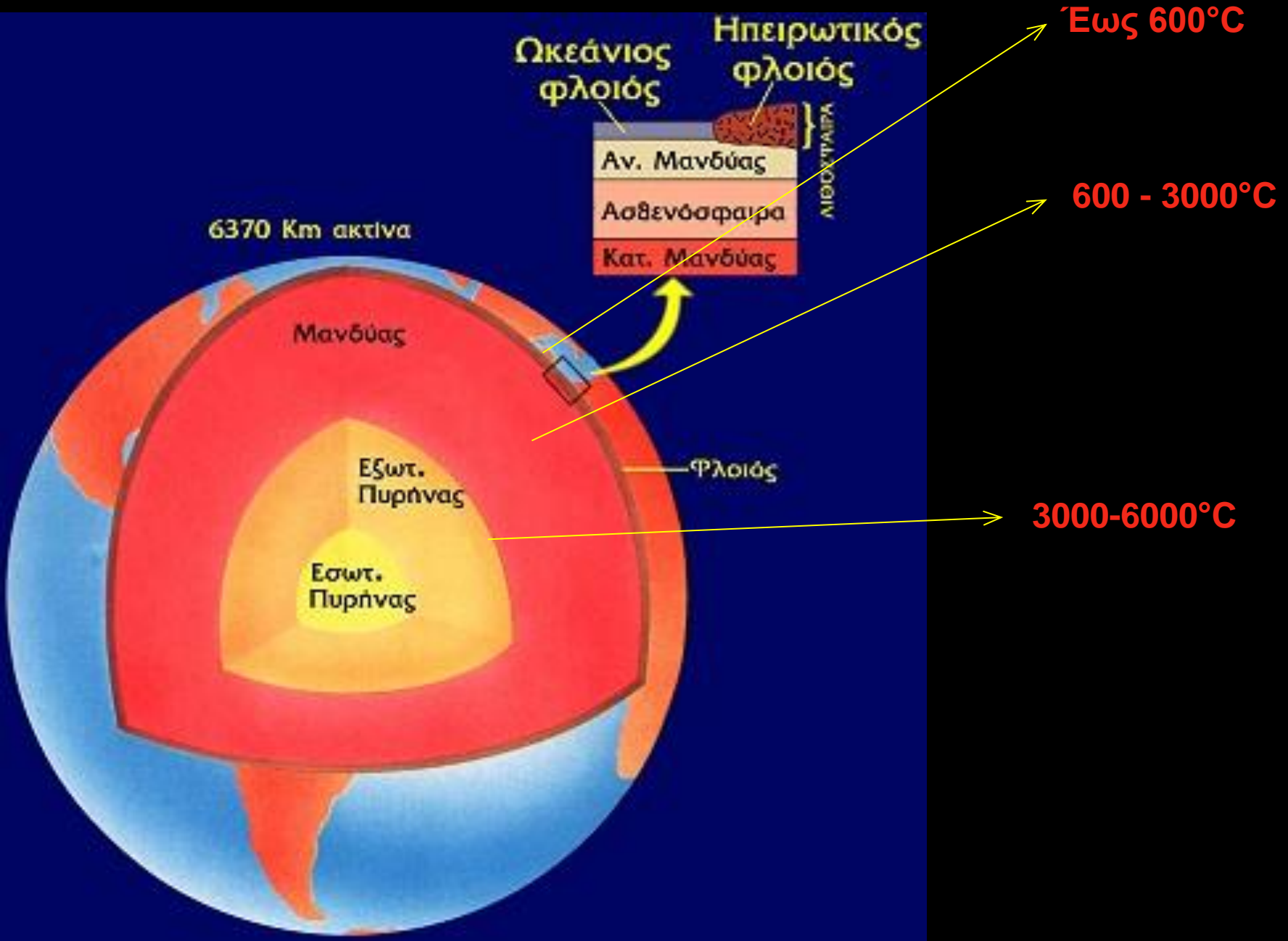
15-25 °C στην επιφάνεια της Γης

0 °C στους πυθμένες των ωκεανών

5000-6000° C στο κέντρο της Γης



Η ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΤΗΣ ΓΗΣ



➤ Η **θερμοβαθμίδα** εκφράζει τη μεταβολή της θερμοκρασίας ανά μονάδα μήκους (βάθους) και μετριέται σε **K/m**.

Η κατακόρυφη θερμοβαθμίδα έχει μία μέση τιμή 0.02 K/m (=20 °C/km) κοντά στην επιφάνεια της Γης και αρκετά μικρότερη βαθύτερα στη Γη.

➤ Η **θερμότητα, Q**, είναι μία μορφή ενέργειας και γι' αυτό μετριέται σε **Joule (J)** αλλά και σε **θερμίδες, cal (1cal=4.18J)**.

Η **ροή θερμότητας** ανά μονάδα χρόνου μετριέται σε **Jsec⁻¹**, δηλαδή σε **Watt (W)** και η συνολική θερμότητα που χάνει η Γη ανά δευτερόλεπτο είναι **~44x10¹² J** (ισχύς 44x10¹² W).

➤ Η **ροή θερμότητας, q**, ανά μονάδα χρόνου και μονάδα επιφάνειας μετριέται σε **W/m²** (Watt ανά τετραγωνικό μέτρο) ή σε υποδιαίρέσεις της (συνήθως σε **mW/m² = 10⁻³ W/m²**).

➤ Η **παραγωγή θερμότητας, A**, είναι η θερμότητα που παράγεται ανά μονάδα χρόνου και μονάδα όγκου (ή μονάδα μάζας) του υλικού και μετριέται σε **W/m³** (ή W/kg).

Ενδεικτικές τιμές του A είναι 2.5μW/m³ στο γρανίτη και 0.5μW/m³ στον αλκαλι-βασάλτη.

➤ Η **εντροπία, S**, αποτελεί μέτρο της ενέργειας ενός σώματος η οποία δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή εξωτερικού έργου. Η εντροπία συνήθως ορίζεται μέσω της μεταβολής της, $\Delta S = \Delta Q / T$, κατά τη διάρκεια μίας θερμικής μεταβολής ενός σώματος, ως ο λόγος της μεταβολής της θερμότητάς του δια της θερμοκρασίας του. Η εντροπία μετριέται σε **JK⁻¹** (Joule ανά βαθμό)

Παράμετροι που αφορούν τις θερμικές ιδιότητες του υλικού της Γης:

α) **Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, k** , που εκφράζει τη ροή θερμότητας με αγωγή μέσα σε ένα υλικό ανά μονάδα χρόνου, μήκους και βαθμό θερμοκρασίας και μετριέται σε $W/(m \cdot K)$ (Watt ανά μέτρο και ανά βαθμό), δηλαδή:

$$dW = \frac{dQ}{dt} k dl dT \quad (4.1)$$

β) **Η ειδική θερμότητα, C** , που εκφράζει τη θερμότητα που απαιτείται ώστε μία μονάδα μάζας ενός υλικού να αυξήσει τη θερμοκρασία της κατά μία μονάδα. Η αύξηση αυτή μπορεί να γίνει υπό σταθερή πίεση, οπότε η ειδική θερμότητα συμβολίζεται ως C_p ή διατηρώντας σταθερό τον όγκο οπότε η ειδική θερμότητα συμβολίζεται ως C_v και μετριέται σε $Jkg^{-1}K^{-1}$, δηλαδή:

$$C_p = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{m} T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad (4.2)$$

$$C_v = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v = \frac{1}{m} T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v \quad (4.3)$$

γ) Ο συντελεστής θερμικής διάχυσης, K , που ορίζεται ως:

$$K = \frac{k}{\rho C_p} \quad (4.4)$$

και εκφράζει την ικανότητα του υλικού να αποβάλει θερμότητα και μετριέται σε m^2/s .

δ) Ο συντελεστής θερμικής διαστολής, α , του υλικού ο οποίος εκφράζει την ανηγμένη μεταβολή του όγκου του υλικού ανά μονάδα θερμοκρασίας και μετριέται σε K^{-1} , δηλαδή:

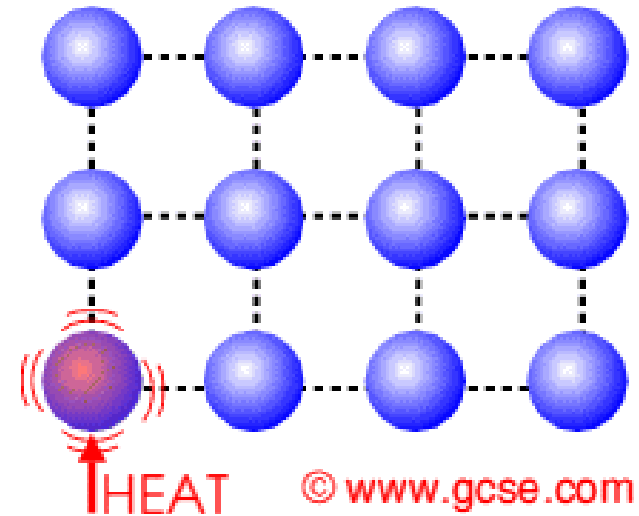
$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (4.5)$$

	k (W/(m•K))	C_p (J kg ⁻¹ K ⁻¹)	K (m ² s ⁻¹)	α (K ⁻¹)
<i>Φλοιός</i>	3.0	1.0x10 ³	1.1x10 ⁻⁶	2.0x10 ⁻⁵
<i>Μανδύας</i>	7.0	1.3x10 ³	1.3x10 ⁻⁶	1.3x10 ⁻⁵
<i>Πυρήνας</i>	40.0	0.7x10 ³	5.0x10 ⁻⁶	0.9x10 ⁻⁵

Μέσες τιμές του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας, k , της ειδικής θερμότητας υπό σταθερή πίεση, C_p , του συντελεστή διάχυσης, K , και του συντελεστή θερμικής διαστολής, α , στο φλοιό, το μανδύα και τον πυρήνα της Γης.

Θερμική Αγωγιμότητα

- Ο ρυθμός μετάδοσης (αγωγή) της θερμότητας μέσω της Γης είναι εξαιρετικά αργός διότι τα πετρώματα και τα γεωυλικά γενικότερα, είναι θερμοκοι μονωτές.
 - Η θερμική ενέργεια που παράγεται από ραδιενέργεια σε βάθη μερικών εκατοντάδων km απαιτεί περισσότερα από 4.600.000.000 χρόνια να φθάσει στην επιφάνεια (περίπου όσο και η ηλικία της Γης)!
- Η **θερμική αγωγιμότητα** των στερεών, αν και ελάχιστα εξαρτώμενη από την πίεση, ελαττώνεται αρκετά αυξανόμενης της θερμοκρασίας.
- Εξαίρεση αποτελούν τα υλικά που ταυτόχρονα είναι και ηλεκτρικοί μονωτές (π.χ. *τα κρυσταλλικά πετρώματα*), η θερμική αγωγιμότητα των οποίων αυξάνεται δραστικά με την θερμοκρασία, $\sim T^3$.
- Ο κυρίαρχος μηχανισμός μετάδοσης της θερμότητας σε τέτοια υλικά και συνθήκες είναι η θερμική (υπέρυθρη) ακτινοβολία.



Θερμική αγωγιμότητα k

Μονάδες : $W m^{-1} ^\circ C^{-1}$

Τυπικές τιμές:

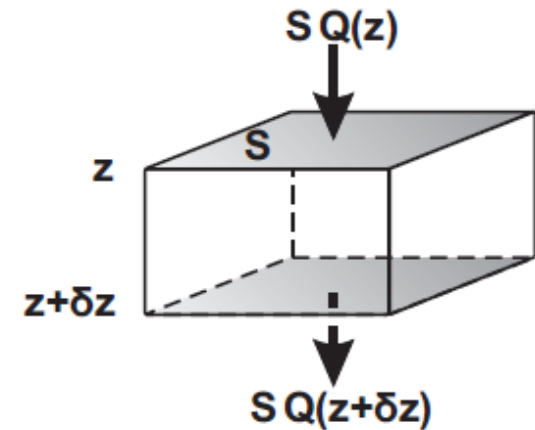
Άργυρος	420
Γυαλί	1.2
Πετρώματα	1.7-3.3
Ξύλο	0.1

Η Ροή Θερμότητας από το Εσωτερικό της Γης

Ροή θερμότητας ονομάζεται η ποσότητα της θερμότητας Q που περνάει από μια ορισμένη επιφάνεια, S , κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης, μέσα σε ορισμένο χρόνο, t .

$$q = \frac{Q}{St}$$

Η ροή θερμότητας μετριέται σε W/m^2

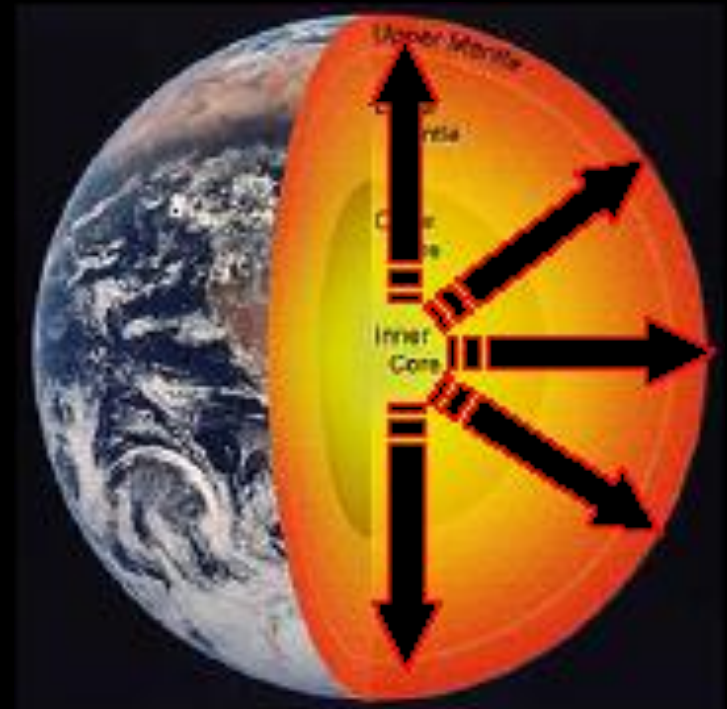
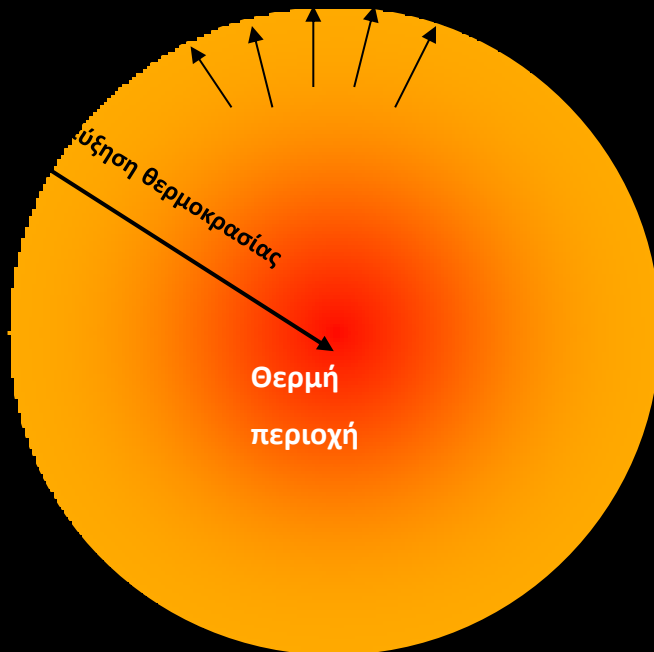


Η θερμότητα ρέει από μια θερμή σε μια ψυχρή περιοχή

Στην περίπτωση της Γης, η θερμότητα ρέει από το θερμότερο εσωτερικό της προς την ψυχρότερη επιφάνεια της

ροή θερμότητας

Ψυχρή
περιοχή

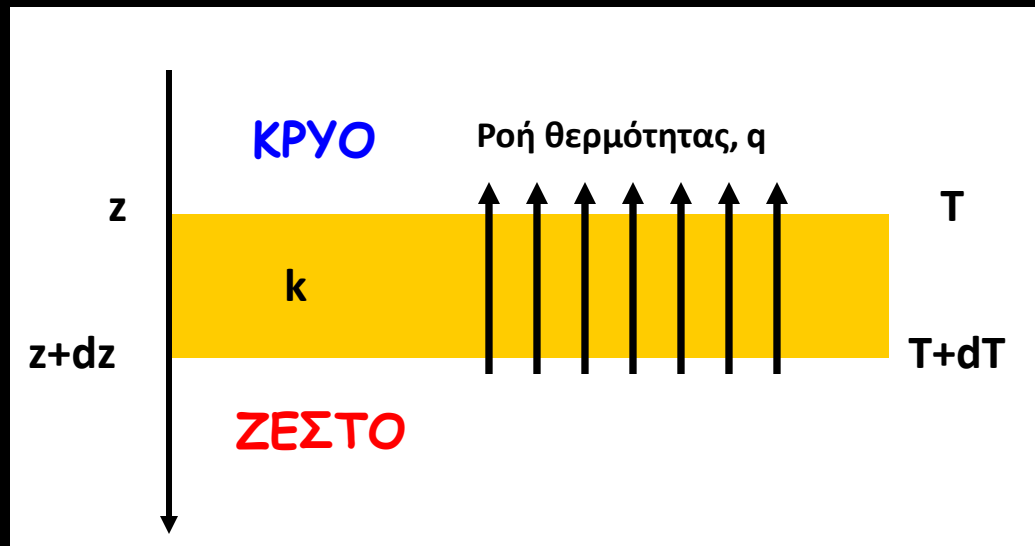


Η ροή θερμότητας από το εσωτερικό της Γης, μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.6)$$

όπου k είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας
και $\partial T / \partial z$ είναι η κατακόρυφη θερμοβαθμίδα

Ικανότητα ενός μέσου
να μεταφέρει
θερμότητα



Ροή θερμότητας, q , από θερμή σε ψυχρή περιοχή που απέχουν απόσταση dz και έχουν διαφορά θερμοκρασίας dT , για υλικό μέσο με συντελεστή θερμικής αγωγής, k .

Η θερμική αγωγιμότητα στο εσωτερικό της Γης

Ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, k , στον φλοιό και κοντά στην επιφάνεια της Γης μετριέται στο εργαστήριο σε δείγματα υλικού ή στις θέσεις που βρίσκονται τα πετρώματα στη φύση. Ο συντελεστής αυτός ελαττώνεται όταν αυξάνεται η θερμοκρασία των περισσότερων πετρωμάτων.

	Πετρώματα	Θερμική αγωγιμότητα (W/m °C)
Εκρηξιγενή	Ρυόλιθος	2.6
	Γρανίτης	3.3
	Ανδεσίτης	2.3
	Διορίτης	2.8
	Βασάλτης	1.8
	Γάββρος	2.8
Ιζηματογενή	Σχιστόλιθος	2.1
	Ψαμμίτης	3.7
	Ασβεστόλιθος	3.4
Μεταμορφωμένα	Αμφιβολίτης	3.0
	Σερπεντινίτης	3.5
	Χαλαζίτης	5.0

Στον μανδύα →

η θερμότητα διαδίδεται με:

Έχει δειχθεί πειραματικά ότι στα πετρώματα γίνεται διάδοση θερμότητας και με ακτινοβολία όταν η θερμοκρασία υπερβεί μια ορισμένη τιμή ($\approx 300^\circ \text{C}$).

- αγωγή
- ακτινοβολία
- διέγερση των ατόμων
- μεταφορά

Συνολικός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, k , σε ορισμένο βάθος μέσα στον μανδύα, ορίζεται ως το άθροισμα των:

- συντελεστή αγωγιμότητας, k_{ph}
- ενεργό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας λόγω ακτινοβολίας, k_r
- ενεργό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας λόγω διέγερσης των ατόμων, k_e

Ενεργός συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας λόγω ακτινοβολίας, k_r :

$$k_r = \frac{16n^2\sigma T^2}{3\varepsilon}$$

T = απόλυτη θερμοκρασία

σ = σταθερά των *Stefan-Boltzmann*

n = δείκτης διάθλασης του μέσου

ε = συντελεστής απορρόφησης

Ενεργός συντελεστής αγωγιμότητας λόγω διέγερσης των ατόμων, k_e :

$$k_e = k_0 e^{-E/KT}$$

T = απόλυτη θερμοκρασία

E = ενέργεια διέγερσης

K = σταθερά *Boltzmann*

k_0 = σταθερά

Για τον πυρήνα, ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας υπολογίζεται από τη σχέση:



$$k = 3 \frac{K^2}{e^2} T \lambda$$

Νόμος *Wiedemann-Franz*

T = απόλυτη θερμοκρασία

K = σταθερά *Boltzmann*

λ = συντελεστής ηλεκτρικής αγωγιμότητας

e = φορτίο του ηλεκτρονίου

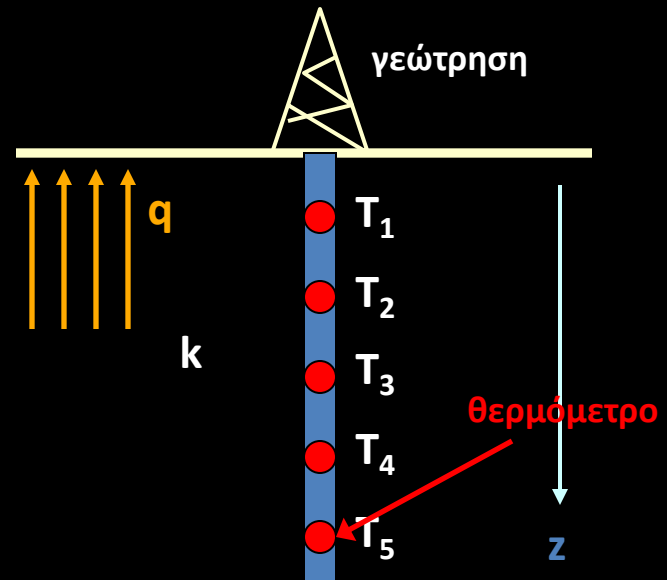
Η θερμοβαθμίδα στο εσωτερικό της Γης

Θερμοβαθμίδα ονομάζεται η μεταβολή της θερμοκρασίας ανά μονάδα μήκους (βάθους) και μετριέται σε βαθμούς/ m.

Η κατακόρυφη θερμοβαθμίδα κοντά στην επιφάνεια της Γης έχει μέση τιμή $20^{\circ}\text{C}/\text{km}$

Στην ξηρά, η κατακόρυφη θερμοβαθμίδα μπορεί να υπολογιστεί με την μέτρηση της θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη μέσα σε πηγάδια ή σε πυρήνες γεωτρήσεων.

Στον φλοιό της Γης, η τιμή της κατακόρυφης θερμοβαθμίδας κυμαίνεται μεταξύ $10^{\circ}\text{C}/\text{km}$ και $80^{\circ}\text{C}/\text{km}$



Με βάση τις μετρήσεις της θερμοβαθμίδας και του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας στους πυθμένες των θαλασσών και στις ηπείρους, έχουν υπολογισθεί πολλές τιμές της ροής θερμότητας.

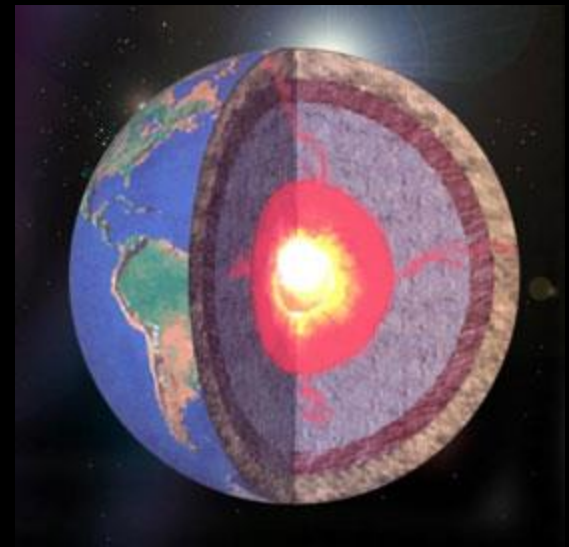
Μέση τιμή της ροής θερμότητας, $q = 65 \text{ mW/m}^2$

Συνολική ροή θερμότητας σε όλη την επιφάνεια της Γης = $34 \times 10^{12} \text{ W}$

Οι μετρούμενες τιμές της ροής θερμότητας παρουσιάζουν σφάλματα που οφείλονται:

Διείσδυση
θαλάσσιου ή
εδαφικού νερού
σε ρωγμές του
φλοιού

Κλιματικές
αλλαγές στην
επιφάνεια της Γης



Η κυκλοφορία θαλάσσιου νερού μέσα στις ρωγμές του θερμού βασαλτικού υλικού του ωκεάνιου φλοιού κοντά στους άξονες των μεσωκεάνιων ράχων έχει ως αποτέλεσμα τη μεταφορά θερμότητας στη θάλασσα, περίπου ίσης με:

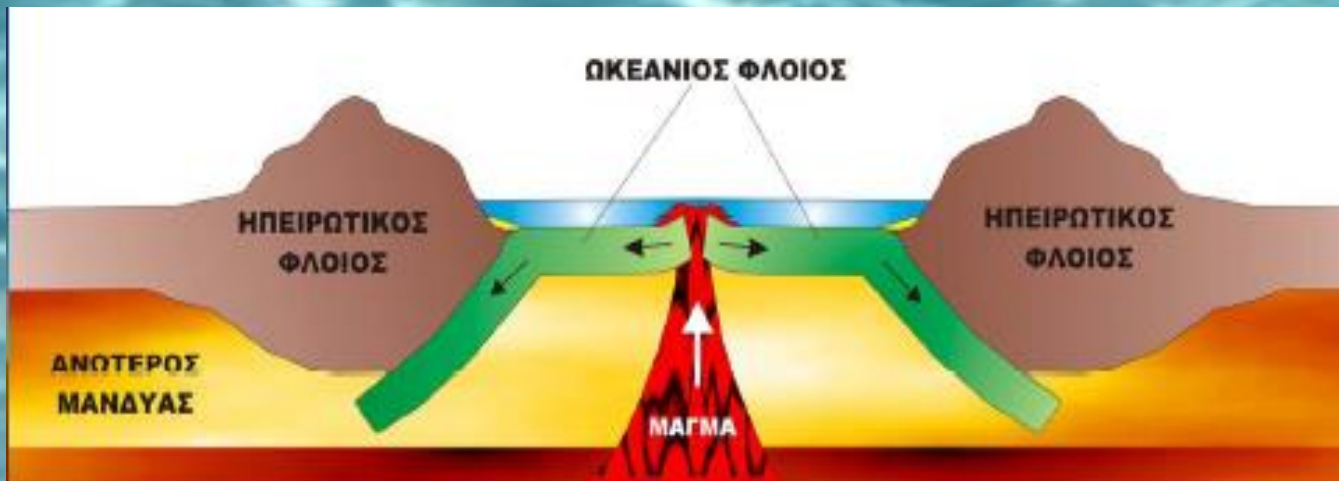
$$10 \times 10^{12} \text{ W}$$

Συνολική ροή θερμότητας από το εσωτερικό της Γης:

$$Q_{\text{ολική}} = 33 \times 10^{12} \text{ W} + 10 \times 10^{12} \text{ W}$$



$$43 \times 10^{12} \text{ W}$$



Οι κλιματικές αλλαγές επηρεάζουν επίσης τη ροή θερμότητας

Η τελευταία παγετώδης περίοδος διήρκησε μεγάλο χρονικό διάστημα.

Η μεγάλη διάρκειά της είχε ως αποτέλεσμα την ψύξη του φλοιού μέχρι μεγάλα βάθη και κατά συνέπεια την μείωση του κανονικού ρυθμού αύξησης της θερμότητας με το βάθος.

Η ελάττωση αυτή εξακολουθεί να ισχύει ακόμα σε κάποιο βαθμό με συνέπεια την μείωση της μετρούμενης σήμερα ροής θερμότητας, ιδιαίτερα σε περιοχές όπου υπήρχαν παγετώνες κατά την τελευταία παγετώδη περίοδο.

Ποιες περιοχές της Γης χαρακτηρίζονται από υψηλές τιμές ροής θερμότητας , ποιες από χαμηλές τιμές και γιατί;



**Φρεατικοί κρατήρες στη
Νίσυρο**



**Μικροί φρεατικοί
κρατήρες στη Μήλο**



Αποθέσεις αλάτων από θερμές πηγές: Yellowstone National Park πάνω αριστερά μια αρχαία Ιεράπολη στην Τουρκία κάτω δεξιά.



Θερμές πηγές στις Θερμοπύλες



Θερμές πηγές στη περιοχή του Πολιχνίτου Λέσβου

**Θερμοπίδακας στο
Yellowstone National Park**

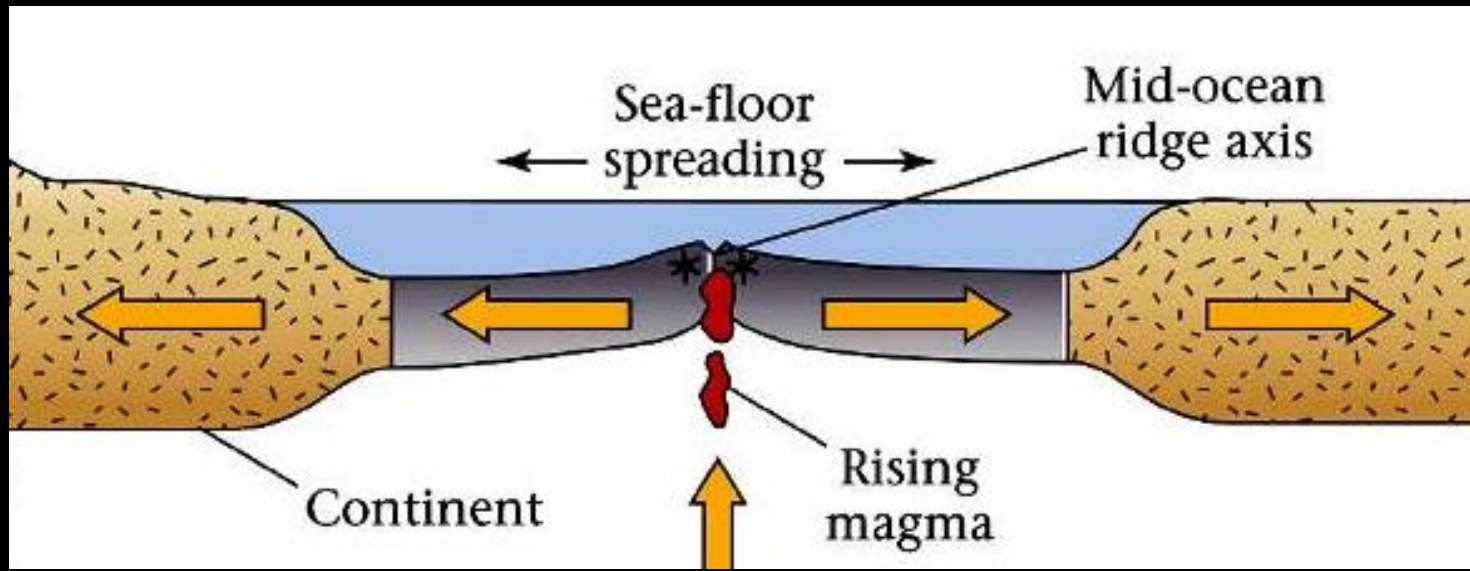


Θερμοπίδακας στην Ισλανδία



**Ατμίδες με αποθέσεις
αυτοφυούς θείου στη Νίσυρος**

Η ροή θερμότητας στους ωκεανούς



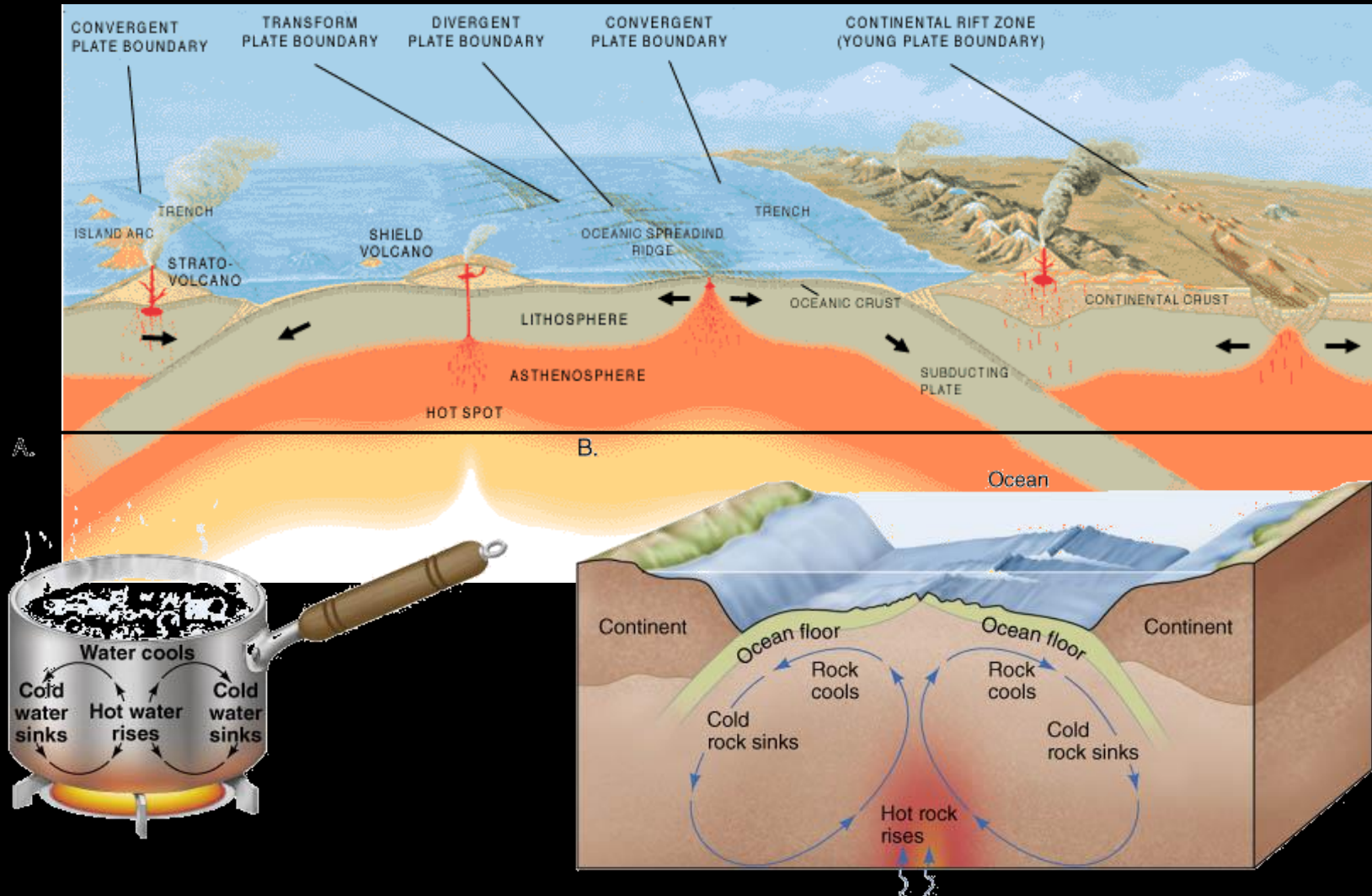
Μείωση της ροής θερμότητας

Μέγιστη ροή θερμότητας
στις μεσωκεάνιες ράχες

Μείωση της ροής θερμότητας

Ελάττωση της ροής θερμότητας με την αύξηση της ηλικίας της λιθόσφαιρας

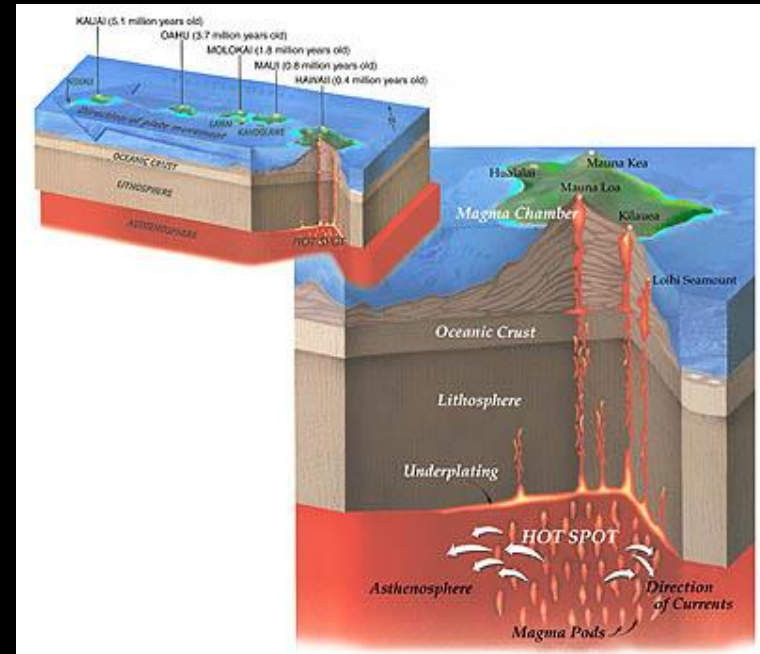
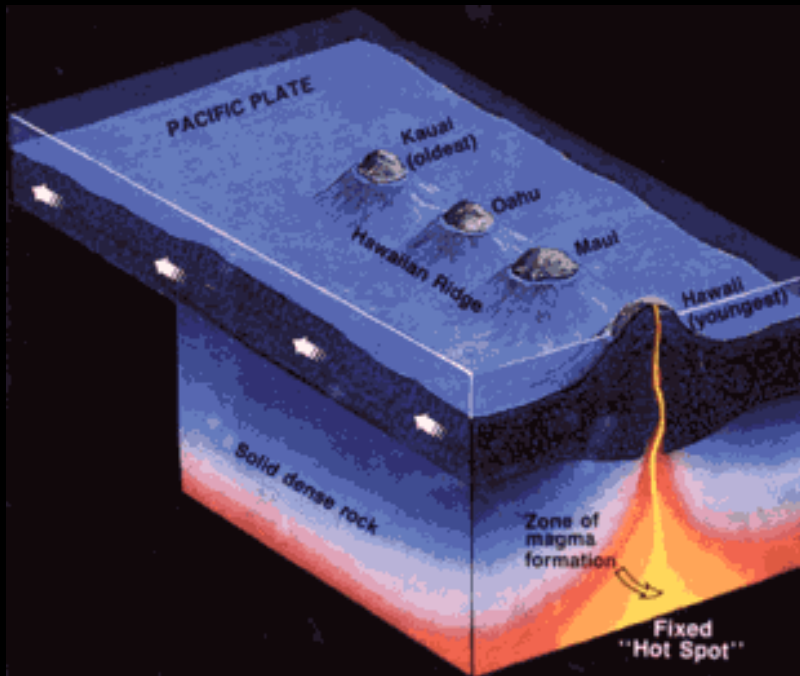
Η ροή θερμότητας στους ωκεανούς



Αυτός ο κύκλος είναι η επιφανειακή εκδήλωση των ρευμάτων μεταφοράς στο μανδύα και αποτελεί τη σημαντικότερη φυσική διαδικασία με την οποία μεταφέρεται θερμότητα από το εσωτερικό της Γης.

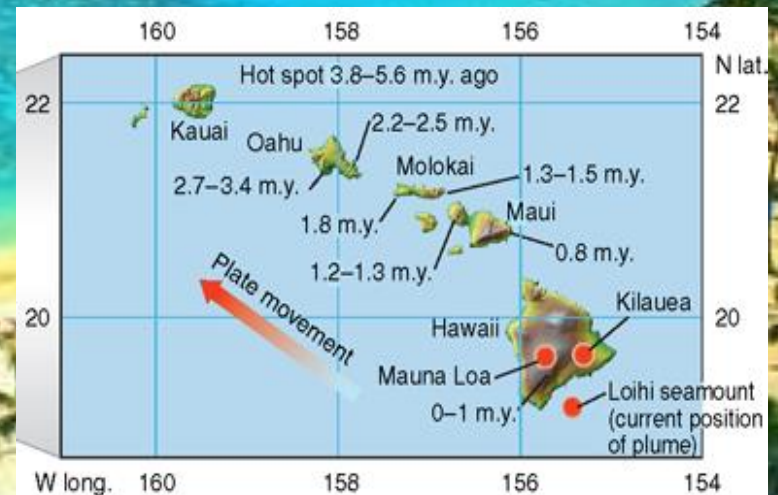
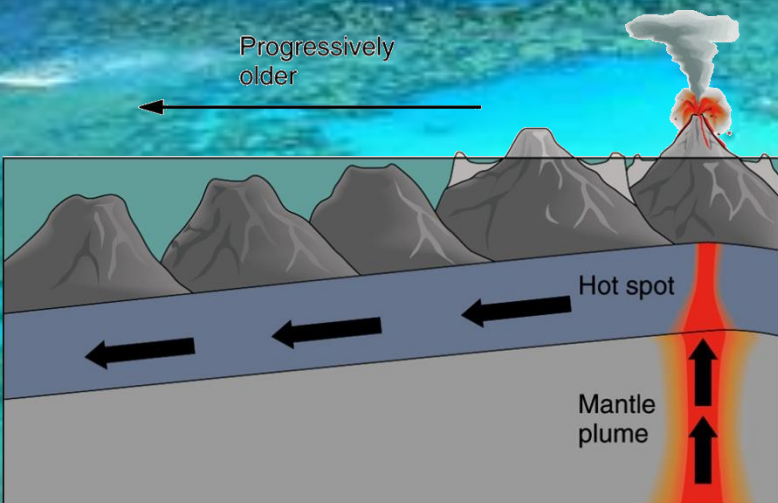
Η ροή θερμότητας στους ωκεανούς

Θερμές κηλίδες (hot spots) είναι σημεία μακριά από τις μεσοκεάνειες ράχες όπου παρατηρείται άνοδος μάγματος και χαρακτηρίζονται από έντονη ηφαιστειακή δράση



Κατακόρυφος ανοδικός θύλακας

Η ροή θερμότητας στους ωκεανούς



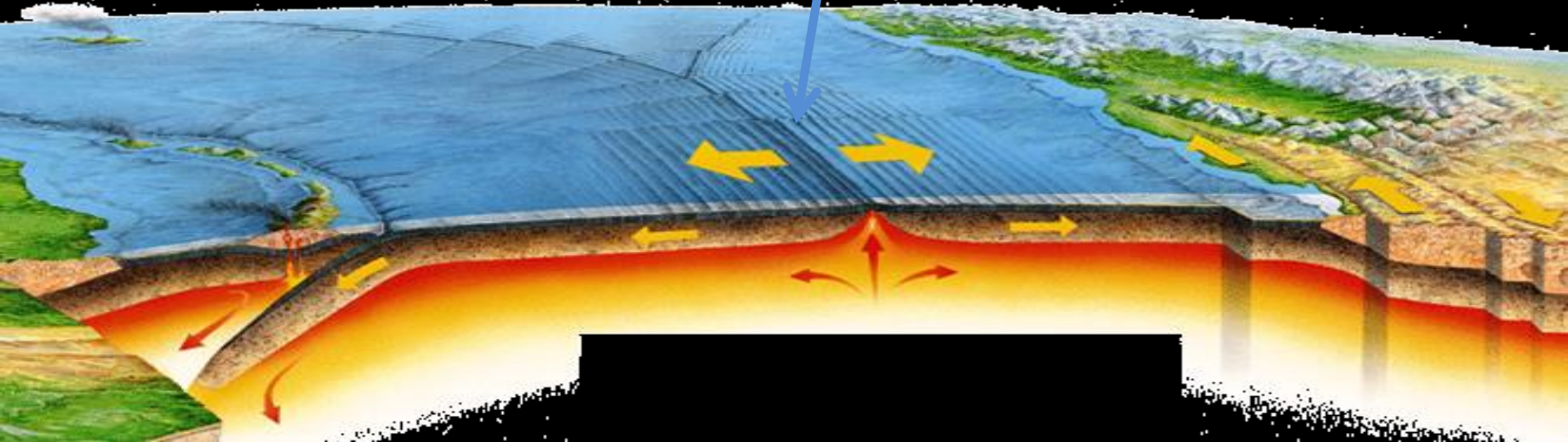
Η ροή θερμότητας στους ωκεανούς

Η μέση τιμή της ροής θερμότητας στην νεοσχηματισμένη λιθόσφαιρα στις μεσωκεάνιες ράχες είναι μεγάλη:

$\sim 200 \text{ mW/m}^2$

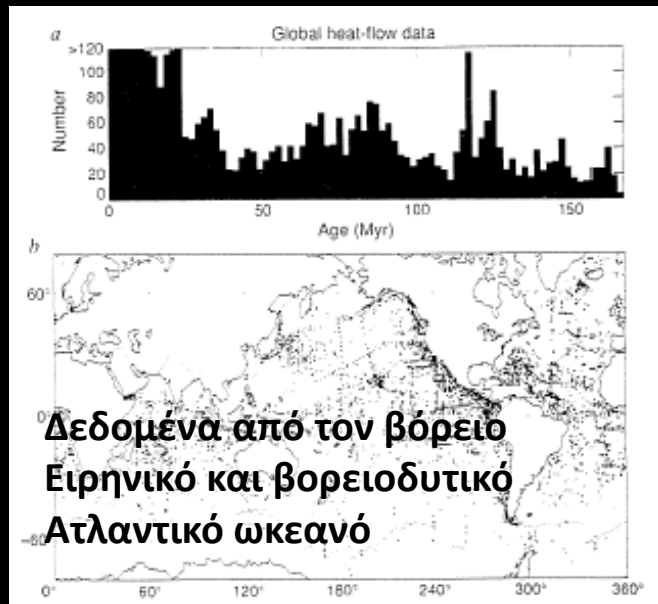
Η ροή θερμότητας μειώνεται με γρήγορο ρυθμό μέχρι την ηλικία των 30 Ma

Για ηλικίες $> 100 \text{ Ma}$ η ροή θερμότητας είναι πολύ μικρή



Η ροή θερμότητας στους ωκεανούς

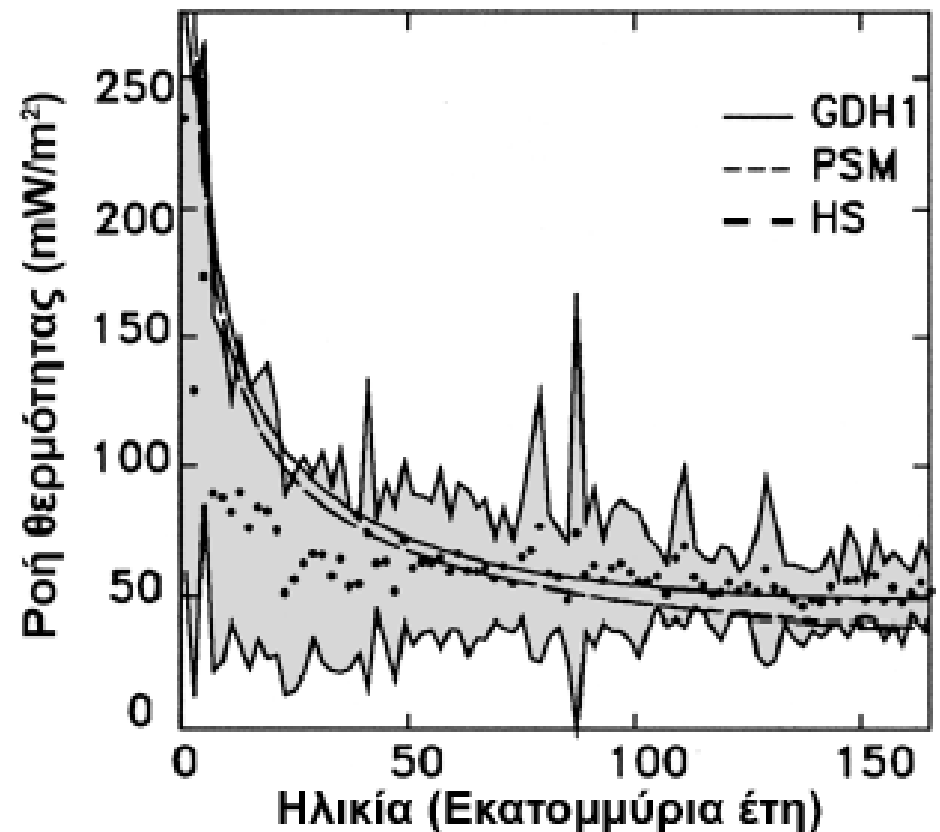
Διάφορα μοντέλα έχουν προταθεί για την ερμηνεία της μεταβολής της ροής θερμότητας σε σχέση με το βάθος και την ηλικία της ωκεάνιας λιθόσφαιρας.



Δεδομένα από τον βόρειο
Ειρηνικό και βορειοδυτικό
Ατλαντικό ωκεανό

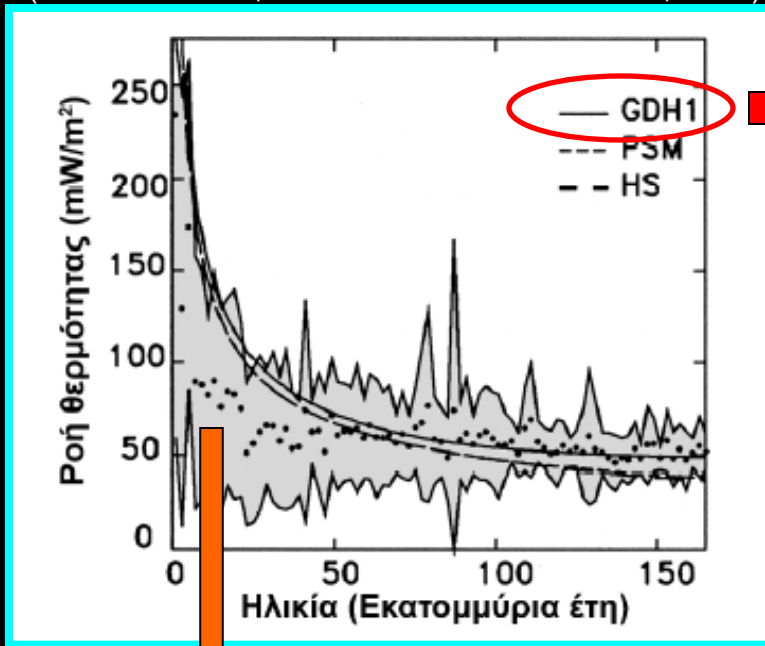
Μοντέλα:

- HS (Stein and Stein, 1992)
- PSM (Parsons and Sclater, 1977)
- GDH1 (Stein and Stein, 1992)



(Stein and Stein, 1992 και Parson and Sclater, 1977)

(Stein and Stein, 1992 και Parson and Sclater, 1977)



Η ωκεάνια λιθόσφαιρα θεωρείται ότι αρχικά έχει σταθερό πάχος με μηδενική θερμοκρασία στην επιφάνειά της και την ίδια θερμοκρασία, T_a , τόσο στον άξονα της ράχης όσο και στη βάση της λιθόσφαιρας.

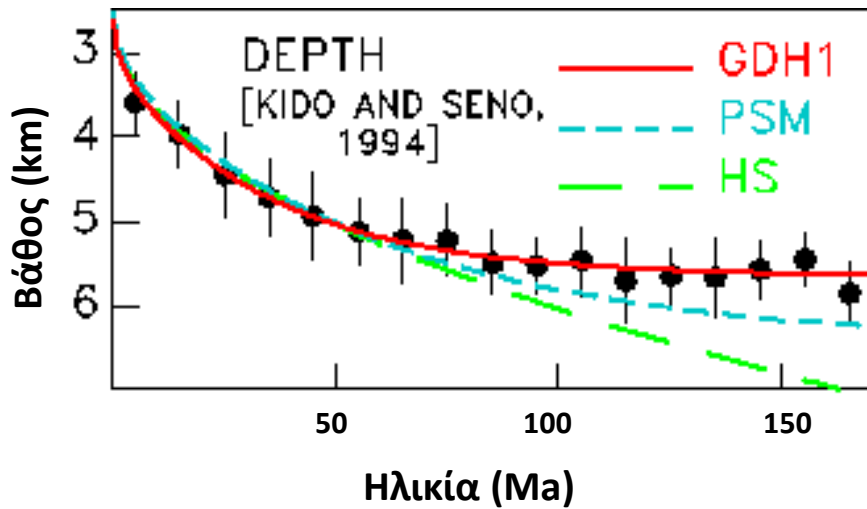
$$q(t) = 510t^{-1/2} \quad t \leq 55Ma$$

$$q(t) = 49 + 96e^{-t/36} \quad t > 55Ma$$

q (σε mW/m^2) είναι η ροή θερμότητας
 t (σε Ma) είναι η ηλικία της ωκεάνιας λιθόσφαιρας.

Η ελαττωμένη ροή θερμότητας στη νεοσχηματισμένη ωκεάνια λιθόσφαιρα αποδίδεται στην υδροθερμική κυκλοφορία του ψυχρού θαλάσσιου νερού στις ρωγμές του μικρής ηλικίας ωκεάνιου φλοιού. Η απόθεση ιζημάτων στην λιθόσφαιρα, όταν αυτή έχει απομακρυνθεί από τον άξονα της ράχης και έχει αυξηθεί η ηλικία της, εμποδίζει την κυκλοφορία ψυχρού θαλάσσιου νερού και η ροή θερμότητας έχει την κανονική τιμή που προβλέπεται από τα μοντέλα.

Μεταβολή του βάθους του θαλάσσιου πυθμένα σε συνάρτηση με την ηλικία του



Σύμφωνα με το μοντέλο GDH1, η μεταβολή του μέσου βάθους, d (km), του θαλάσσιου πυθμένα σε συνάρτηση με την ηλικία, t (Ma), της ωκεάνιας λιθόσφαιρας δίνεται από τις σχέσεις:

$$d = 2.6 + 0.36t^{-1/2} \quad t \leq 20\text{Ma} \quad (4.12)$$

$$d = 5.65 - 2.47e^{-t/36} \quad t > 20\text{Ma} \quad (4.13)$$

Η αύξηση του βάθους του ωκεάνιου πυθμένα με την ηλικία της λιθόσφαιρας οφείλεται στο γεγονός ότι η λιθοσφαιρική πλάκα:

απομακρύνεται από τον άξονα της

αυξάνεται η ηλικία της

ψύχεται

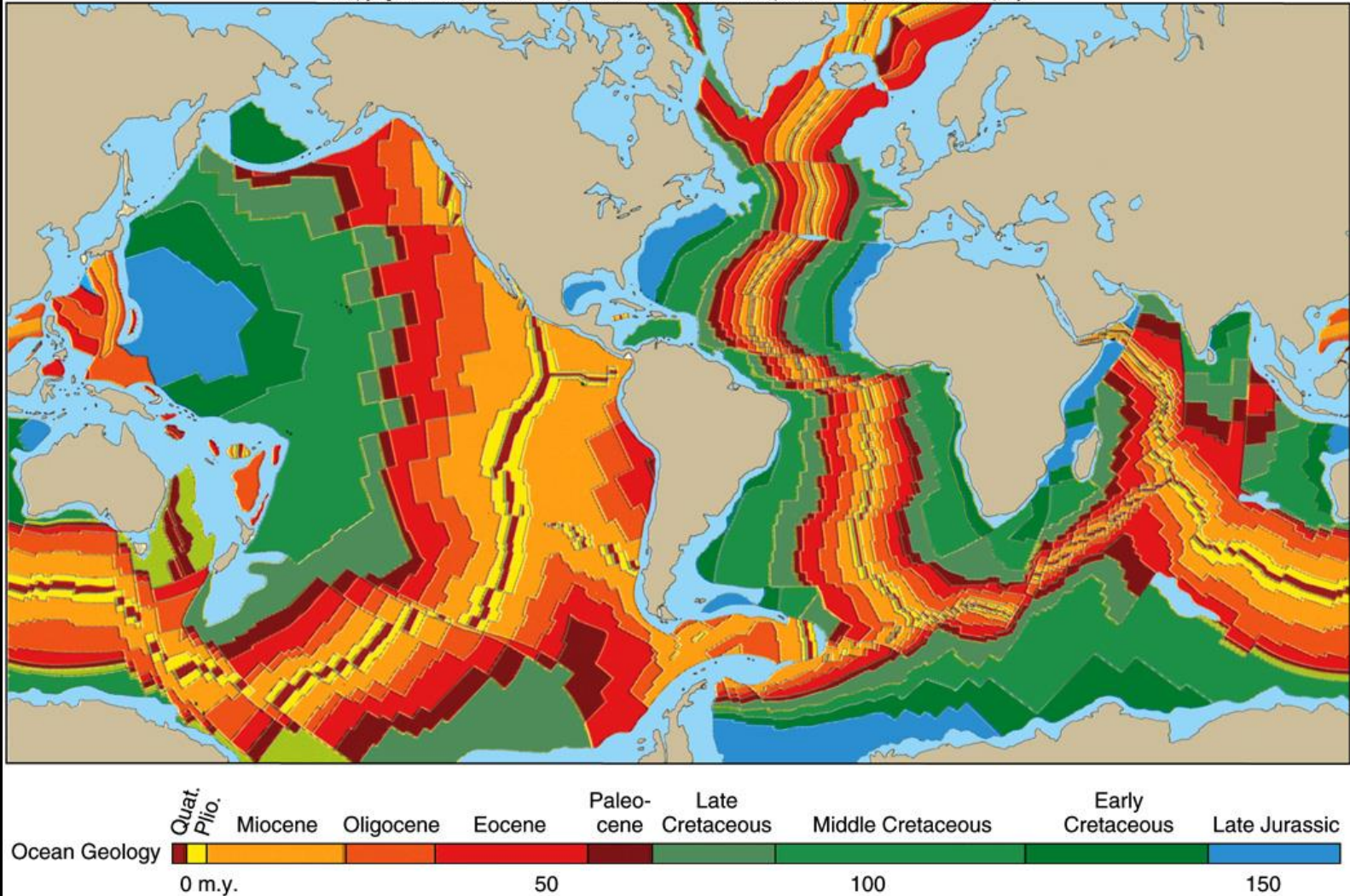
βυθίζεται στον μανδύα

αυξάνεται η πυκνότητά της

συστέλλεται

Ηλικία του ωκεάνιου φλοιού

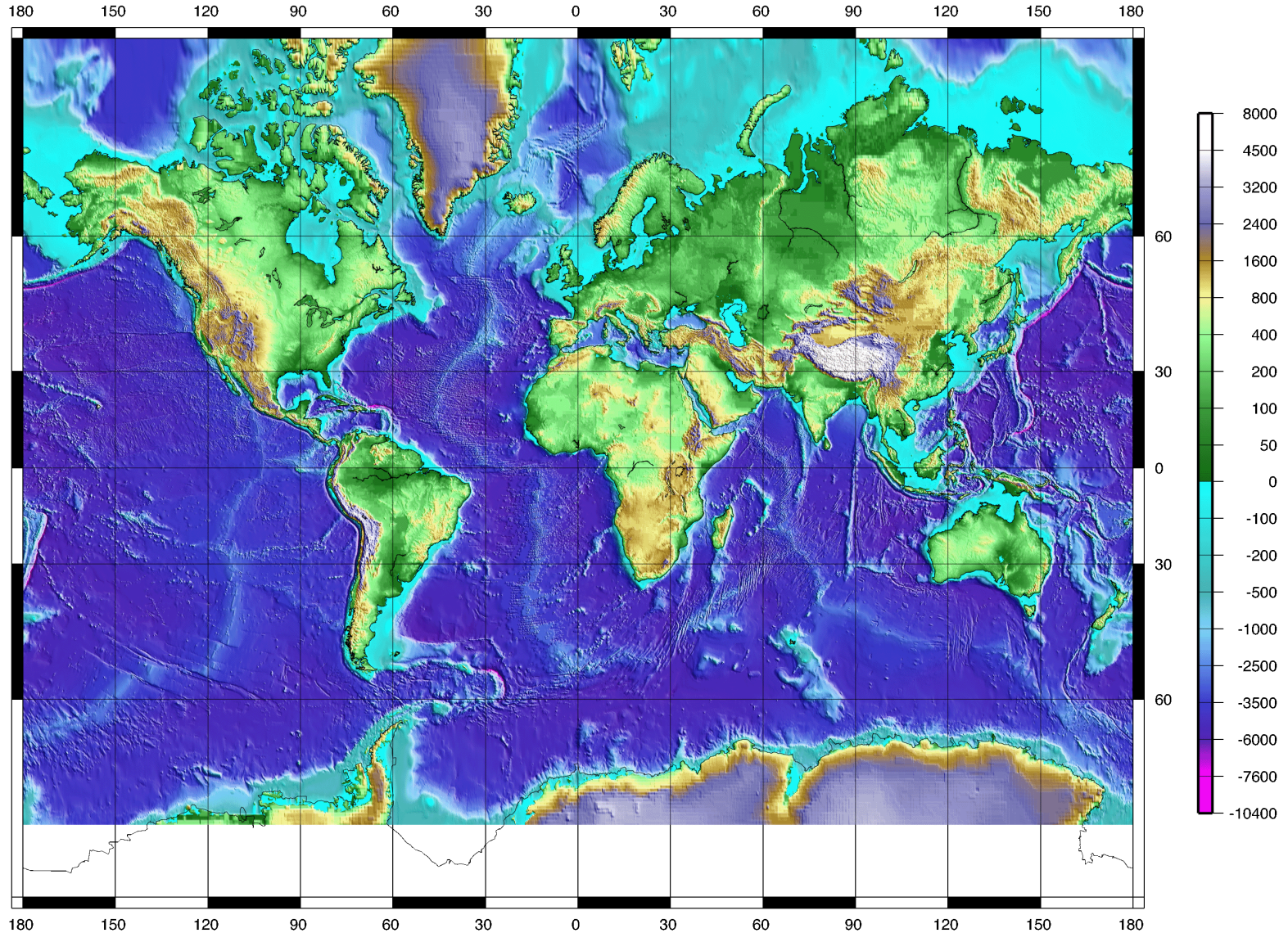
Copyright © McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



Βάθος του θαλάσσιου πυθμένα

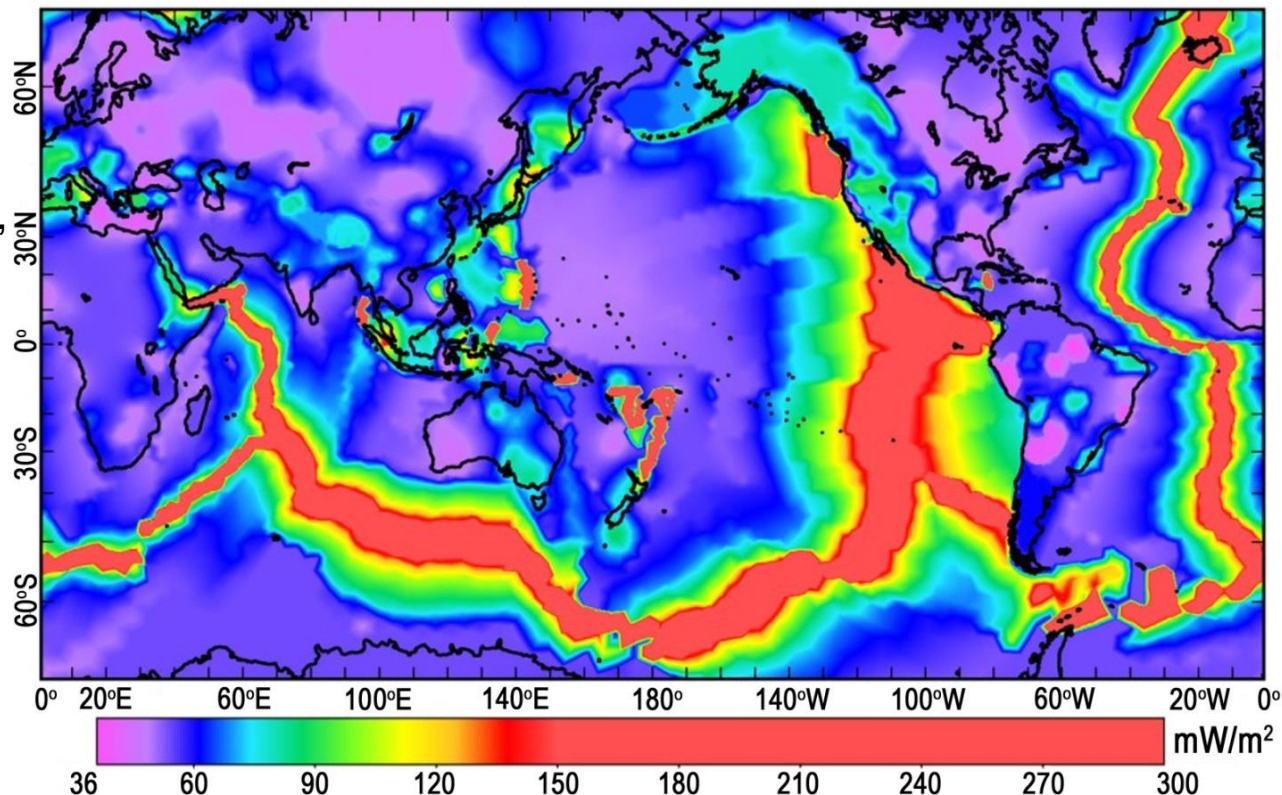
This map is part of "Discovering Plate Boundaries", a classroom exercise developed by Dale S. Sawyer at Rice University (dale@rice.edu). Additional information about this exercise can be found at <http://terra.rice.edu/plateboundary>.

SCIENTIFIC SPECIALTY: GEOGRAPHY
Elevation in meters above sea level
Map based on widely available dataset ETOPOS



Παγκόσμια Θερμική Ροή

- **Υψηλή** θερμική ροή παρατηρείται:
 - Κατά μήκος των *ωκεάνιων επεκτατικών κέντρων*.
 - Κατά μήκος *νησιωτικών και ηφαιστειακών τόξων*, πίσω από τις ζώνες σύγκλισης.
- **Χαμηλή** θερμική ροή παρατηρείται:
 - Κατά μήκος των ζωνών σύγκλισης και βύθισης (*υπαγωγής*) ωκεάνιου φλοιού κάτω από τον ηπειρωτικό και μέσα στον μανδύα.
 - Σε τεκτονικά σταθερές περιοχές (π.χ. *ηπειρωτικές ενδοχώρες, ασπίδες και μεγάλες ιζηματογενείς λεκάνες*).



Η ροή θερμότητας στις ηπείρους

Η ροή θερμότητα στις ηπείρους είναι εξαιρετικά ανομοιόμορφη και δεν μπορεί να ερμηνευθεί με απλά γεωθερμικά μοντέλα.

Η ροή θερμότητας στις ηπείρους εξαρτάται από:

- Τοπικές συγκεντρώσεις ραδιενεργών στοιχείων που παράγουν θερμότητα
- Χρόνος που παρήλθε από σημαντικά θερμοτεκτονικά γεγονότα
- Αποσάθρωση
- Απόθεση ιζημάτων
- Ύπαρξη παγετώνων

Μέση τιμή της ροής θερμότητας στις ηπείρους είναι:

65 mW/m²



Η ροή θερμότητας στις ηπείρους

Σε αντίθεση με την ωκεάνια λιθόσφαιρα (βασικά, υπερβασικά πετρώματα), ο ηπειρωτικός φλοιός περιέχει όξινα και ενδιάμεσα πετρώματα (π.χ. γρανίτες) τα οποία είναι πλούσια σε ραδιενεργά υλικά.

Έρευνες σε πολλές περιοχές έχουν δείξει ότι ισχύουν σχέσεις της μορφής:

$$q_0 = q_r + D A_0$$

q_0 = η ροή θερμότητας στην επιφάνεια της Γης

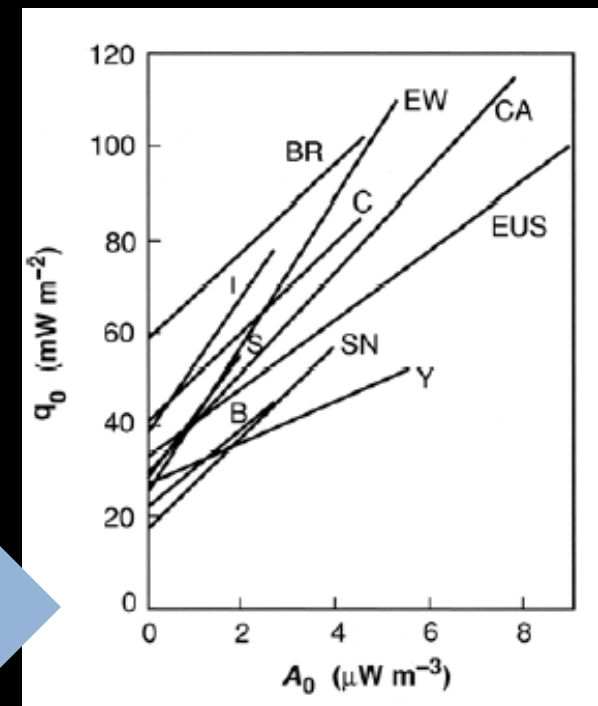
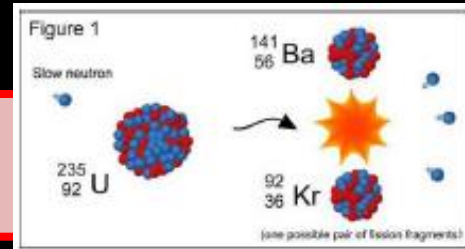
q_r = η ανηγμένη τιμή ροής θερμότητας στη βάση του φλοιού

A_0 = η παραγωγή θερμότητας ανά μονάδα όγκου πετρώματος από ραδιενέργεια κοντά στην επιφάνεια της Γης

D = σταθερά που υπολογίζεται για κάθε περιοχή και έχει μονάδες μήκους

$$D \approx 7-11 \text{ km}$$

Μεταβολή της ροής θερμότητας σε διάφορες ηπειρωτικές περιοχές (Παπαζάχος 2008, τροποποιημένο από Jessor, 1990)

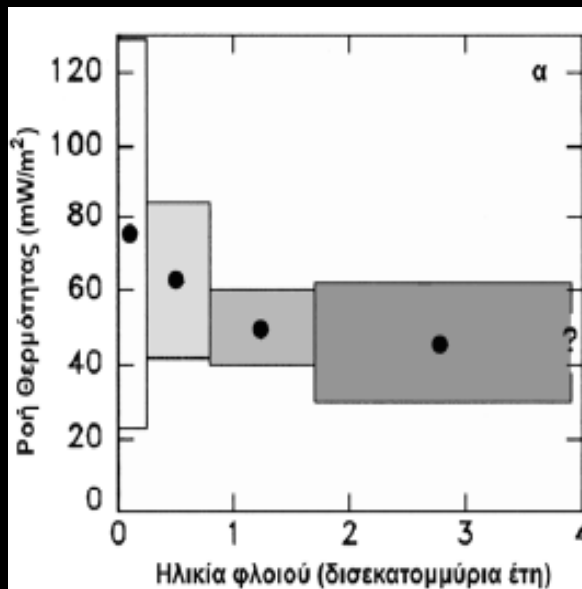


Η ροή θερμότητας στις ηπείρους

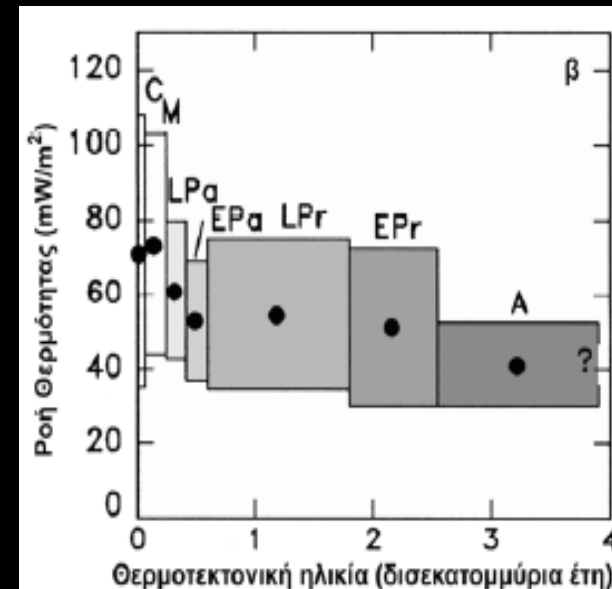
Υπάρχει σαφής ελάττωση της ροής θερμότητας στις ηπείρους με την ηλικία της λιθόσφαιρας:

Ηλικία (Ma)	Μέση ροή θερμότητας (mW/m ²)
0 – 250	76 ± 53
250 - 800	63 ± 21
800 - 1700	50 ± 10
> 1700	46 ± 16

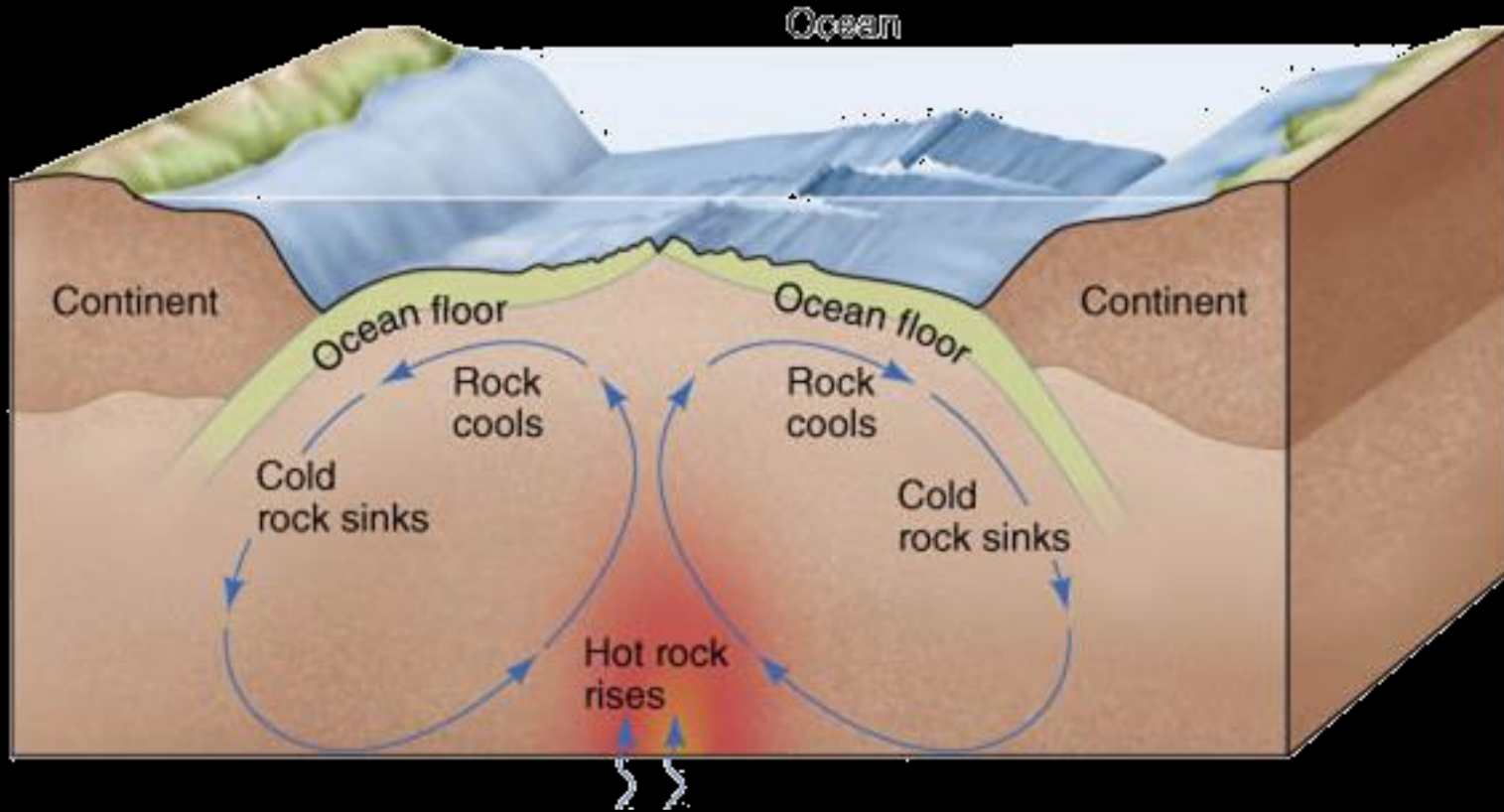
(Slater et al., 1980)



Ροή θερμότητας, q (σε mW/m²), σε συνάρτηση με την ηλικία, t (σε Ma), των ηπείρων.



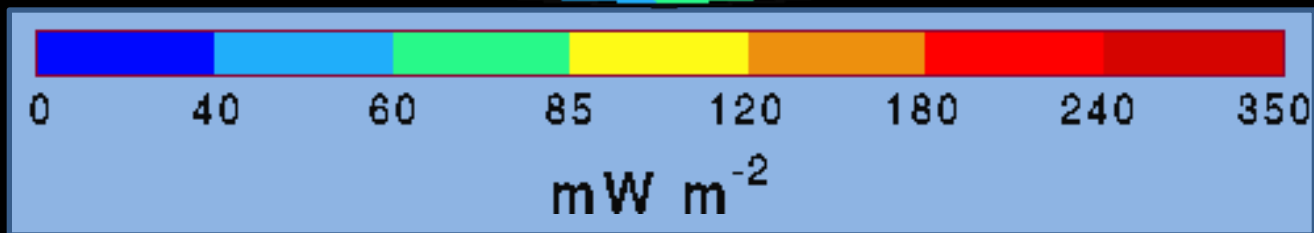
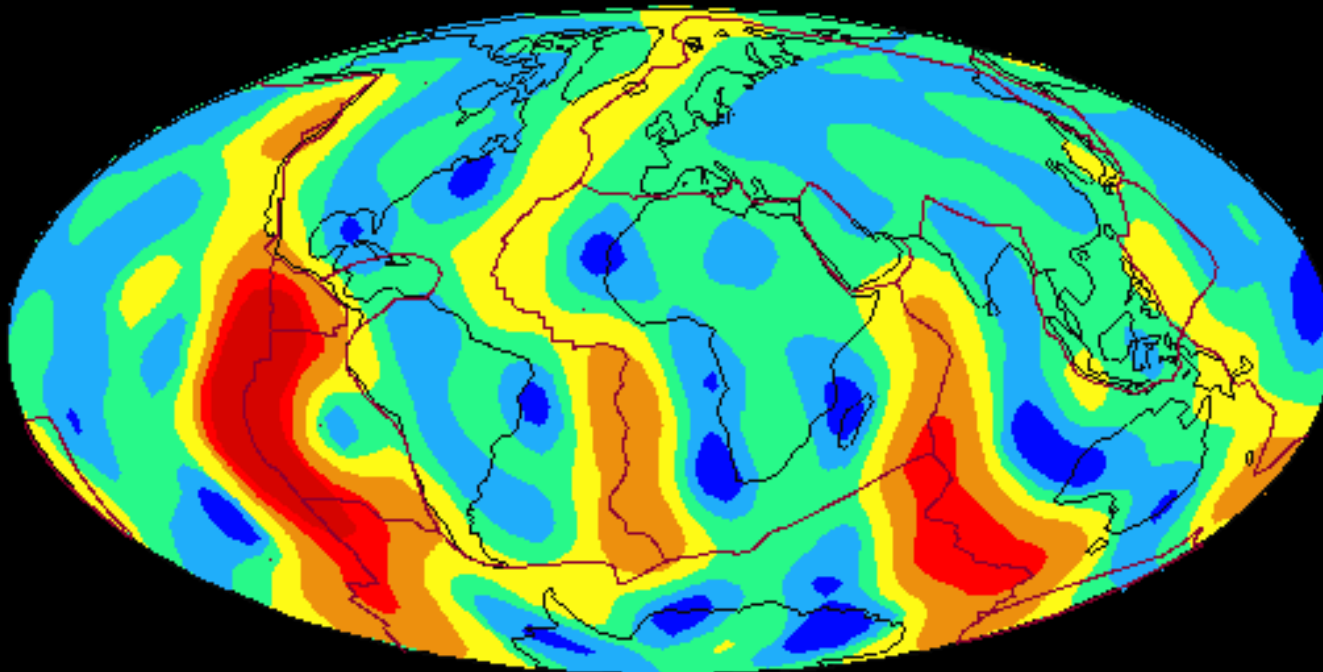
Αν ως ηλικία θεωρηθεί το τελευταίο θερμοτεκτονικό γεγονός το οποίο επηρέασε την ηπειρωτική λιθόσφαιρα (C: Καινοζωικός, M: Μεσοζωικός, LPa: Ανώτερος Παλαιοζωικός, EPa: Κατώτερος Παλαιοζωικός, LPr: Ανώτερος Προτεροζωικός, EPr: Κατώτερος Προτεροζωικός, A: Αζωικός)



Η μεταφορά θερμότητας από τη μια περιοχή της Γης σε άλλη, αυξάνεται με την κίνηση κατακόρυφων και οριζόντιων θερμικών ρευμάτων μέσα στο ανώτατο τμήμα του μανδύα. Η κίνηση αυτών των θερμικών ρευμάτων διευκολύνει την κίνηση των λιθοσφαιρικών πλακών.

Χωρική κατανομή της ολικής ροής θερμότητας

Ροή θερμότητας



Το 70% της ολικής ροής θερμότητας από το εσωτερικό της Γης πραγματοποιείται στους ωκεανούς και το 30% στις ηπείρους.

Πηγές Θερμότητας στο Εσωτερικό της Γης

Για να ερμηνευθεί η σχετικά υψηλή θερμοκρασία του εσωτερικού της Γης σήμερα ($\sim 6000^{\circ}\text{C}$) και η ροή θερμότητας από το εσωτερικό της προς τα έξω, είναι απαραίτητο να δεχθούμε την ύπαρξη πηγών θερμότητας στο εσωτερικό της Γης.

Πιθανές πηγές θερμότητας:

- ❖ Παραγωγή θερμότητας από τη ραδιενέργεια
- ❖ Παραγωγή θερμότητας κατά το σχηματισμό της Γης
- ❖ Παραγωγή θερμότητας από την ενέργεια περιστροφής της Γης
- ❖ Παραγωγή θερμότητας κατά το σχηματισμό του πυρήνα της Γης

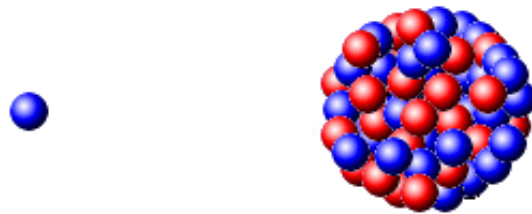
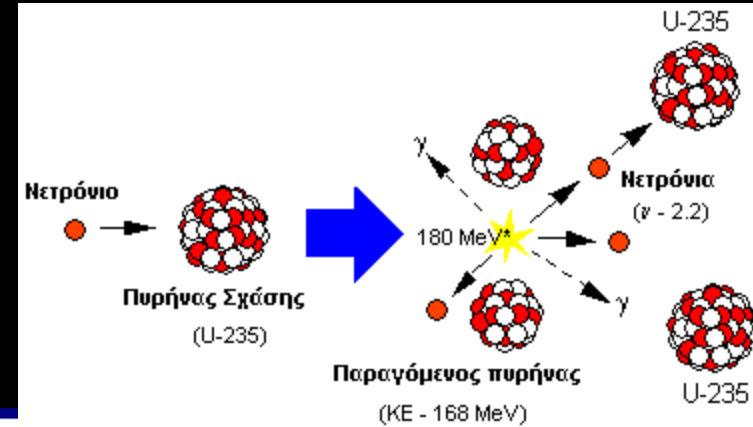


Παραγωγή θερμότητας από τη ραδιενέργεια

Κατά τη μεταστοιχείωση ραδιενεργών πυρήνων παράγονται ακτίνες γ και μεγάλης ενέργειας σωματία α και β , η ενέργεια των οποίων μετατρέπεται σε θερμότητα. Η κινητική ενέργεια, E , του σωματίου α είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την ενέργεια του σωματίου β και δίνεται από τη σχέση:

$$\ln T = \frac{A}{\sqrt{E}} - B \quad (4.17)$$

T είναι ο χρόνος υποδιπλασιασμού των ραδιενεργών πυρήνων
 A, B σταθερές



Παραγωγή θερμότητας από τη ραδιενέργεια

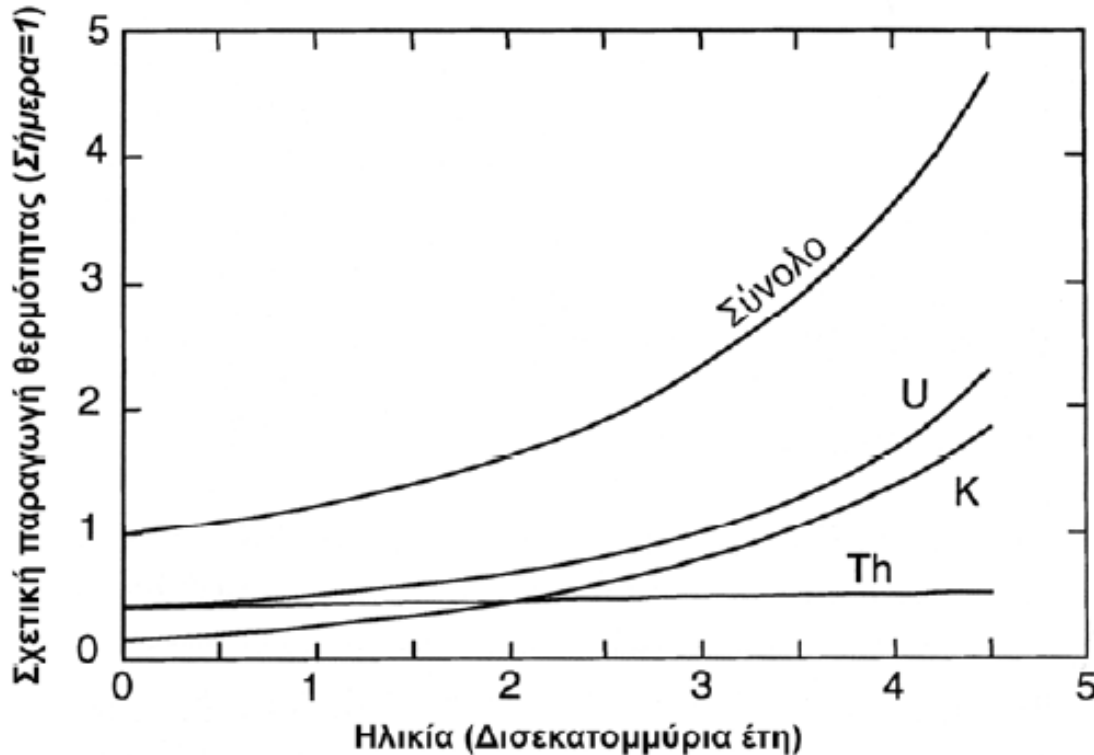
Τα βασικά ραδιενεργά ισότοπα τα οποία βρίσκονται σε αφθονία και έχουν χρόνους ζωής τέτοιους που να επηρεάζουν τη γεωλογική ιστορία της Γης είναι τα ισότοπα του ουρανίου, ^{238}U και ^{235}U , και τα ραδιενεργά ισότοπα του καλίου και θορίου, ^{40}K και ^{232}Th .

Οι χρόνοι υποδιπλασιασμού των ισοτόπων αυτών είναι **4.5, 0.71, 13.9, και 1.3** δισεκατομμύρια έτη, αντίστοιχα.

Αν θεωρήσουμε ολόκληρη τη Γη, η αναλογία $^{40}\text{K}:$ $^{232}\text{Th}:$ ^{238}U είναι σήμερα περίπου **200ppm:74ppm:20ppm**.

Παρά την αναλογία αυτή, η ενέργεια που παράγεται από τη ραδιενεργή διάσπαση του ουρανίου είναι μεγαλύτερη από του θορίου και πολύ μεγαλύτερη από αυτή του ^{40}K . Έτσι σήμερα το 43% της θερμότητας της Γης από ραδιενέργεια παράγεται από το U (σχεδόν αποκλειστικά ^{238}U), το 42% από το ^{232}Th και το 15% από το ^{40}K .

Παραγωγή θερμότητας από τη ραδιενέργεια



Από το σχήμα είναι εμφανές ότι:

❖ Η παραγωγή ενέργειας από τη ραδιενέργεια κατά τα πρώτα στάδια ήταν τέσσερις με πέντε φορές μεγαλύτερη από ότι σήμερα

❖ Ο ρόλος του ^{40}K ήταν πολύ πιο σημαντικός από ότι σήμερα

Μεταβολή της σχετικής παραγωγής θερμότητας με το γεωλογικό χρόνο, για το σύνολο και για κάθε ραδιενεργό στοιχείο (Παπαζάχος 2008, τροποποιημένο από Van Schmus, 1984).

Ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας είναι σήμερα $3.9 \times 10^{-10} \text{WKg}^{-1}$ για το γρανίτη και $0.8 \times 10^{-10} \text{WKg}^{-1}$ για το βασάλτη.

Η μεγαλύτερη συγκέντρωση ραδιενεργού υλικού στο γρανίτη από ότι στο βασάλτη δικαιολογεί το σημαντικά μεγαλύτερο ρυθμό παραγωγής θερμότητας στον ηπειρωτικό φλοιό, ο οποίος περιλαμβάνει και γρανίτες, από το ρυθμό της παραγωγής αυτής στον ωκεάνιο φλοιό, ο οποίος περιλαμβάνει κυρίως βασαλτικά υλικά.

Όμως όπως είδαμε, η μέση ροή θερμότητας στη βάση του ηπειρωτικού φλοιού ηλικίας $>300 \text{Ma}$ είναι παρόμοια (25mW/m^2) αλλά μικρότερη από την μέση ροή θερμότητας της παλαιότερης ωκεάνιας λιθόσφαιρας ($\sim 49 \text{mW/m}^2$).

Στη φαινόμενη αυτή αντίφαση δόθηκαν δύο πιθανές ερμηνείες:

1. Ενώ στις ηπείρους τα ραδιενεργά υλικά βρίσκονται κυρίως στο φλοιό, κάτω από τους ωκεανούς τα ραδιενεργά υλικά βρίσκονται κυρίως μέσα στον ανώτερο μανδύα, γιατί δεν έχουν υποστεί ακόμα κάποιο επιλεκτικό διαχωρισμό ο οποίος θα τα συγκέντρωνε στο φλοιό.
2. Ανοδικά θερμά ρεύματα μεταφοράς κάτω από την ωκεάνια λιθόσφαιρα συμβάλλουν στην αύξηση της ροής θερμότητας κάτω από τους ωκεανούς με συνέπεια η ροή αυτή να είναι μεγαλύτερη στους ωκεανούς από ότι στη βάση του ηπειρωτικού φλοιού.

Καμία από τις δύο αυτές απόψεις δεν αποκλείει την άλλη

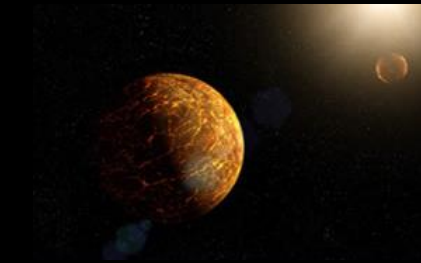
Αν θεωρήσουμε ότι η Γη είχε μία μέση χονδρική σύσταση, αντίστοιχη με αυτή του πρωταρχικού μανδύα και δεν ακτινοβολούσε καθόλου θερμότητα στο διάστημα, τότε η ραδιοακτινοβολία των παραπάνω ραδιενεργών ισοτόπων μεγάλου χρόνου ζωής θα ανέβαζε τη θερμοκρασία της Γης σε **1800°C**. Απ' αυτό προκύπτει ότι η θερμότητα που παράγεται μόνο λόγω των ραδιενεργών διασπάσεων των τεσσάρων ισοτόπων μεγάλου χρόνου ζωής δεν επαρκεί για να ερμηνεύσει την παρούσα θερμοκρασία του εσωτερικού της Γης.



Υπάρχουν ορισμένα ισότοπα στη Γη, όπως είναι τα **A¹²⁶**, **C¹³⁶** και **Fe⁶⁰**, που έχουν μικρούς χρόνους υποδιπλασιασμού. Το πρώτο απ' αυτά έχει χρόνο υποδιπλασιασμού **0.73Ma**, ενώ καθένα από τα άλλα δυο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού **0.3Ma**. Η ραδιενέργεια των ισοτόπων αυτών και ιδίως του πρώτου είναι δυνατό να συνέβαλε στην αύξηση της θερμοκρασίας της Γης κατά το αρχικό στάδιο σχηματισμού της, αν το στάδιο αυτό διήρκησε σχετικά μικρό χρόνο.

Παραγωγή θερμότητας κατά το σχηματισμό της Γης

Κατά το σχηματισμό της Γης, είναι δυνατό να παράχθηκε θερμότητα λόγω της πτώσης σωμάτων πάνω της και λόγω της προοδευτικής αύξησης της αδιαβατικής συμπίεσης.



Σύμφωνα με το φαινόμενο αυτό, κατά το σχηματισμό της Γης, η μάζα της αυξανόταν προοδευτικά με το χρόνο, λόγω της πτώσης πάνω της σωμάτων. Τα σώματα αυτά, λόγω της μεγάλης ταχύτητάς τους, είχαν μεγάλη κινητική ενέργεια, η οποία, κατά την πρόσπτυσή τους πάνω στη Γη, μετατράπηκε σε θερμότητα και σε σεισμική ενέργεια στη γειτονιά του σημείου πτώσης.

Η θερμότητα πιθανότατα ακτινοβολήθηκε ολόκληρη σχεδόν στο διάστημα ενώ η σεισμική ενέργεια, η οποία αντιπροσωπεύει ποσοστό της τάξης του **0.1%** της κινητικής ενέργειας των προσπιπτόντων σωμάτων, μετατράπηκε τελικά σε θερμότητα λόγω της ανελαστικής παραμόρφωσης των πετρωμάτων της Γης. Υπολογίζεται ότι όλη η θερμότητα, που παράχθηκε κατά τον τρόπο αυτό, μπορεί να ανύψωσε τη θερμοκρασία της Γης κατά **30°C**.

Μεγαλύτερης σημασίας ήταν η αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της αδιαβατικής συμπίεσης, καθώς η πίεση του εσωτερικού της Γης αύξανε προοδευτικά λόγω της πτώσης σωμάτων πάνω της κατά τον σχηματισμό της.

Η αδιαβατική βαθμίδα, dT/dP , που παριστάνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας λόγω μεταβολής της πίεσης ενός μονωμένου θερμικά σώματος (μηδενική μεταβολή εντροπίας) δίνεται από τη σχέση:

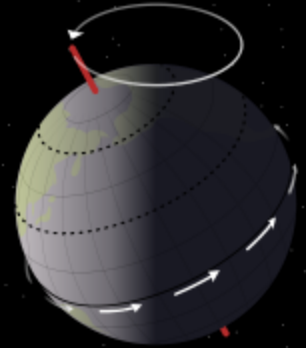
$$\frac{dT}{dP} = a \frac{T}{\rho C_p} \quad (4.18)$$

ρ είναι η πυκνότητα του υλικού
 a ο συντελεστής θερμικής διαστολής
 C_p η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση.

Από τη σχέση αυτή βρίσκεται ότι για τη Γη η αδιαβατική βαθμίδα, για μία αρχική θερμοκρασία $T=750^\circ\text{K}$ είναι $dT/dP=0.3^\circ\text{C/kbar}$. Αν λάβουμε υπ' όψη ότι η πίεση στο κέντρο της Γης, κατά το σχηματισμό της, ήταν της τάξης των **3000kbar**, τότε η αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της αδιαβατικής συμπίεσης θα ήταν περίπου **900°C** στο κέντρο της Γης και θα ελαττωνόταν σταδιακά προς τα έξω.

Παραγωγή θερμότητας από την ενέργεια περιστροφής της Γης

Ως πιθανή πηγή θερμότητας θεωρείται η μετατροπή σε θερμική ενέργεια μέρους της κινητικής ενέργειας της Γης επειδή ελαττώνεται η ταχύτητα περιστροφής αυτής.



Στοιχεία δείχνουν ότι ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής της Γης, αμέσως μετά το σχηματισμό της ήταν ίσως μικρότερος από 10 ώρες. Η ελάττωση της ταχύτητας περιστροφής της Γης είναι αποτέλεσμα κυρίως της παλιρροιακής τριβής λόγω της έλξης της Σελήνης.

Ενώ τμήμα της ενέργειας που χάνεται από την παλιρροιακή τριβή μεταφέρεται στη Σελήνη, σημαντικό τμήμα μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια.

Συνεπώς, κατά την αύξηση του χρόνου περιστροφής από 10 σε 24 ώρες, η Γη έχασε σημαντική κινητική ενέργεια περιστροφής, τμήμα της οποίας μετατράπηκε σε θερμότητα.

Το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας αυτής μετατράπηκε σε θερμότητα στους ωκεανούς με τις θαλάσσιες παλίρροιες. Μέρος όμως αυτής της ενέργειας μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω των παλιρροιών της στερεάς Γης. Συνέπεια αυτού ήταν η αύξηση της θερμοκρασίας του εσωτερικού της Γης περίπου **200°C**.

Παραγωγή θερμότητας κατά το σχηματισμό του πυρήνα της Γης

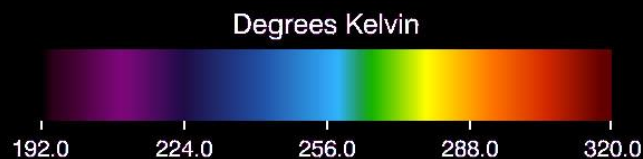
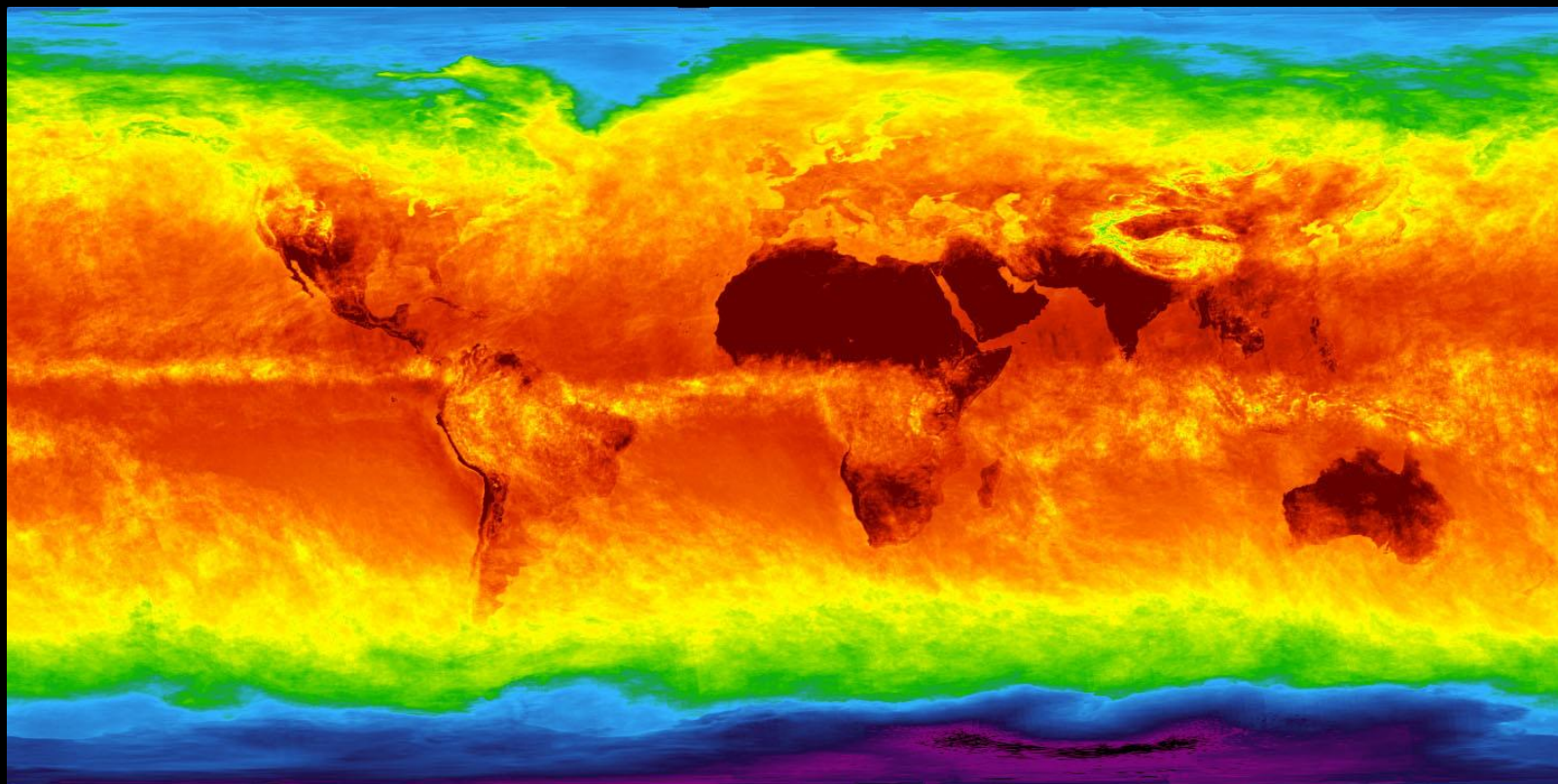
Υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι η Γη σχηματίσθηκε από σχεδόν ομογενές υλικό, το οποίο στη συνέχεια διαφοροποιήθηκε

Τα υλικά μεγαλύτερης πυκνότητας μετακινήθηκαν προς το κέντρο της Γης ενώ τα ελαφρότερα υλικά μετακινήθηκαν προς την επιφάνειά της και έτσι σχηματίσθηκαν ο μανδύας και ο πυρήνας.

Κατά τις μετακινήσεις αυτές, δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω αύξησης της πίεσης, καθώς και λόγω τριβών και της ιξώδους ροής. Κατά τις μετακινήσεις αυτές, δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω αύξησης της πίεσης, καθώς και λόγω τριβών και της ιξώδους ροής.

Μικρό μέρος της θερμότητας που παράχθηκε με τον παραπάνω τρόπο δαπανήθηκε για την τήξη του υλικού του πυρήνα, αλλά το μεγαλύτερο μέρος της δαπανήθηκε για την ανύψωση της θερμοκρασίας της Γης. Η αύξηση αυτή υπολογίζεται σε **1500°C** περίπου.

Παγκόσμιος Χάρτης Θερμοκρασίας (Απρίλιος 2003)



Παγκόσμιος χάρτης Θερμοκρασίας (από δορυφόρο της NASA) . Οι θερμοκρασίες ποικίλουν από -81°C ($-114^{\circ}\text{Fahrenheit}$) απόμαύρο/μπλέ έως και 47°C (116°F) κόκκινο χρώμα.

Η Θερμοκρασία στο Εσωτερικό της Γης

Η σχετικώς μεγάλη θερμοβαθμίδα, **20°C/km**, που μετρήθηκε κοντά στην επιφάνεια της Γης, δεν διατηρείται σε μεγαλύτερα βάθη μέσα στη Γη, γιατί αν αυτό συνέβαινε το υλικό του μανδύα θα έλειωνε σε σχετικά μικρό βάθος ενώ είναι γνωστό από σεισμολογικά δεδομένα ότι ο μανδύας βρίσκεται σε στερεή κατάσταση.

Διάφορες προσπάθειες έχουν καταβληθεί για την εκτίμηση της θερμοκρασίας σε διάφορα βάθη με βάση ορισμένες υποθέσεις και αποτελέσματα εργαστηριακών πειραμάτων. Έτσι λοιπόν:

➤ Η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα, είναι γνωστή η σχέση της με τη θερμοκρασία και η μεταβολή της με το βάθος μέσα στο μανδύα.

➤ Οι ταχύτητες των σεισμικών κυμάτων χώρου και η πίεση, των οποίων οι μεταβολές με το βάθος είναι επίσης γνωστές, χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της μεταβολής της θερμοκρασίας αλλά και του σημείου τήξης με το βάθος στο μανδύα.

➤ Η βασική υπόθεση που γίνεται για τον καθορισμό της θερμοκρασίας στον πυρήνα αλλά και στο μεγαλύτερο τμήμα του μανδύα είναι ότι η θερμική μεταβολή εκεί είναι αδιαβατική.

Προσδιορισμός της θερμοκρασίας στο μανδύα της Γης

Από θεωρητικές και πειραματικές παρατηρήσεις προκύπτει ότι υπάρχει σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας και της ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας των υλικών από τα οποία αποτελείται ο μανδύας. Η σχέση αυτή είναι της μορφής:

$$\sigma = \sigma_1 e^{-E_1/2KT} + \sigma_2 e^{-E_2/2KT} \quad (1)$$

παριστάνει την ηλεκτρική αγωγιμότητα που οφείλεται στα ηλεκτρόνια

παριστάνει την αγωγιμότητα που οφείλεται στα ιόντα

σ_1 και σ_2 είναι σταθερές που εξαρτώνται από το υλικό

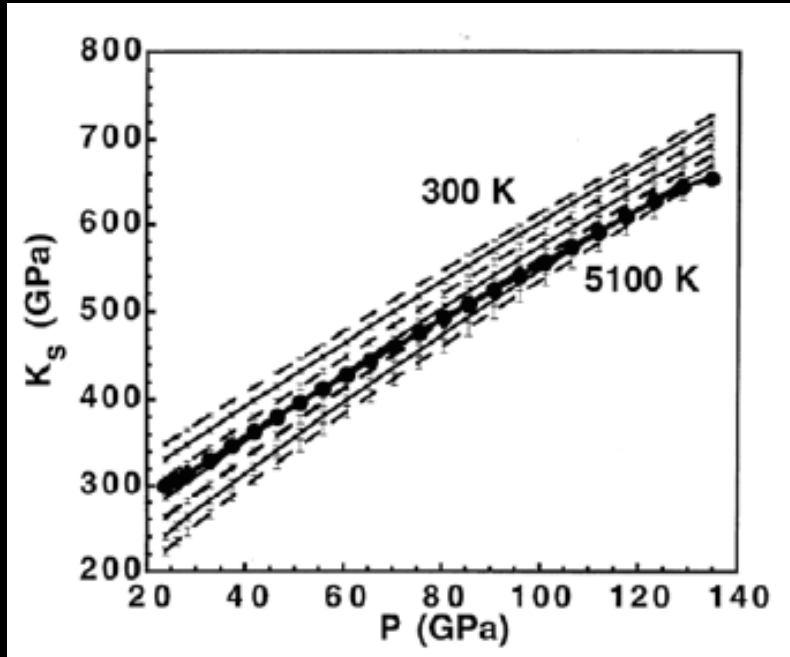
E_1 και E_2 είναι οι ενέργειες διέγερσης που εξαρτώνται από το υλικό

K είναι η σταθερά του Boltzmann

T η θερμοκρασία

Η σχέση (1) μπορεί να εφαρμοσθεί για τον υπολογισμό της θερμοκρασίας σε συνάρτηση με το βάθος, αφού γνωρίζουμε τη μεταβολή της ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας με το βάθος. Εντούτοις, ο καθορισμός της θερμοκρασίας με αυτόν τον τρόπο επηρεάζεται πολύ από τις αβεβαιότητες που αφορούν τη σύσταση του μανδύα.

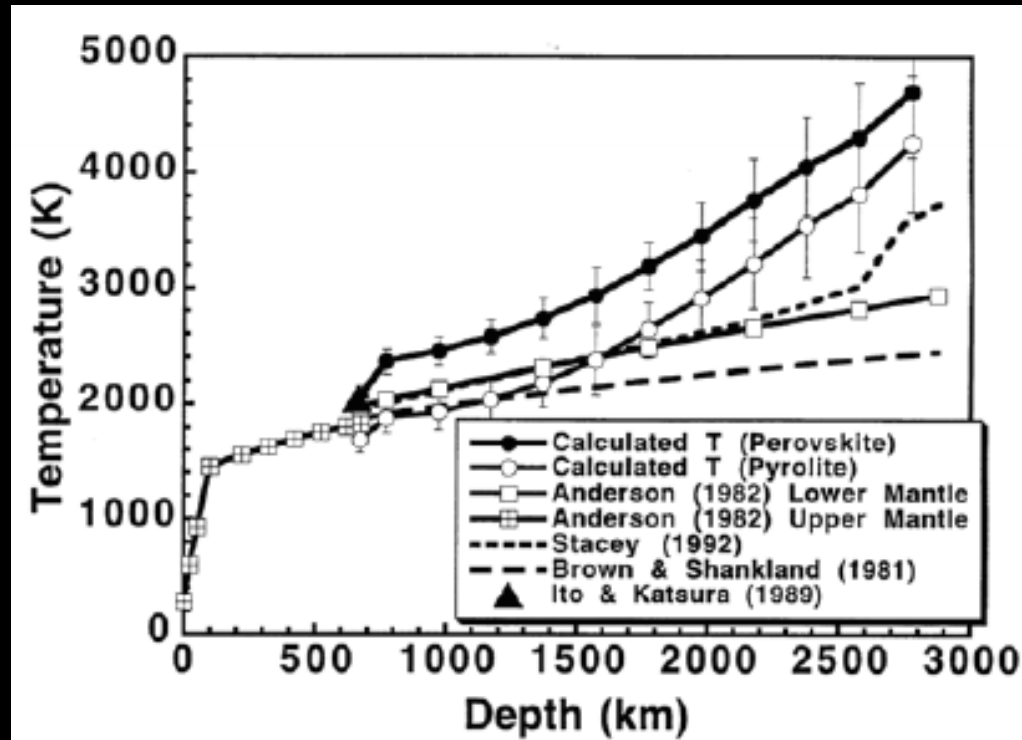
Πρόσφατες έρευνες δείχνουν πως ο προσδιορισμός της θερμοκρασίας με τη χρήση άλλων γεωφυσικών παραμέτρων και κυρίως των μέτρων ελαστικότητας δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα.



Παρατηρούνται θερμοκρασίες οι οποίες ξεκινούν από περίπου 2300°K (~2000°C) κάτω από τη μεταβατική ζώνη και φτάνουν τους ~4300°K (~4000°C) στο όριο μανδύα-πυρήνα.

Μεταβολή του μέτρου κυβικής διαστολής (K) με την πίεση για διάφορες θερμοκρασίες, όπως αυτή προκύπτει από μοντέλα καταστατικών νόμων για τον **Mg-περοβκίτη** και για πιέσεις που αντιστοιχούν σε ολόκληρο τον κάτω μανδύα (διακεκομμένες γραμμές). Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται για σύγκριση η παρατηρημένη μεταβολή του K (μαύροι κύκλοι και συνεχόμενη γραμμή), όπως αυτή προκύπτει από το μοντέλο PREM, παρουσιάζεται για σύγκριση. Η κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε μεταβολή θερμοκρασίας κατά **800°K** (da Silva et al., 2000).

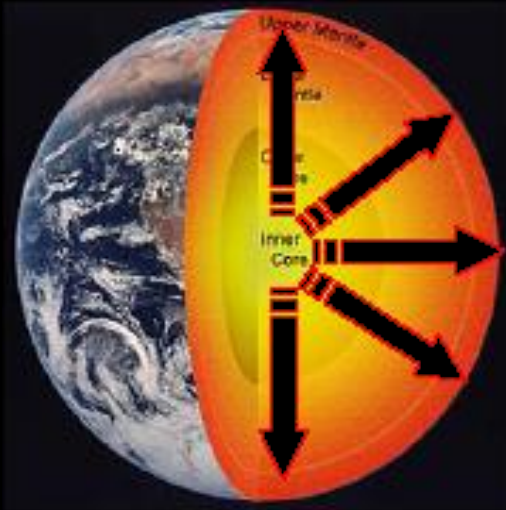
Αν οι ίδιοι υπολογισμοί γίνουν για πυρολιτική σύσταση του κάτω μανδύα, οι αντίστοιχες θερμοκρασίες μειώνονται κατά **300-600°C**, δείχνοντας τη σημαντική επίδραση της σύστασης του μανδύα (και των αβεβαιοτήτων της) στην εκτίμηση της κατανομής θερμοκρασίας.



Μεταβολή της θερμοκρασίας μέσα στη Γη, για τον Mg-περοβσκίτη και αντίστοιχη μεταβολή για πυρολιτική σύσταση του κάτω μανδύα. Παρουσιάζεται επίσης ένα μοντέλο σχεδόν αδιαβατικής μεταβολής της θερμοκρασίας μέσα στο μανδύα, το οποίο εμφανίζει σαφείς αποκλίσεις για βάθη **>1500km**.
(Παπαζάχος 2008, τροποποιημένο από da Silva et al., 2000)

Προσδιορισμός της θερμοκρασίας στον πυρήνα της Γης

Για τον υπολογισμό της μεταβολής της θερμοκρασίας μέσα στον πυρήνα, βασιζόμαστε στο γεγονός ότι η θερμοκρασία στο όριο του μανδύα και του πυρήνα είναι συνεχής και στην υπόθεση ότι η θερμική μεταβολή μέσα στον πυρήνα είναι περίπου αδιαβατική. Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση:



$$\frac{dT}{dz} = \frac{gaT}{C_p} \quad (4.20)$$

Αρχίζοντας την εφαρμογή της σχέσης αυτής από το όριο μεταξύ πυρήνα και μανδύα, όπου η θερμοκρασία είναι γνωστή γιατί αυτή προσδιορίστηκε από τα δύο προηγούμενα σχήματα ή από τη σχέση 4.19, υπολογίζουμε τη θερμοκρασία σε συνάρτηση με το βάθος.

Το σημείο τήξης στο μανδύα και στον πυρήνα

Βασικό κριτήριο για το αν μια περιοχή της Γης βρίσκεται σε στερεά ή υγρή κατάσταση είναι η διαπίστωση για το αν διαδίδονται ή όχι μέσα σε αυτή τα εγκάρσια σεισμικά κύματα.

Ο **Uffen** (1952) θεώρησε την ακόλουθη σχέση μεταξύ των σημείων τήξης, γ_0 , γ_1 , των ταχυτήτων, α_0 , α_1 , των επιμηκών σεισμικών κυμάτων και των ταχυτήτων, β_0 , β_1 , των εγκάρσιων σεισμικών κυμάτων, σε δυο διαφορετικά σημεία (0 και 1) του μανδύα.

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = \left(\frac{\beta_0^3 + 2\alpha_0^3}{\beta_1^3 + 2\alpha_1^3} \right)^{2/3} \left(\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_0\beta_0} \right)^2 \quad (2)$$

Η σχέση αυτή ισχύει όταν το μοριακό βάρος του υλικού του μανδύα είναι το ίδιο στα δύο σημεία.

Ο **Simon** (1937) πρότεινε την ακόλουθη ημιαμπειρική σχέση μεταξύ της πίεσης, **P**, και του σημείου τήξης, **γ**,

$$P = A \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^c - 1 \right] \quad (3)$$

γ₀ είναι το σημείο τήξης του υλικού υπό ατμοσφαιρική πίεση

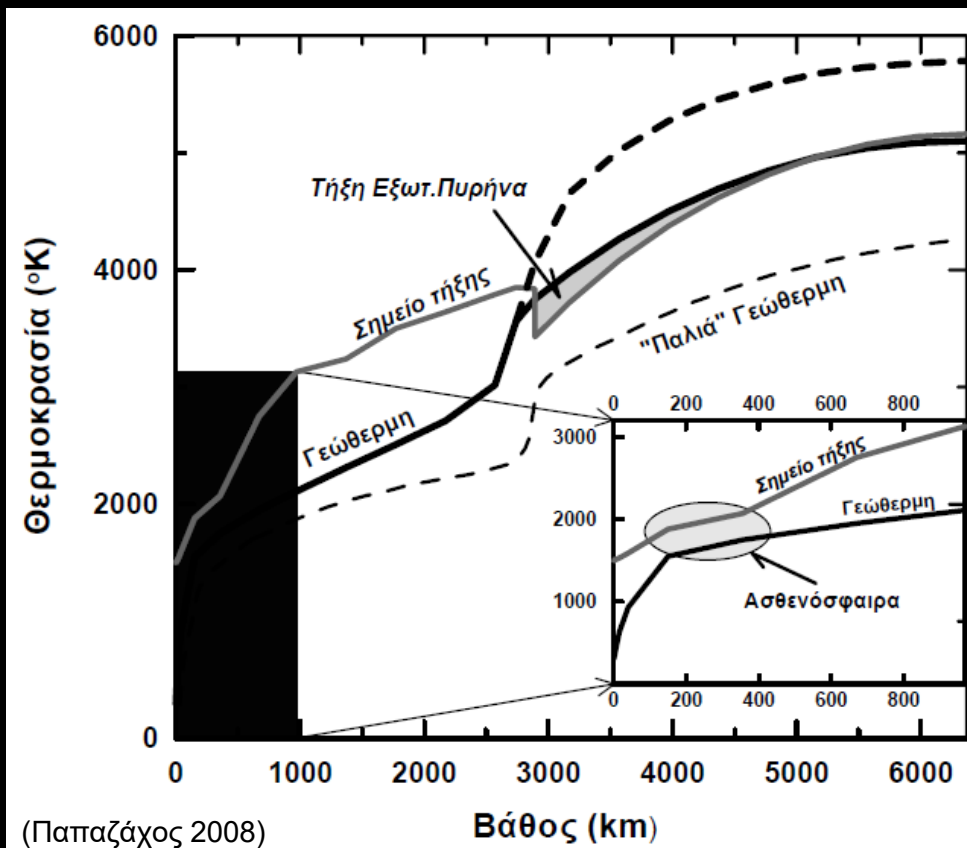
A, **c** είναι παράμετροι, που εξαρτώνται από το υλικό και υπολογίζονται πειραματικά

Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της μεταβολής της θερμοκρασίας και μέσα στον πυρήνα.

Πρόσφατα αποτελέσματα για τη θερμοκρασία του εσωτερικού της Γης

Την τελευταία δεκαετία νέα εργαστηριακά πειράματα, αλλά και θεωρητικές έρευνες, έχουν επιτρέψει τον ακριβέστερο καθορισμό της μεταβολής της θερμοκρασίας στο μανδύα (κυρίως στον κάτω μανδύα) και τον πυρήνα της Γης (Jeanloz, 1988; da Silva et al., 2000). Τα αποτελέσματα αυτά έχουν ανατρέψει την εικόνα που υπήρχε για την κατανομή των θερμοκρασιών μέσα στη Γη, δείχνοντας ότι οι θερμοκρασίες αυτές είναι πιθανότατα μεγαλύτερες από ότι θεωρούσαμε πριν από είκοσι χρόνια.





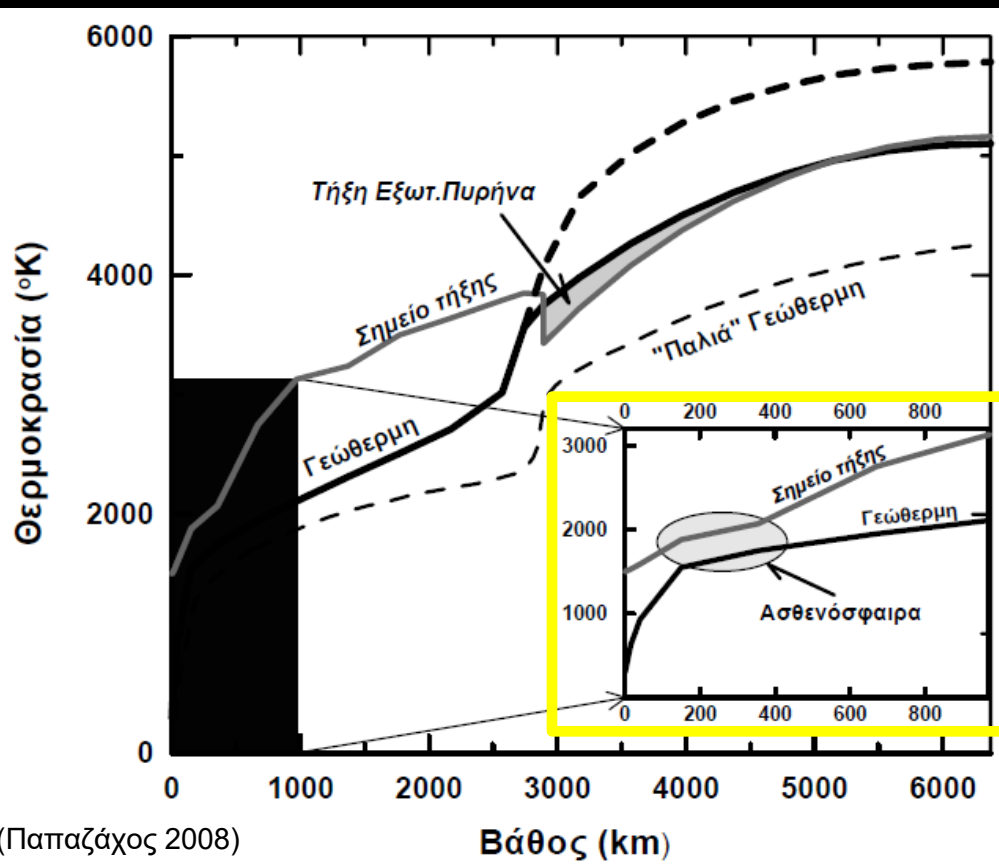
(Παπαζάχος 2008)

Τα πρόσφατα στοιχεία δείχνουν γενικά μεγαλύτερες τιμές θερμοκρασίας από ότι τα παλαιότερα μοντέλα, τα οποία θεωρούσαν σχεδόν αδιαβατική μεταβολή θερμοκρασίας στο μανδύα

παρατηρούνται σημαντικές αβεβαιότητες και διαφορές των θερμοκρασιακών μοντέλων που έχουν προταθεί για τον πυρήνα της

Μόνο στον εξωτερικό πυρήνα η θερμοκρασία της Γης ξεπερνά το σημείο τήξης, με αποτέλεσμα αυτός να βρίσκεται σε υγρή φάση

Πιθανότερη μεταβολή της θερμοκρασίας, T (σε K), με το βάθος, όπως προκύπτει από πρόσφατα δεδομένα (συνεχής μαύρη καμπύλη) και από παλαιότερα στοιχεία (διακεκομμένη λεπτή καμπύλη). Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται και η μεταβολή του σημείου τήξης (συνεχής γκρι καμπύλη), καθώς και μία εναλλακτική μεταβολή της θερμοκρασίας στον πυρήνα της Γης (διακεκομμένη έντονη γραμμή) η οποία αποτελεί το πάνω όριο των σημερινών εκτιμήσεων.



Η περιοχή αυτή δείχνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας και του σημείου τήξης στα ανώτερα **1000km**

Στον άνω μανδύα και κυρίως στα βάθη **120-300km** η θερμοκρασία πλησιάζει σημαντικά το σημείο τήξης. Η περιοχή αυτή συμπίπτει με το κεντρικό τμήμα της ασθενόσφαιρας.

(Παπαζάχος 2008)

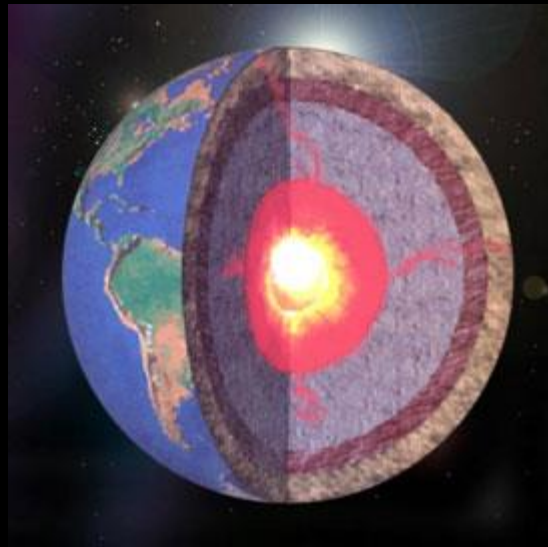
Όσο πλησιάζουμε το σημείο τήξης, οι μοριακοί δεσμοί αποκτούν σημαντικά μεγαλύτερη θερμική ενέργεια («χαλαρώνουν») με αποτέλεσμα τη μείωση των μέτρων ελαστικότητας και της ταχύτητας των κυμάτων χώρου, ιδίως των εγκαρσίων κυμάτων. Η επίδραση αυτή της θερμοκρασίας υπερνικά την αντίστοιχη αύξηση των ταχυτήτων λόγω αύξησης της πίεσης (με το βάθος) με αποτέλεσμα την εμφάνιση μίας περιοχής χαμηλών ταχυτήτων και τη δημιουργία της ασθενόσφαιρας, η οποία παίζει καταλυτικό ρόλο στην παγκόσμια γεωδυναμική.

Η Εξίσωση της Θερμικής Αγωγιμότητας και οι Εφαρμογές της

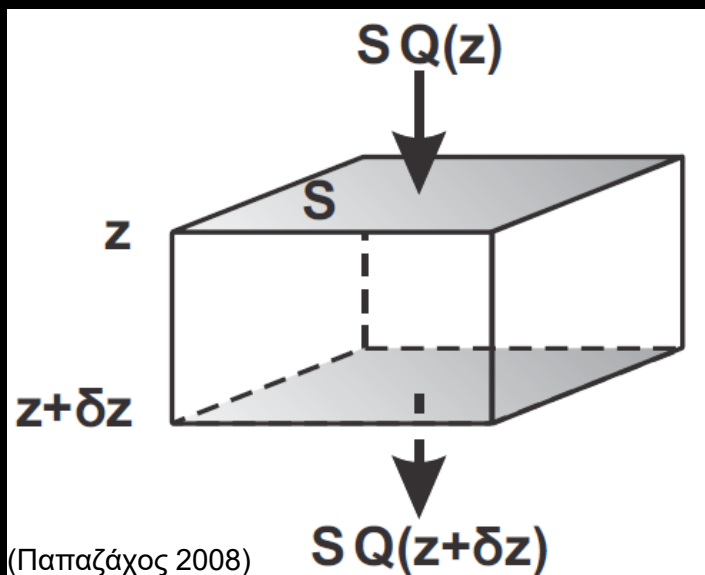
Η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας είναι η θεμελιώδης διαφορική εξίσωση που καθορίζει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος με το χρόνο.

Οι βασικές παράμετροι που επηρεάζουν την εξίσωση είναι:

- α)** η ροή θερμότητας που εισέρχεται και εξέρχεται από το σώμα,
- β)** οι παράμετροι που καθορίζουν τις ιδιότητες του υλικού του σώματος (πυκνότητα, συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας, ειδική θερμότητα) και,
- γ)** ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας ανά μονάδα όγκου (ή μάζας) του σώματος.



Θεωρούμε αρχικά την απλή περίπτωση κατά την οποία η θερμότητα διαδίδεται σε ένα στοιχειώδες σώμα κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.



Έστω ότι η οριζόντια επιφάνεια του σώματος είναι S , το ύψος του είναι δz και η ροή θερμότητας, δηλαδή η θερμότητα που εισέρχεται κατακόρυφα στο σώμα ανά μονάδα χρόνου και μονάδα επιφάνειας είναι $Q(z)$.

Η θερμότητα που εισέρχεται στο σώμα ανά μονάδα χρόνου είναι $S \cdot Q(z)$.

Η αντίστοιχη θερμότητα που εξέρχεται κατακόρυφα ανά μονάδα χρόνου από το σώμα είναι $S \cdot Q(z + \delta z)$ και σε πρώτη προσέγγιση είναι ίση με $S(Q(z) + (\partial Q / \partial z) \delta z)$ όπως προκύπτει από την ανάλυση σε σειρά Taylor της $Q(z + \delta z)$.

Συνεπώς, η συνολική θερμότητα που παραμένει στο σώμα ανά μονάδα χρόνου είναι $q_f = S \cdot Q(z) - S \cdot Q(z + \delta z)$ ή

$$q_f = -S \frac{\partial Q}{\partial z} \delta z \quad (4.23)$$

Αν μέσα στο σώμα παράγεται θερμότητα A ανά μονάδα χρόνου και μονάδα όγκου, η θερμότητα, q_g , που παράγεται σ' όλο το σώμα ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$q_g = A\delta V = AS\delta z \quad (4.24)$$

Συνεπώς, η συνολική μεταβολή της θερμότητας του σώματος ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$q_f + q_g = AS\delta z - S \frac{\partial Q}{\partial z} \delta z \quad (4.25)$$

Αν αυτή η μεταβολή της θερμότητας πραγματοποιηθεί σε χρόνο δt (παραγόμενη και εισερχόμενη θερμότητα μείον την εξερχόμενη θερμότητα), θα έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της θερμοκρασίας του σώματος κατά δT . Αν το υλικό του σώματος έχει πυκνότητα ρ και ειδική θερμότητα C_p , τότε αυτή η μεταβολή της θερμοκρασίας απαιτεί θερμότητα ανά μονάδα χρόνου, q_c , η οποία με βάση τον ορισμό της σχέσης (4.2) δίνεται από τη σχέση:

$$C_p = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{m} T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \quad (4.2) \quad \longrightarrow \quad q_c = C_p m \frac{\partial T}{\partial t} = C_p \rho S \delta z \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.26)$$

Αφού η συνολική θερμότητα ανά μονάδα χρόνου, \mathbf{q}_c , προέρχεται από την παραγωγή θερμότητας ανά μονάδα χρόνου, \mathbf{q}_g , και τη παραμένουσα θερμότητα ανά μονάδα χρόνου (εισερχόμενη μείον εξερχόμενη), \mathbf{q}_f , έχουμε $\mathbf{q}_c = \mathbf{q}_g + \mathbf{q}_f$, οπότε από τις σχέσεις (4.25) και (4.26) προκύπτει ότι:

$$C_p \rho \frac{dT}{dt} = A - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (4.27)$$

Από τη σχέση (4.27) και τον ορισμό της θερμικής αγωγιμότητας από το νόμο Fourier (σχέση 4.6) με παραγωγή ως προς z προκύπτει η εξίσωση:

$$q = \frac{Q}{St} \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A}{\rho C_p}$$

(4.6) (4.27)

Αποτελεί την εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας σε μία διάσταση και εκφράζει τη μεταβολή της θερμοκρασίας με το χρόνο, t , κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, z .

Γενικά, όταν η θερμοκρασία μεταβάλλεται με το χρόνο αλλά και στις τρεις διευθύνσεις (x,y,z) , η δεύτερη χωρική παράγωγος στη σχέση (4.28) περιλαμβάνει και τις άλλες δύο διαστάσεις, οπότε η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας γίνεται τρισδιάστατη και έχει τη μορφή:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{A}{\rho C_p} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho C_p} \quad (4.29)$$

Εκφράζει την ικανότητα του υλικού να αποβάλλει θερμότητα και γι' αυτό η ποσότητα $K = k / \rho C_p$ ονομάζεται **συντελεστής^p θερμικής διάχυσης**.

Εκφράζει την ικανότητα του υλικού να παράγει θερμότητα

Αν σε ένα τμήμα της Γης έχει επέλθει ισορροπία των διαφόρων ανταγωνιστικών παραγόντων της εξίσωσης (4.29), με αποτέλεσμα να έχουμε μία σταθερή κατάσταση (steady-state) χωρίς μεταβολή της θερμοκρασίας ($dT/dt=0$), τότε η εξίσωση (4.29) γίνεται:

$$\nabla^2 T = -\frac{A}{k} \quad (4.30)$$

ενώ όταν δεν υπάρχουν πηγές θερμότητας στο υλικό ($A=0$), η (4.29) γίνεται:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T = K \nabla^2 T \quad (4.31)$$

που είναι γνωστή ως **εξίσωση θερμικής διάχυσης**.

Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις η ανταλλαγή θερμότητας ανάμεσα στο στοιχειώδες σώμα και στο περιβάλλον του γίνεται **μόνο με αγωγή**, χωρίς καμία σχετική κίνηση του ίδιου του υλικού.

Αν υποθέσουμε ότι το στοιχειώδες σώμα (μικρό τμήμα της Γης), του οποίου μελετάμε τη μεταβολή της θερμοκρασίας λόγω αγωγιμότητας, δεν παραμένει σταθερό αλλά κινείται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση με ταχύτητα u_z , τότε η ολική παράγωγος της θερμοκρασίας στο πρώτο μέλος της (4.28) γίνεται:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

οπότε η εξίσωση (4.28) γίνεται:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A}{\rho C_p} - u_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.32)$$

όρος μεταφοράς (advective-transfer term)

Αντίστοιχα με τη μονοδιάστατη εξίσωση μπορεί να προκύψει και τρισδιάστατη από τη σχέση (4.29), οπότε έχουμε τη **γενική μορφή της εξίσωσης θερμότητας**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho C_p} - \bar{u} \cdot \bar{\nabla} T \quad (4.33)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης της θερμότητας παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες.

Λύνεται, όμως, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, δηλαδή για ορισμένες αρχικές συνθήκες και υποθέσεις που αφορούν συγκεκριμένα μοντέλα.

Οι λύσεις αυτές δίνουν απαντήσεις σε σημαντικά γεωθερμικά προβλήματα, όπως είναι:

- τα θερμικά μοντέλα της ωκεάνιας λιθόσφαιρας (HS, PSM, GDH1),
- ο υπολογισμός των γεώθερμων
- η μελέτη της θερμικής ιστορίας της Γης



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΦΥΣΙΚΗΣ – ΓΕΩΘΕΡΜΙΑΣ

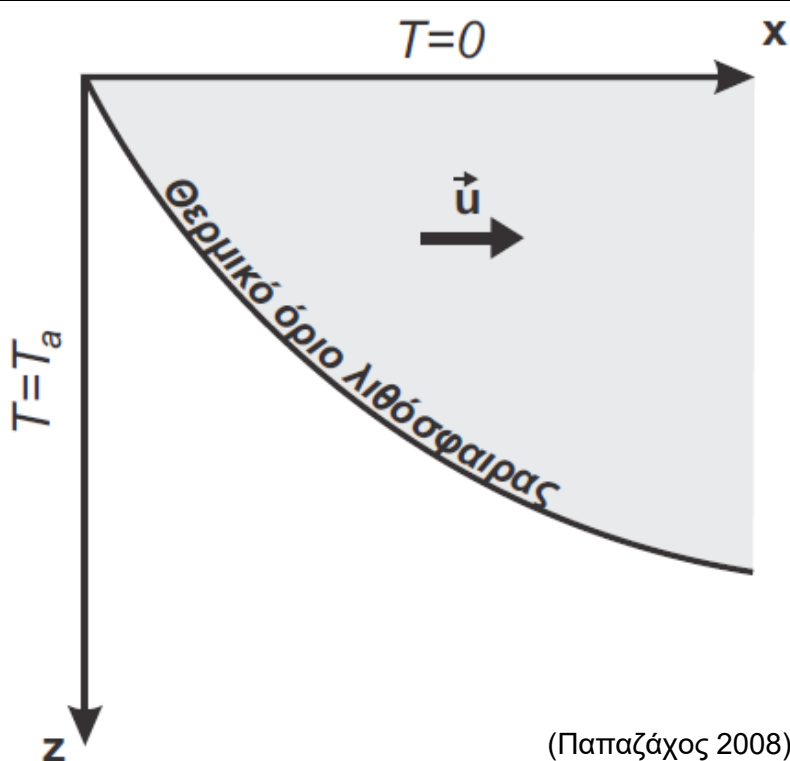
ΘΕΡΜΙΚΟ ΚΑΘΕΣΤΟΣ και ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ στο ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΤΗΣ ΓΗΣ Γεω-Θερμοδυναμική-II

Καθ. Φίλιππος Βαλλιανάτος

Το θερμικό μοντέλο ημιχώρου της ωκεάνιας λιθόσφαιρας

Το μοντέλο ημιχώρου (Half Space-HS) είναι ένα απλό μοντέλο που αφορά το σχηματισμό και την ψύξη της ωκεάνιας λιθόσφαιρας.

Σύμφωνα με αυτό η λιθόσφαιρα προέρχεται από ασθenoσφαιρικό υλικό που ψύχεται όταν ανέρχεται στη μεσωκεάνια ράχη.



Στο μοντέλο αυτό η θερμοκρασία στον άξονα της ράχης, T_a , είναι γνωστή και σταθερή και δεν υπάρχουν στη λιθόσφαιρα πηγές θερμότητας ($A=0$). Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε ότι η ράχη εκτείνεται απεριόριστα στη διεύθυνση y , δηλαδή έχουμε ένα απλό δισδιάστατο μοντέλο το οποίο είναι αμετάβλητο κατά τη διεύθυνση y ($\partial^2 T / \partial y^2 = 0$) ενώ το υλικό απομακρύνεται από τη ράχη με σταθερή ταχύτητα $u = u_x$.

Από τα προηγούμενα η σχέση (4.33) γίνεται:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - u_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.34)$$

οι δύο πρώτες παράγωγοι στο δεύτερο μέλος αναφέρονται στη μεταφορά της θερμότητας με αγωγή στις διευθύνσεις **x** (οριζόντια) και **z** (κατακόρυφα), αντίστοιχα, ενώ ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί στην οριζόντια διάδοση θερμότητας με μεταφορά (advective transfer).

Αν αναζητήσουμε τη λύση της εξίσωσης μετά από αρκετό χρονικό διάστημα οπότε το σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία (**$\partial T / \partial t = 0$, steady-state**) και αν θεωρήσουμε ότι το υλικό απομακρύνεται αρκετά γρήγορα από τη μεσωκεάνια ράχη ώστε η οριζόντια ροή θερμότητας με αγωγή να είναι ασήμαντη σε σχέση με την οριζόντια ροή θερμότητας με μεταφορά

$$(k / \rho C_p) (\partial^2 T / \partial x^2) \square u_x (\partial T / \partial x)$$

τότε η εξίσωση (4.34) μετατρέπεται στην :

$$(k / \rho C_p) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = u_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad 4.35$$

Η διαφορική εξίσωση (4.35) έχει απλή λύση, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$T(z, x) = T_a \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{Kx/u_x}} \right) = T_a \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{Kt}} \right) \quad (4.36)$$

erf η συνάρτηση σφάλματος

t=x/u_x ο χρόνος που έκανε κάθε σημείο που απέχει απόσταση x να φτάσει εκεί

$$Q(z) = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το νόμο **Fourier** για τη ροή θερμότητας, εύκολα βρίσκουμε ότι η ροή θερμότητας, **q(t)**, στη λιθόσφαιρα, σε χρόνο **t** μετά το σχηματισμό της στη μεσωκεάνια ράχη, δίνεται από τη σχέση:

$$q(t) = -\frac{kT_a}{\sqrt{\pi Kt}} \quad (4.37)$$

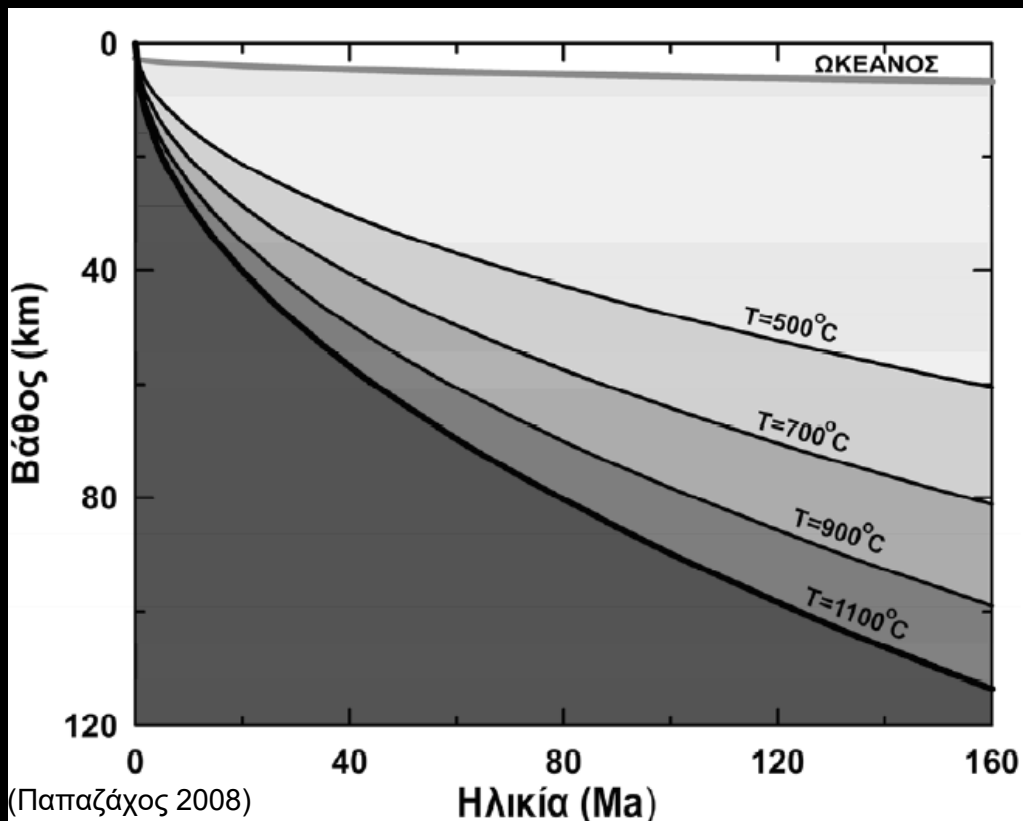
Δηλαδή η ροή θερμότητας ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου, t.

Η σχέση (4.36) επιτρέπει τον υπολογισμό της μορφής των ισόθερμων. Αν επιλέξουμε μία σταθερή θερμοκρασία $T_C=T(z,x)$, και επιλύσουμε την εξίσωση (4.36) ως προς z , εύκολα φαίνεται ότι η μορφή των ισόθερμων δίνεται από τη σχέση:

$$z = \left[2\sqrt{K / u_x} \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{T_C}{T_a}\right) \right] x^{1/2} = \left[2\sqrt{K} \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{T_C}{T_a}\right) \right] t^{1/2} \quad (4.38)$$

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε τις ισόθερμες μίας ωκεάνιας λιθόσφαιρας γνωρίζοντας το συντελεστή θερμικής διάχυσης, K , και τη θερμοκρασία T_a , στη μεσωκεάνια ράχη. Επιπλέον μας επιτρέπει και έναν διαφορετικό (θερμικό και όχι μηχανικό) ορισμό της λιθόσφαιρας.

Θεωρώντας τυπικές τιμές για την ωκεάνια λιθόσφαιρα στη σχέση (4.38) ($K=0.8 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ και $T_a=1350^\circ\text{C}$) παίρνουμε τις ισόθερμες που παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα:



Ισόθερμες και επιφανειακή βυθομετρία του μοντέλου ημικύριου για την ωκεάνια λιθόσφαιρα. Η ισόθερμη των 1100°C στο σχήμα αντιπροσωπεύει το θερμικό όριο της λιθόσφαιρας.

Αν υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία στη ράχη είναι 1350°C και η θερμοκρασία στη βάση της λιθόσφαιρας πλησιάζει στο σημείο τήξης του πυρολιθικού μανδύα στα τυπικά βάθη του ανώτερου μανδύα, δηλαδή είναι π.χ. 1100°C , η σχέση (4.38) μπορεί να θεωρηθεί ότι προσδιορίζει το πάχος L της λιθόσφαιρας, οδηγώντας σε μία σχέση της μορφής:

$$L = 9\sqrt{t} \quad (4.39)$$

Δηλαδή το πάχος της λιθόσφαιρας αυξάνει καθώς απομακρυνόμαστε από τη ράχη και είναι ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του χρόνου, t , όπως φαίνεται και στο απλοποιημένο μοντέλο του σχήματος.

Η πάχυνση της λιθόσφαιρας, σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι η λιθόσφαιρα βρίσκεται σε βαρυτική αντιστάθμιση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η λιθόσφαιρα βυθίζεται στο μανδύα λόγω αύξησης της πυκνότητάς της με την πάροδο του χρόνου, με αποτέλεσμα να αυξάνει το βάθος του θαλάσσιου πυθμένα.

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, το βάθος, d , του θαλάσσιου πυθμένα μετά από χρόνο t δίνεται από τη σχέση:

$$d = d_r + \frac{2\rho_\alpha \alpha T_\alpha}{\rho_\alpha - \rho_w} \sqrt{\frac{Kt}{\pi}} \quad (4.40)$$

d_r και ρ_α είναι το βάθος του νερού και η πυκνότητα της λιθόσφαιρας στον άξονα της μεσοωκεάνιας ράχης

ρ_w είναι η πυκνότητα του νερού

α είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής

Επομένως, και το βάθος του ωκεάνιου πυθμένα (δηλαδή το βάθος της πάνω επιφάνειας της ωκεάνιας λιθόσφαιρας) αυξάνεται ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου.

Γεώθερμες

Ορισμός:

Γεώθερμη ονομάζεται η σχέση (συνάρτηση) της θερμοκρασίας T , με το βάθος z

εξαρτάται από:

εσωτερικούς παράγοντες της δομής :

- αγωγιμότητα,
- ειδική θερμότητα,
- πυκνότητα,
- πηγές γένεσης θερμότητας από ραδιενέργεια

εξωτερικούς παράγοντες :

- ροή θερμότητας που εισέρχεται στη δομή,
- θερμοκρασία στην επιφάνεια της δομής,
- ρυθμός με τον οποίο απομακρύνεται ή προστίθεται υλικό στην επιφάνεια της δομής π.χ. με αποσάθρωση ή απόθεση, αντίστοιχα)

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μία κατακόρυφη στήλη στη Γη όπου δεν αφαιρείται ούτε προστίθεται υλικό λόγω μεταφοράς ($u=0$), η ροή θερμότητας με αγωγή γίνεται πρακτικά μόνο κατακόρυφα και είναι σταθερή.

Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα η στήλη βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας, δηλαδή η θερμοκρασία σε κάθε βάθος είναι σταθερή με το χρόνο ($\partial T / \partial t = 0$).

Η μεταβολή της θερμοκρασίας με το βάθος ονομάζεται **γεώθερμη ισορροπίας** :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A}{k} \quad (4.41)$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και μπορεί να λυθεί αν δοθούν δύο ορικές συνθήκες. π.χ. ότι:

- 1) στην επιφάνεια της Γης η θερμοκρασία είναι ίση με μηδέν, δηλαδή για $z=0$, $T=0$
- 2) η ροή θερμότητας στην επιφάνεια είναι ίση με $-q_0$ (το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι ροή θερμότητας πραγματοποιείται προς τα επάνω, αντίθετα προς την

αύξηση του βάθους), δηλαδή για $z=0$, $q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -q_0$

Από όπου με δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις παίρνουμε τελικά την ειδική λύση:

$$T = \frac{A}{2k} z^2 + \frac{q_0}{k} z$$

✓ Δηλαδή, η γεώθερμη ισορροπίας στην περίπτωση αυτή είναι η ακόλουθη σχέση **δευτέρου βαθμού**

Αντίστοιχα, όταν οι αρχικές συνθήκες ορίζουν:

1) ότι στην επιφάνεια της Γης η θερμοκρασία είναι ίση με μηδέν ($z=0, T=0$)

2) ότι σε δοσμένο βάθος, d , η ροή θερμότητας είναι γνωστή, $-q_d$, ($z=d, q=-q_d$)
η γεώθερμη ισορροπία είναι η ακόλουθη εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$T = \frac{A}{2k} z^2 + \frac{q_0 + Ad}{k} z \quad (4.45)$$

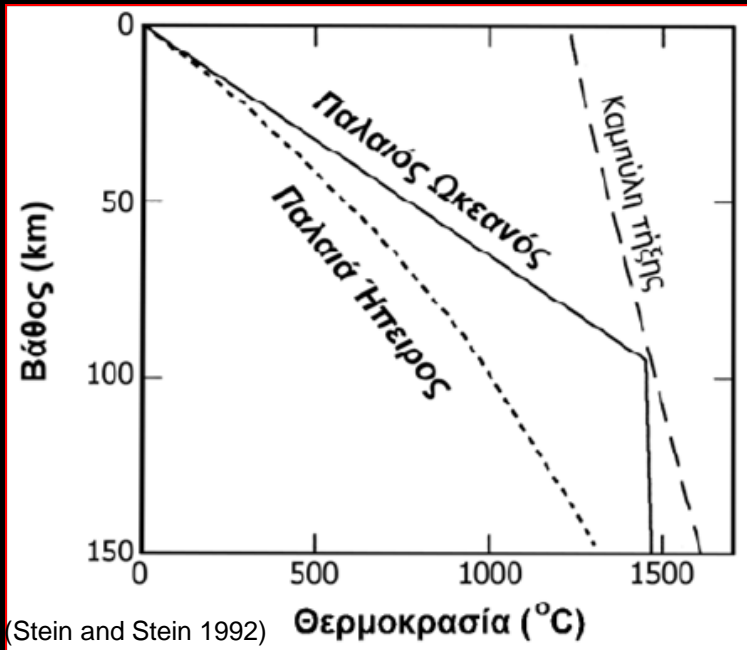
Η παραπάνω σχέση Βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση που έχουμε ηπειρωτικό φλοιό πάχους d , όπου παράγεται από ραδιενέργεια θερμότητα A και στη βάση του οποίου η ροή θερμότητας από τον μανδύα είναι q_d

$$T = \frac{A}{2k} z^2 + \frac{q_0}{k} z$$

$$T = \frac{A}{2k} z^2 + \frac{q_0 + Ad}{k} z$$

Από τη σύγκριση των δυο σχέσεων προκύπτει ότι:

1. μία στήλη πάχους d (π.χ. ηπειρωτικός φλοιός), όπου παράγεται θερμότητα A από ραδιοακτινοβολία, συμβάλλει κατά Ad στην αύξηση της ροής θερμότητας στην επιφάνεια της Γης.
2. η ροή θερμότητας q_d σε βάθος d (π.χ. η ροή θερμότητας από τον μανδύα προς τον φλοιό) συμβάλλει σε μεταβολή της θερμοκρασίας κατά zq_d/k σε βάθος z .
3. και στις δύο περιπτώσεις οι γεώθερμες είναι καμπύλες δευτέρου βαθμού που διέρχονται από την αρχή των αξόνων ($z=0, T=0$, πρώτη ορική συνθήκη).



Γεώθερμες καμπύλες για παλαιά ωκεάνια λιθόσφαιρα (συνεχής καμπύλη) και παλαιά ηπειρωτική λιθόσφαιρα (διακεκομμένη καμπύλη).

Παρατηρούμε ότι και οι δύο γεώθερμες καμπύλες διέρχονται από την αρχή των αξόνων (για $z=0, T=0$).

η θερμοκρασία της ηπειρωτικής πλάκας ελαττώνεται με μεγαλύτερο ρυθμό με το βάθος σε σχέση με τη θερμοκρασία της ωκεάνιας πλάκας.

Η θερμική ιστορία της Γης

Αν η εξίσωση της θερμικής αγωγιμότητας αναπτυχθεί σε **σφαιρικές συντεταγμένες**, θεωρώντας ότι υπάρχει **σφαιρική συμμετρία** (ανεξαρτησία από το γεωγραφικό μήκος και πλάτος) τότε παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{A}{\rho C_p} \quad (4.46)$$

r : η απόσταση από το κέντρο της Γης

Η λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για:

- την αρχική κατανομή της θερμοκρασίας μέσα στη Γη,
- για τη μεταβολή της θερμοκρασίας με το χρόνο σε διάφορα βάθη.

Η πιο απλή προσέγγιση είναι να υποθέσουμε **ότι η Γη είναι ομογενής σε ότι αφορά τόσο τη θερμική αγωγιμότητα, k , όσο και τη παραγωγή θερμότητας λόγω ραδιενέργειας (A =σταθερή).**

Αν η μεταβολή της θερμοκρασίας με το βάθος σταθεροποιηθεί μετά από κάποιο χρονικό διάστημα (steady-state, $\partial T / \partial t = 0$) και η θερμοκρασία στην επιφάνεια της Γης είναι $T=0$, τότε η εξίσωση έχει την ακόλουθη λύση:

$$(4.47) \quad T(r) = \frac{A}{6k} (R^2 - r^2)$$

R : η ακτίνα της Γης
 r : η απόσταση από το κέντρο της Γης

Στην περίπτωση αυτή η ροή είναι ίση με:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z} = -k \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{Ar}{3} \quad (4.48)$$

Από τις γνωστές τιμές ($R=6371\text{km}$, $q_R \sim 80\text{mW/m}^2$, $k \sim 4\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$), βρίσκουμε ότι στο κέντρο της Γης,

$$T(0) = AR^2/6k = q_R R/2k \sim \mathbf{64000 \text{ }^\circ\text{C}}.$$

Η τιμή αυτή είναι φυσικά εξωπραγματική !

(ακόμα και ο Ήλιος έχει επιφανειακή θερμοκρασία μερικών χιλιάδων βαθμών)

✓ Ο κύριος λόγος αποτυχίας της προηγούμενης εξίσωσης είναι ότι υποθέτει διάδοση της θερμότητας μόνο με αγωγή και όχι με ρεύματα μεταφοράς.

✓ Τα ρεύματα αυτά διευκολύνουν τη μεταφορά μεγάλων ποσών θερμότητας από τα βαθύτερα στα επιφανειακά στρώματα της Γης, άρα η θερμοκρασία της Γης μπορεί να είναι πολύ μικρότερη στο κέντρο της, επιτυγχάνοντας την ίδια επιφανειακή ροή θερμότητας.

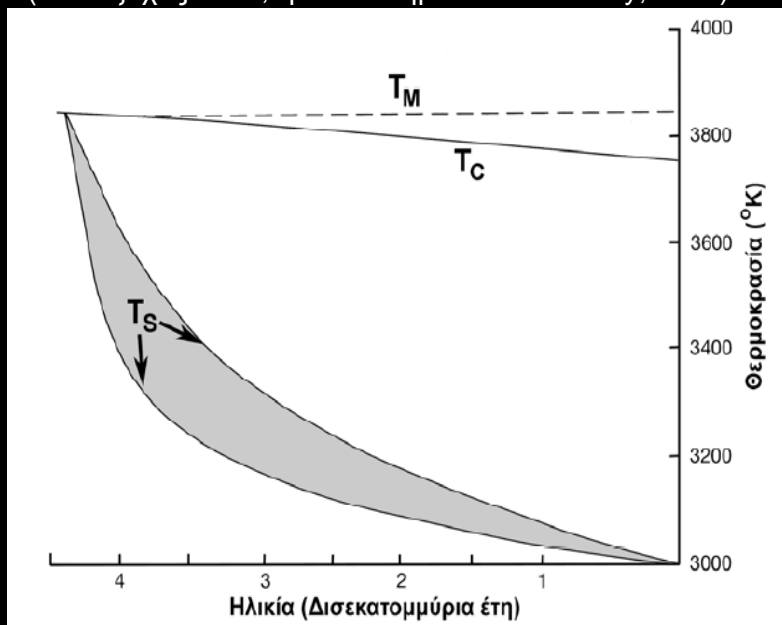
✓ Η αγνόηση των ρευμάτων μεταφοράς σε συνδυασμό με την τιμή της επιφανειακής ροής θερμότητας ήταν οι αιτίες που οδήγησαν τον **Λόρδο Kelvin στον προσδιορισμό εξαιρετικά μικρής ηλικίας για τη Γη** (βλέπε Εισαγωγή).

✓ Φυσικά, στην πραγματικότητα, τα μοντέλα πρέπει να λαμβάνουν υπ' όψη και πιο πολύπλοκους παράγοντες, όπως π.χ. τη μεταβολή της ενέργειας μέσω ραδιενεργών διασπάσεων με το χρόνο.

Στην πραγματικότητα, η θερμοκρασία μεταβάλλεται μέσα στη Γη με το γεωλογικό χρόνο, έστω και αργά ($\partial T / \partial t \neq 0$).

Σήμερα πιστεύεται ότι η βαρυτική ενέργεια που απελευθερώθηκε κατά το διαχωρισμό του μεταλλικού πυρήνα από τον πυριτικό μανδύα ήταν τέτοια ώστε ολόκληρος ο μανδύας έφτασε τη θερμοκρασία τήξης του ή έστω θερμοκρασία πολύ κοντά σε αυτήν

(Παπαζάχος 2008, τροποποιημένο από Stacey, 1992)



Στο σχήμα παρουσιάζεται ένα σενάριο υπολογισμού της εξέλιξης της θερμικής ιστορίας στην περιοχή του ορίου μανδύα-πυρήνα,

T_M : η αρχική θερμοκρασία τήξης του μανδύα (~3850 K),
 T_C : η θερμοκρασία του πυρήνα κοντά στο όριο μανδύα-πυρήνα

T_S : η αντίστοιχη θερμοκρασία του μανδύα στο ίδιο όριο αν θεωρήσουμε ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας μέσα στο μανδύα είναι μόνο αδιαβατική .

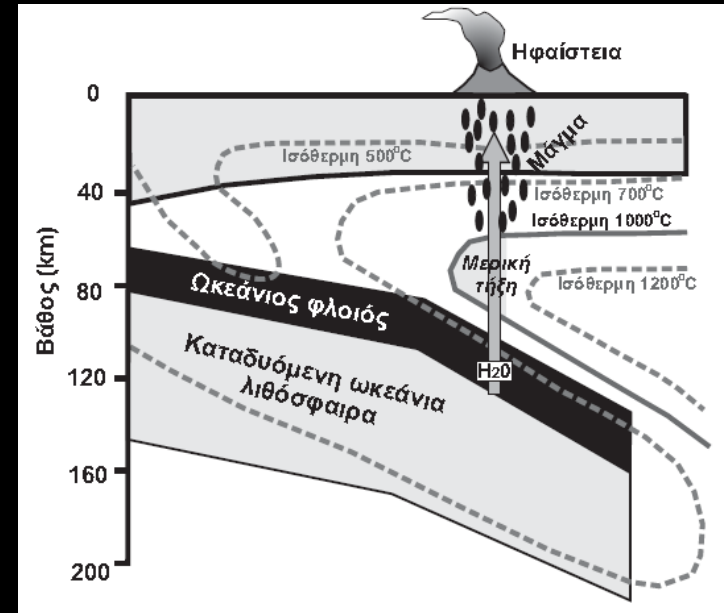
- Η μεταβολή της T_S παρουσιάζεται για δύο ακραίες ρεολογίες του μανδύα.

Τόσο η T_C όσο και η T_S δείχνουν πολύ αργή μεταβολή με το χρόνο, δείχνοντας ότι ο παρόντας ρυθμός ψύξης του μανδύα σε αυτό το βάθος είναι περίπου ίσος με $70^\circ\text{C}/(\text{δισ. χρόνια})$.

Η τιμή αυτή δείχνει ότι, αν και τα ρεύματα μεταφοράς συντελούν στην ταχύτερη ψύξη του μανδύα, η παραγωγή θερμότητας από τις ραδιενεργές διασπάσεις είναι αρκετά σημαντική ώστε να διατηρεί το μανδύα σε υψηλή θερμοκρασία.

Ο κυρίαρχος ρόλος των ρευμάτων μεταφοράς στη διάδοση θερμότητας σε σχέση με τη διάδοση με αγωγή είναι εξαιρετικά σημαντικός για σειρά από γεωδυναμικά φαινόμενα αλλά και για πολλές γεωφυσικές τεχνικές που έχουν ως στόχο τη μελέτη του εσωτερικού της Γης.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η παραμόρφωση των γεώθερμων κατά την κατάδυση μίας ωκεάνιας λιθόσφαιρας (σχήμα 3.18) αφού η αγωγή δεν προλαβαίνει να εξισορροπήσει τη θερμοκρασιακή μεταβολή λόγω της μεταφοράς της ψυχρής ωκεάνιας λιθόσφαιρας σε μεγάλα βάθη (υψηλότερες θερμοκρασίες).

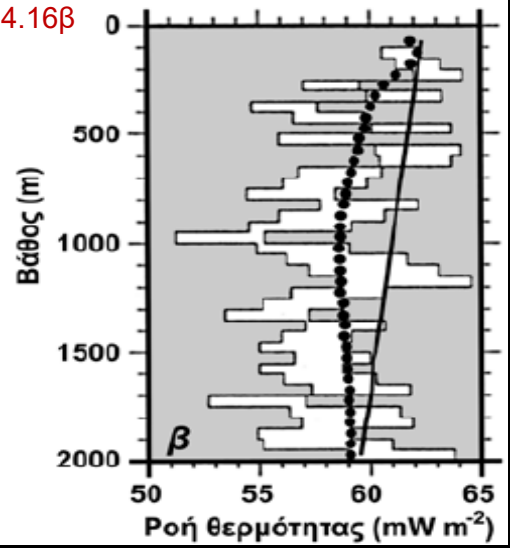


Το αποτέλεσμα είναι η δημιουργία έντονων διαφορών στις ταχύτητες των σεισμικών κυμάτων, επιτρέποντας την απεικόνιση των λιθοσφαιρικών καταδύσεων ως περιοχών υψηλών ταχυτήτων αλλά και ελέγχου γεωλογικών μοντέλων.

Ο μανδύας με τον τρόπο αυτό «παγώνει» και αποτυπώνει θερμικά τη γεωλογική ιστορία της λιθόσφαιρας.

Ανάλογο ρόλο μπορεί να παίξει και ο ηπειρωτικός φλοιός για τις ατμοσφαιρικές θερμοκρασιακές μεταβολές. Η εξαιρετικά αργή μεταβολή της θερμοκρασίας με αγωγή μέσα στο φλοιό, επιτρέπει την αποτύπωση επιφανειακών θερμοκρασιακών αλλαγών πριν από χιλιάδες χρόνια μέσα σε αυτόν.

4.16β

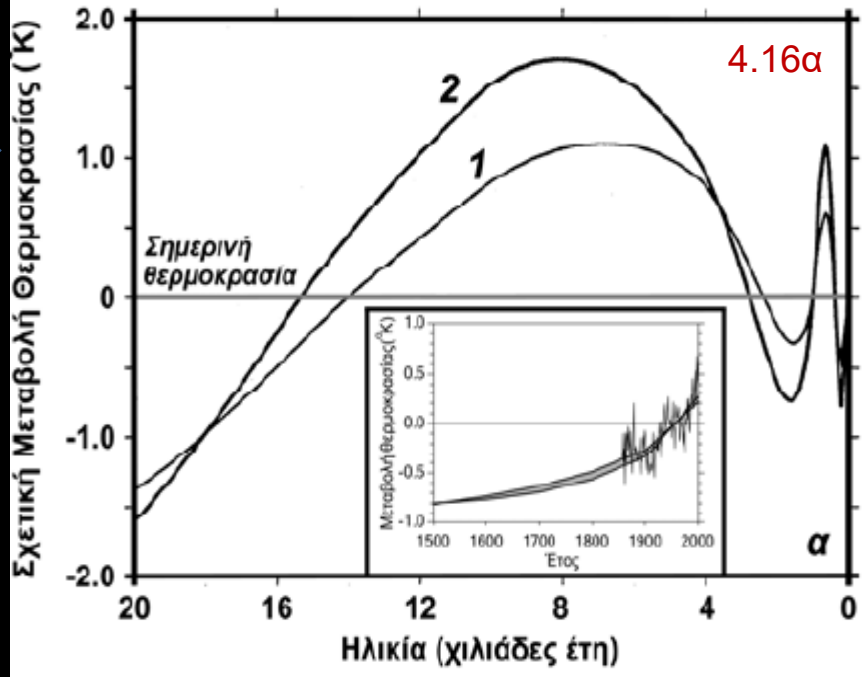


Παγκόσμια δεδομένα κατανομής της θερμοκρασίας με το βάθος (άσπρες μπάρες) και η αναμενόμενη μεταβολή της θερμοκρασίας στα πρώτα 2km αν υποθεθεί ότι η μέση επιφανειακή θερμοκρασία ήταν σταθερή και ίση με τη σημερινή (συνεχής γραμμή) ενώ με μαύρους κύκλους παρουσιάζεται η μεταβολή της θερμοκρασίας μέσα στη Γη αν στην επιφάνεια ακολουθήθηκε το σενάριο (1) στο σχήμα (4.16α).

(Παπαζάχος 2008, τροποποιημένο από Huang et al., 1997 και Polack and Smerdon, 2004)

Δύο σενάρια μεταβολής της θερμοκρασίας κατά τα τελευταία 20.000 χρόνια με βάση το σχ. 4.16β). Αν και τα δύο μοντέλα αντιστοιχούν στην ίδια τιμή επιφανειακής ροής θερμότητας, το 1^ο περιγράφει ικανοποιητικά την παρατηρούμενη μεταβολή της ροής θερμότητας μέσα στον ανώτερο ηπειρωτικό φλοιό.

Νεώτερα αποτελέσματα (γκρίζα ζώνη στο ένθετο σχήμα 4.16α) δείχνουν μία συστηματική αύξηση κατά ~0.7°C τα τελευταία 200 έτη



Διάδοση Θερμότητας με Μεταφορά στο Εσωτερικό της Γης

✓ στο μανδύα και τον πυρήνα πραγματοποιείται **μεταφορά τεράστιων ποσοτήτων υλικού (ρεύματα μεταφοράς) που μεταφέρουν συγχρόνως ποσότητες θερμότητας πολύ μεγαλύτερες από αυτές που διαδίδονται μόνο με αγωγή**

Συνέπεια των ρευμάτων αυτών είναι ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας (θερμοβαθμίδα) είναι πολύ μικρότερος. Έτσι, επειδή στο εσωτερικό ρευστών ρευμάτων η μέση θερμοβαθμίδα είναι αδιαβατική, η θερμοβαθμίδα στο μανδύα θεωρείται σε πολλά απλοποιημένα μοντέλα κατά προσέγγιση αδιαβατική, δηλαδή δεν αποβάλλεται ούτε προσλαμβάνεται θερμότητα

θεώρημα της θερμοδυναμικής
(reciprocal theorem):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T$$

T : θερμοκρασία (σε K),
P : πίεση
S : εντροπία

θερμοδυναμική σχέση Maxwell:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \quad (4.50)$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad (4.51)$$

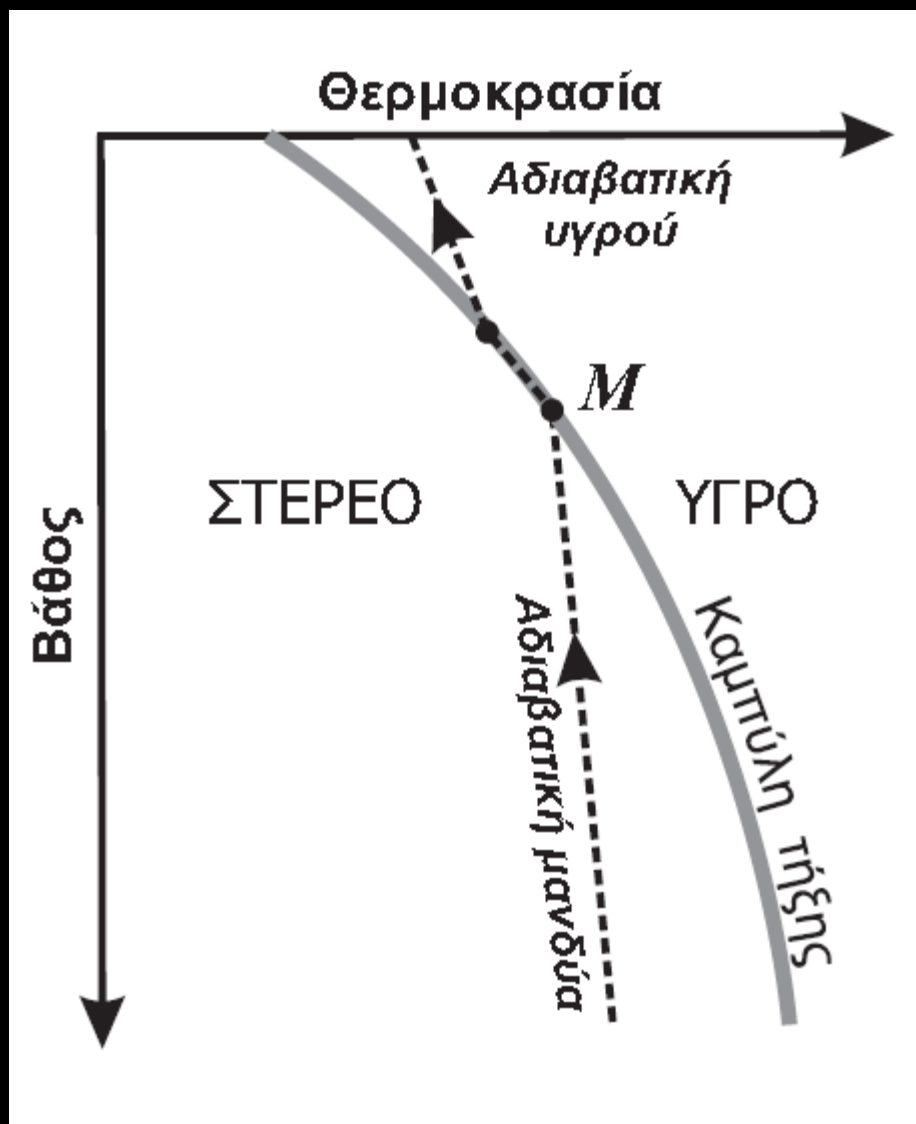
Από τη σχέση αυτή και τους ορισμούς του συντελεστή θερμικής διαστολής, α , και της ειδικής θερμότητας, C_p , (σχέσεις 4.2 και 4.5) προκύπτει η σχέση :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{\alpha T}{\rho C_p} \quad (4.52)$$

Καθώς για τον μανδύα δεχόμαστε ότι υπάρχει, προσεγγιστικά, υδροστατική ισορροπία η παραπάνω γίνεται:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_S = -\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_S = -\frac{T \alpha g}{C_p} \quad (4.53)$$

Η καμπύλη τήξης, που χωρίζει το μανδύα σε περιοχή στερεού υλικού και σε περιοχή υγρού υλικού, είναι διαφορετική από την αδιαβατική ισόθερμη.

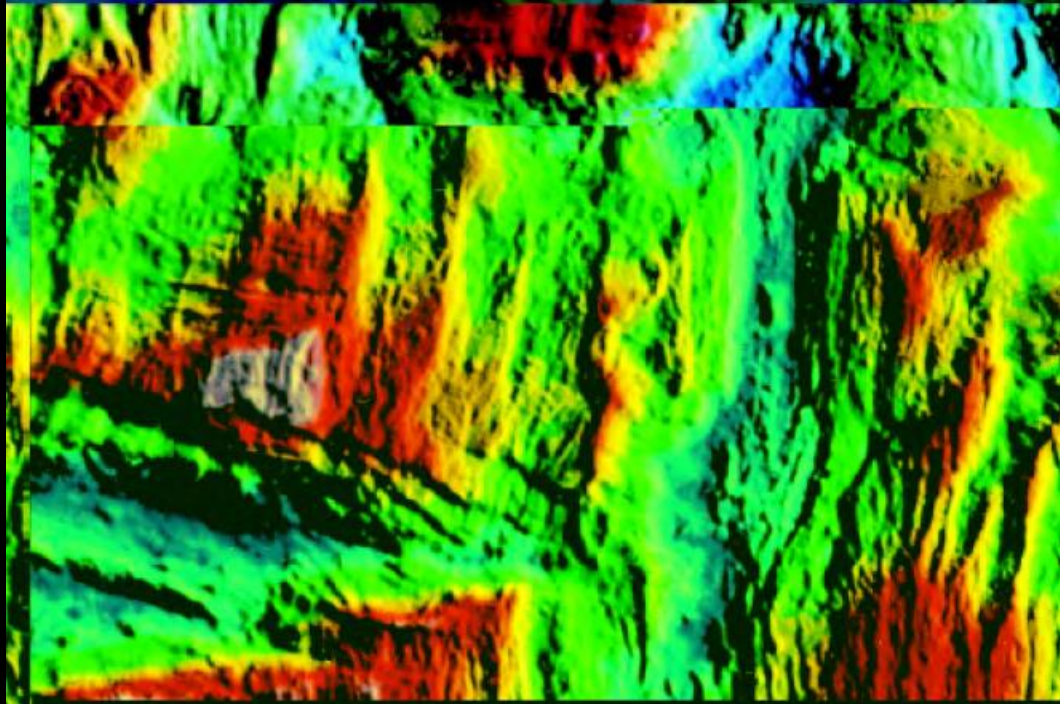


Αδιαβατική ισόθερμη και καμπύλη τήξης
(Παπαζάχος 2008, τροποποιημένο από Fowler, 2005).

Second Edition

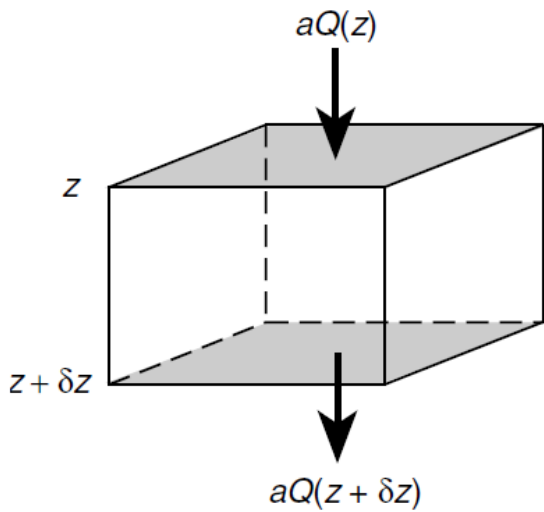
The Solid Earth

An Introduction to Global Geophysics



C. M. R. FOWLER

CAMBRIDGE



Expanding $Q(z + \delta z)$ in a Taylor series gives

$$Q(z + \delta z) = Q(z) + \delta z \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{(\delta z)^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \dots$$

heat entering across z – heat leaving across $z + \delta z$

$$= aQ(z) - aQ(z + \delta z)$$

$$= -a \delta z \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Suppose that heat is generated in this volume element at a rate A per unit volume per unit time. The total amount of heat generated per unit time is then

$$Aa \delta z$$

(7.7)

$$Aa \delta z - a \delta z \frac{\partial Q}{\partial z}$$

If the material has density ρ and specific heat c_p , and undergoes a temperature increase δT in time δt , the rate at which heat is gained is

$$c_p a \delta z \rho \frac{\delta T}{\delta t}$$

(7.9)

$$c_p a \delta z \rho \frac{\delta T}{\delta t} = A a \delta z - a \delta z \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$c_p \rho \frac{\delta T}{\delta t} = A - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (7.10)$$

In the limiting case when $\delta z, \delta t \rightarrow 0$, Eq. (7.10) becomes

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = A - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (7.11)$$

Using Eq. (7.4) for Q (heat flow per unit area), we can write

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = A + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (7.12)$$

or

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A}{\rho c_p} \quad (7.13)$$


This is the one-dimensional heat-conduction equation.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho c_p}$$

For a steady-state situation when there is no change in temperature with time, Eq. (7.15) becomes

$$\nabla^2 T = -\frac{A}{k} \quad (7.16)$$

In the special situation when there is no heat generation, Eq. (7.15) becomes


$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_P} \nabla^2 T \quad (7.17)$$

This is the *diffusion equation* (Section 7.3.5).

Relative motion through a region where the temperature varies with depth

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_P} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A}{\rho c_P} - u_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (7.18)$$

and

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_P} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho c_P} - \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (7.19)$$

In Eq. (7.19), \mathbf{u} is the three-dimensional velocity of the material. The term $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ is the *advective-transfer* term.

Table 7.1 *Typical concentrations of radioactive elements and heat production of some rock types*

	Granite	Tholeiitic basalt	Alkali basalt	Peridotite	Average continental upper crust	Average continental crust	Average oceanic crust	Undepleted mantle
Concentration by weight								
U (ppm)	4	0.1	0.8	0.006	2.8	1.1	0.9	0.02
Th (ppm)	15	0.4	2.5	0.04	10.7	4.2	2.7	0.10
K (%)	3.5	0.2	1.2	0.01	3.4	1.3	0.4	0.04
Heat generation (10^{-10} W kg $^{-1}$)								
U	3.9	0.1	0.8	0.006	2.8	1.1	0.9	0.02
Th	4.1	0.1	0.7	0.010	3.0	1.2	0.7	0.03
K	1.3	0.1	0.4	0.004	1.2	0.5	0.1	0.007
Total	9.3	0.3	1.9	0.020	7.0	2.7	1.7	0.057
Density (10^3 kg m $^{-3}$)								
	2.7	2.8	2.7	3.2	2.7	2.7	2.9	3.2
Heat generation (μ W m $^{-3}$)								
	2.5	0.08	0.5	0.006	1.8	0.7	0.5	0.02

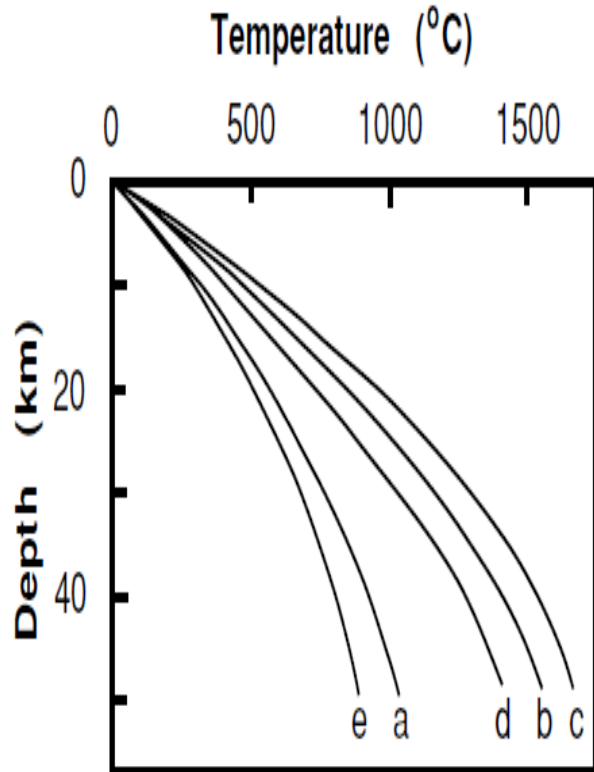


Figure 7.3. Equilibrium geotherms calculated from Eq. (7.28) for a 50-km-thick column of rock. Curve a: standard model with conductivity $2.5 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, radioactive heat generation $1.25 \mu\text{W m}^{-3}$ and basal heat flow $21 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$. Curve b: standard model with conductivity reduced to $1.7 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Curve c: standard model with radioactive heat generation increased to $2.5 \mu\text{W m}^{-3}$. Curve d: standard model with basal heat flow increased to $42 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$. Curve e: standard model with basal heat flow reduced to $10.5 \times 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$. (From Nisbet and Fowler (1982).)

Two layer model

Consider a two-layer model:

$$A = A_1 \quad \text{for } 0 \leq z < z_1$$

$$A = A_2 \quad \text{for } z_1 \leq z < z_2$$

$$T = 0 \quad \text{on } z = 0$$

with a basal heat flow $Q = -Q_2$ on $z = z_2$. In the first layer, $0 \leq z < z_1$, the equilibrium heat-conduction equation is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_1}{k} \quad (7.29)$$

In the second layer, $z_1 \leq z < z_2$, the equilibrium heat-conduction equation is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_2}{k} \quad (7.30)$$

The solution to these two differential equations, subject to the boundary conditions and matching both temperature, T , and temperature gradient, $\partial T / \partial z$, on the boundary $z = z_1$, is

$$T = -\frac{A_1}{2k}z^2 + \left(\frac{Q_2}{k} + \frac{A_2}{k}(z_2 - z_1) + \frac{A_1 z_1}{k} \right)z \quad \text{for } 0 \leq z < z_1 \quad (7.31)$$

$$T = -\frac{A_2}{2k}z^2 + \left(\frac{Q_2}{k} + \frac{A_2 z_2}{k} \right)z + \frac{A_1 - A_2}{2k}z_1^2 \quad \text{for } z_1 \leq z < z_2 \quad (7.32)$$

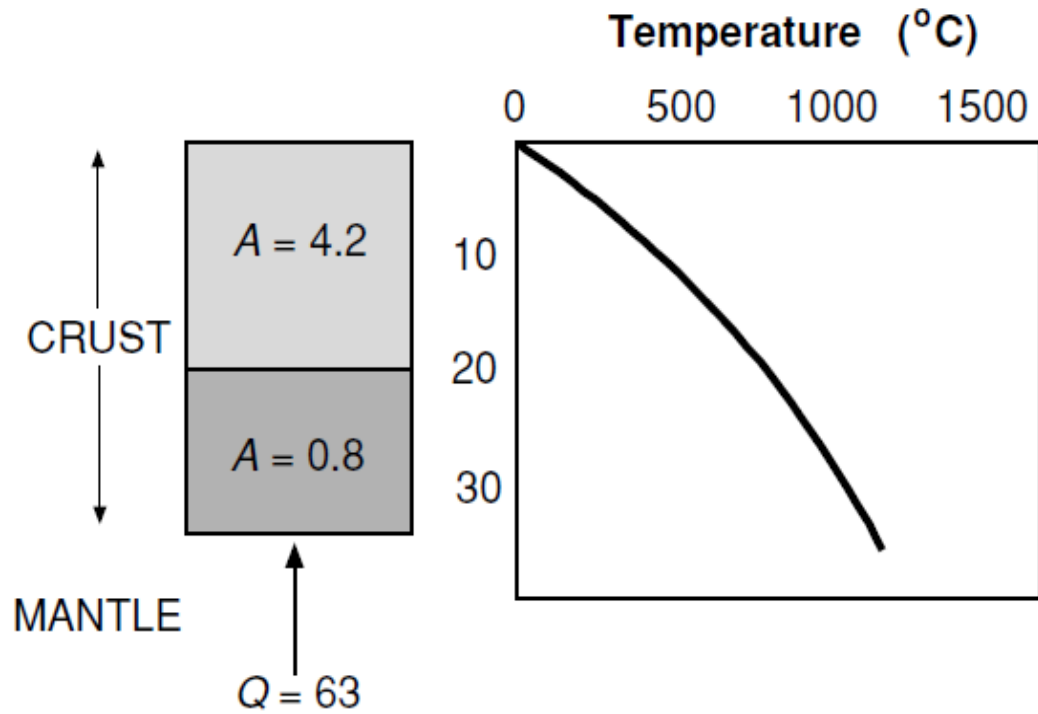


Figure 7.4. A two-layer model for the crust and equilibrium geotherm in the Archaean. Heat generation A is in $\mu\text{W m}^{-3}$; heat flow from the mantle Q is in 10^{-3}W m^{-2} . Recall that, during the Archaean, heat generation was much greater than t is now (Table 7.2). (After Nisbet and Fowler (1982).)

Example: periodic variation of surface temperature

Because the Earth's surface temperature is not constant but varies periodically (daily, annually, ice ages), it is necessary to ensure that temperature measurements are made deep enough that distortion due to these surface periodicities is minimal. We can model this periodic contribution to the surface temperature as $T_0 e^{i\omega t}$, where ω is 2π multiplied by the frequency of the temperature variation, i is the square root of -1 and T_0 is the maximum variation of the mean surface temperature. The temperature $T(z, t)$ is then given by Eq. (7.13) (with $A = 0$) subject to the following two boundary conditions:

- (i) $T(0, t) = T_0 e^{i\omega t}$ and
- (ii) $T(z, t) \rightarrow 0$ as $z \rightarrow \infty$.

We can use the separation-of-variables technique to solve this problem. Let us assume that the variables z and t can be separated and that the temperature can be written as

$$T(z, t) = V(z)W(t) \tag{7.38}$$

This supposes that the periodic nature of the temperature variation is the same at all depths as it is at the surface, but it allows the magnitude and phase of the variation

to be depth-dependent, which seems reasonable. Substitution into Eq. (7.13) (with $A = 0$) then yields

$$V \frac{dW}{dt} = \frac{k}{\rho c_P} W \frac{d^2 V}{dz^2} \quad (7.39)$$

which, upon rearranging, becomes

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{k}{\rho c_P} \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dz^2} \quad (7.40)$$

Because the left-hand side of this equation is a function of t alone and the right-hand side is a function of z alone, it follows that each must equal a constant, say, c_1 . However, substitution of Eq. (7.38) into the boundary conditions (i) and (ii) yields, respectively,

$$W(t) = e^{i\omega t} \quad (7.41)$$

and

$$V(z) \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \infty \quad (7.42)$$

Boundary condition (i) therefore means that the constant c_1 must be equal to $i\omega$ (differentiate Eq. (7.41) to check this). Substituting Eq. (7.41) into Eq. (7.40) gives the equation to be solved for $V(z)$:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \frac{i\omega\rho c_P V}{k} \quad (7.43)$$

This has the solution

$$V(z) = c_2 e^{-qz} + c_3 e^{qz} \quad (7.44)$$

where $q = (1 + i)\sqrt{\omega\rho c_P/(2k)}$ (remember that $\sqrt{i} = (1 + i)/\sqrt{2}$) and c_2 and c_3 are constants. Equation (7.37), boundary condition (ii), indicates that the positive exponential solution is not allowed; the constant c_3 must be zero. Boundary condition (i) indicates that the constant c_2 is T_0 ; so, finally, $T(z, t)$ is given by

$$\begin{aligned} T(z, t) &= T_0 \exp(i\omega t) \exp\left(- (1 + i)\sqrt{\frac{\omega\rho c_P}{2k}} z\right) \\ &= T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho c_P}{2k}} z\right) \exp\left[i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho c_P}{2k}} z\right)\right] \end{aligned} \quad (7.45)$$

For large z this periodic variation dies out. Thus, temperatures at great depth are unaffected by the variations in surface temperatures, as required by boundary condition (ii).

$$T(z, t) = T_0 \exp(i\omega t) \exp\left(- (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \rho c_p}{2k}} z\right)$$

$$= T_0 \exp\left(- \sqrt{\frac{\omega \rho c_p}{2k}} z\right) \exp\left[i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c_p}{2k}} z\right)\right]$$

At a depth of

$$L = \sqrt{\frac{2k}{\omega \rho c_p}} \quad (7.46)$$

the periodic disturbance has an amplitude $1/e$ of the amplitude at the surface. This depth L is called the skin depth. Taking $k = 2.5 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $c_p = 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ and $\rho = 2.3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, which are reasonable values for a sandstone, then for the **daily variation** ($\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), **L is approximately 17 cm;** for the annual

variation ($\omega = 2 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$), L is 3.3 m; and for an ice age (with period of the order of 100 000 yr), L is greater than 1 km. Therefore, provided that temperature measurements are made at depths greater than 10–20 m, the effects of the daily and annual surface temperature variation are negligible. The effects of ice ages cannot be so easily ignored and must be considered when borehole measurements are made. Measurement of temperatures in ocean sediments is not usually subject to these constraints, the ocean-bottom temperature being comparatively constant.

Heat flow and the depth of the oceans

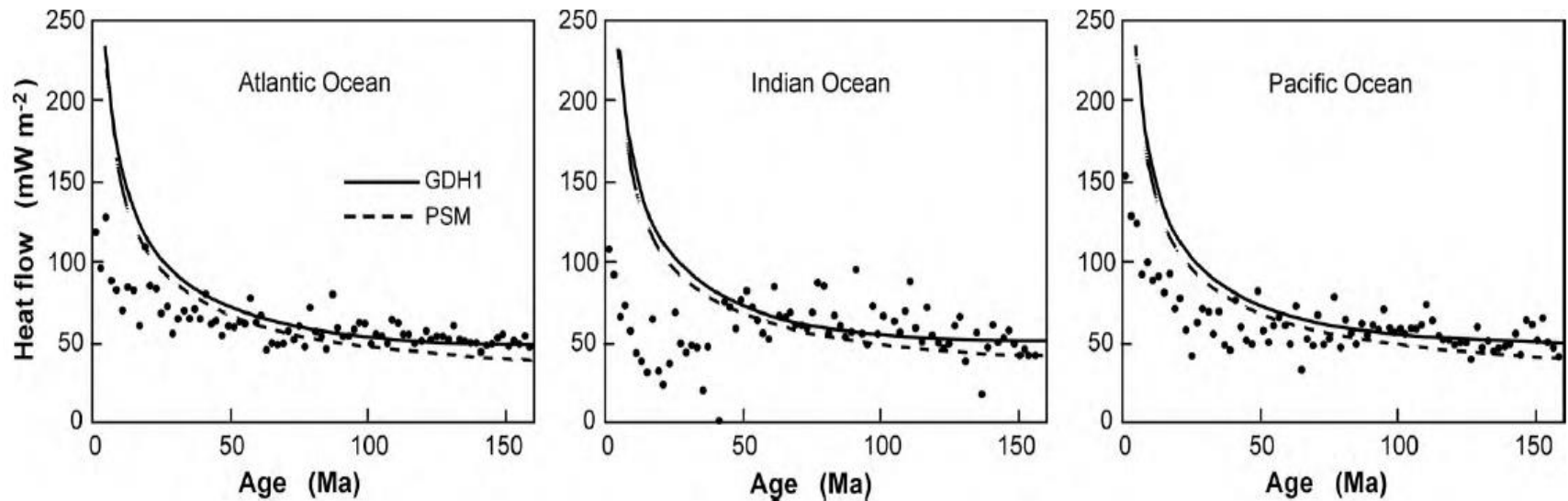


Figure 7.6. Observed heat flows for the Atlantic, Indian and Pacific Oceans. Heat flow predicted by the plate models: solid line, GDH1; and dashed line, PSM. Heat flow predicted by the half-space model HS is not shown – it is almost coincident with PSM (Table 7.5). (After Stein and Stein, Constraints on hydrothermal heat flux through the oceanic lithosphere from global heat data, *J. Geophys. Res.*, **99**, 3881–95, 1994. Copyright 1994 American Geophysical Union. Modified by permission of American Geophysical Union.)

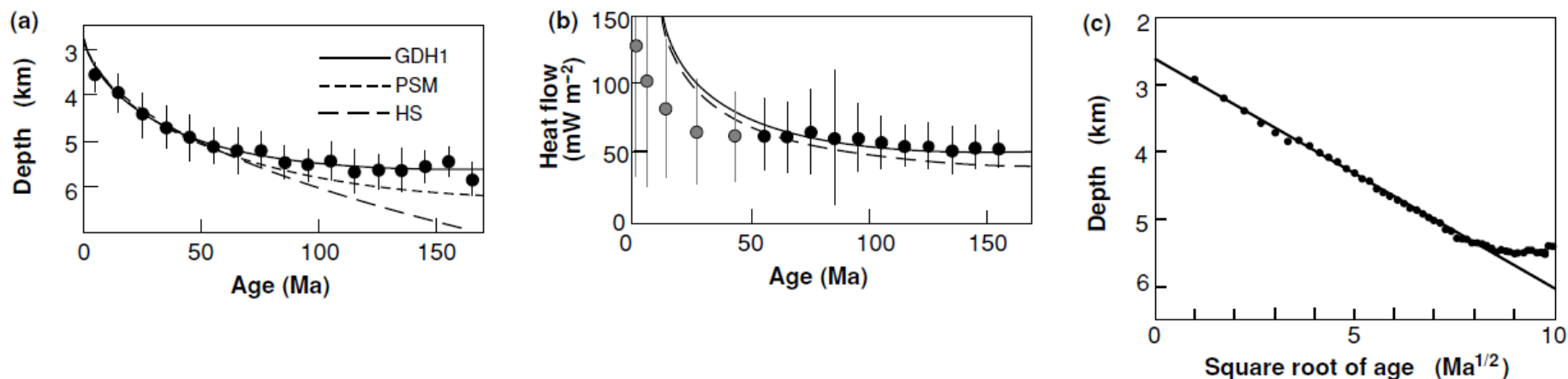


Figure 7.7. Mean oceanic depth (a) and oceanic heat flow (b) with standard deviations plotted every 10 Ma against age. The data are from the north Pacific and northwest Atlantic. These global depths exclude data from the hotspot swells. The three model predictions for ocean depth and heat flow are shown as solid and dashed lines. The plate model GDH1 fits both data sets overall better than does either the half-space model HS or the alternative plate model PSM. Data shown in black were used to determine GDH1. Heat flow data at <50 Ma are shown in grey – these are affected by hydrothermal circulation and were not used to determine GDH1. (c) Mean oceanic depth plotted against the square root of the age of the lithosphere (\sqrt{t}). The solid line is the best-fitting half-space model: $d = 2.607 + 0.344t^{1/2}$. (After Stein and Stein (1992) Thermo-mechanical evolution of oceanic lithosphere: implications for the subduction process and deep earthquakes (overview), Geophysical Monograph 96, 1–17, 1996. Copyright 1996 American Geophysical Union. Modified by Permission of American Geophysical Union; and Carlson and Johnson, On modeling the thermal evolution of the oceanic upper mantle: an assessment of the cooling plate model, *J. Geophys. Res.*, **99**, 3201–14, 1994. Copyright 1994 American Geophysical Union. Modified by permission of American Geophysical Union.)

Figure 7.7(a) shows the mean depth of the oceans plotted against age. For ages less than 20 Ma a simple relation between bathymetric depth d (km) and lithosphere age t (Ma) is observed:

$$d = 2.6 + 0.365t^{1/2} \quad (7.57a)$$

Depth increases linearly with the square root of age. For ages greater than 20 Ma this simple relation does not hold; depth increases more slowly with increasing

age and approximates a negative exponential:

$$d = 5.65 - 2.47e^{-t/36} \quad (7.57b)$$

Figure 7.7(b) shows the measured heat flow plotted against age. A simple relationship, linked to that for ocean depth, between heat flow Q (10^{-3} W m^{-2}) and lithosphere age t (Ma) is predicted for crust younger than 55 Ma:

$$Q = 510t^{-1/2} \quad (7.58a)$$

Heat flow decreases linearly with the inverse square root of age. For ages greater than 55 Ma this simple relation does not hold; heat flow decreases more slowly with increasing age and follows a negative exponential:

$$Q = 48 + 96e^{-t/36} \quad (7.58b)$$

A simple model

The simplest thermal model of the lithosphere is to assume that the lithosphere is cooled asthenospheric material, which, at the ridge axis, had a constant temperature T_a and no heat generation. If we assume the ridge to be infinite in the y direction and the temperature field to be in equilibrium, then the differential equation to be solved is

$$\frac{k}{\rho c_P} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7.59)$$

where u is the horizontal velocity of the plate and the term on the right-hand side of the equation is due to advection of heat with the moving plate. A further simplification can be introduced by the assumption that horizontal conduction of heat is insignificant in comparison with horizontal advection and vertical conduction of heat. In this case, we can disregard the $\partial^2 T / \partial x^2$ term, leaving the equation to be solved as

$$\frac{k}{\rho c_P} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7.60)$$

This equation, however, is identical to Eq. (7.43) if we write $t = x/u$, which means that we reintroduce time through the spreading of the ridge. Approximate initial and boundary conditions are $T = T_a$ at $x = 0$ and $T = 0$ at $z = 0$. According to Eq. (7.44), the solution to Eq. (7.60) is

$$T(z, t) = T_a \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \quad (7.61)$$

The surface heat flow at any distance (age) from the ridge axis is then obtained by differentiating Eq. (7.61):

$$\begin{aligned} Q(t) &= -k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= -\frac{kT_a}{\sqrt{\pi\kappa t}} \end{aligned} \quad (7.62)$$

The observed $t^{1/2}$ relationship between heat flow and age is thus a feature of this model which is called a half-space cooling model.

$$Q = 510t^{-1/2}$$

We can estimate the lithospheric thickness L from Eq. (7.61) by specifying a temperature for the base of the lithosphere. For example, if we assume the temperature of the asthenosphere at the ridge axis to be $1300\text{ }^{\circ}\text{C}$ and the temperature at the base of the lithosphere to be $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$, then we need to find the combination of L and t such that

$$1100 = 1300 \operatorname{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \quad (7.63)$$

In other words, we need the inverse error function of 0.846. Using Fig. 7.5 (or Appendix 5), we can write

$$1.008 = \frac{L}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (7.64)$$

Thus, if $\kappa = 10^{-6}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$,

$$L = 2.016 \times 10^{-3} \sqrt{t} \quad (7.65a)$$

when L is in metres and t in seconds, or

$$L = 11\sqrt{t} \quad (7.65b)$$

when L is in kilometres and t in millions of years (Ma). At 10 Ma this lithosphere would be 35 km thick, and at 80 Ma it would be 98 km thick. Different choices for the temperature at the ridge axis and at the base of the lithosphere will yield slightly different values for the numerical constants in Eq. (7.65) but the ‘root t ’ dependence of lithosphere thickness on age will not change.

The depth of the seabed at any given age can be calculated by using the principle of isostasy (see Section 5.5.2) and the gradual increase in density of the lithosphere as it cools. If we take the compensation depth D to be in the mantle beneath the base of the lithosphere, the total mass in a vertical column extending down to D is

$$\int_0^D \rho(z) dz$$

Isostatic compensation requires that this mass be constant for all columns whatever their age. At the ridge axis the lithosphere has zero thickness, and so, taking $z = 0$ to be at sea level, the mass of the column is

$$\int_0^{d_r} \rho_w dz + \int_{d_r}^D \rho_a dz$$

where ρ_w is the density of sea water, ρ_a the density of the asthenosphere (at temperature T_a) and d_r the depth of the water over the ridge axis. The mass of a column aged t is then

$$\int_0^d \rho_w dz + \int_d^{d+L} \rho(z) dz + \int_{d+L}^D \rho_a dz$$

where d is the water depth and L the thickness of the lithosphere. Because the mass in this column must be the same as the mass in the column at the ridge axis,

we obtain the equation

$$\int_0^{d_r} \rho_w dz + \int_{d_r}^D \rho_a dz = \int_0^d \rho_w dz + \int_d^{d+L} \rho(z) dz + \int_{d+L}^D \rho_a dz \quad (7.66)$$

Rearranging yields

$$(d - d_r)(\rho_a - \rho_w) = \int_0^L (\rho(z) - \rho_a) dz \quad (7.67)$$

To determine $\rho(z)$, we must use the expression for density as a function of temperature and α the coefficient of thermal expansion,

$$\rho(T) = \rho_a[1 - \alpha(T - T_a)] \quad (7.68)$$

and Eq. (7.61) for the temperature structure of the lithosphere. Substituting these two equations into Eq. (7.67) gives

$$(d - d_r)(\rho_a - \rho_w) = \rho_a \alpha T_a \int_0^L \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) dz \quad (7.69)$$

where erfc is the complementary error function



The integral on the right-hand side of this equation can easily be calculated or looked up in a set of mathematical tables. However, for our purposes it is sufficient to change the upper limit of integration from L to ∞ (the error introduced by this approximation is about 5%). This integral of $\text{erfc}(x)$ between $x = 0$ and infinity is $1/\sqrt{\pi}$ (Appendix 5). When this approximation is made, Eq. (7.69) becomes

$$(d - d_r)(\rho_a - \rho_w) = 2\rho_a\alpha T_a \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \quad (7.70)$$

Rearranging Eq. (7.70) gives

$$d = d_r + \frac{2\rho_a\alpha T_a}{\rho_a - \rho_w} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \quad (7.71)$$

If we assume values for ρ_a and for ρ_w of 3.3×10^3 and $1.0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, respectively; for α , $3 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; for κ , $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; for T_a , $1200 \text{ }^\circ\text{C}$; and for d_r , 2.6 km; with t in millions of years and d in kilometres, then Eq. (7.71) is

$$\longrightarrow d = 2.6 + 0.33\sqrt{t} \quad (7.72)$$

When T_a is taken to be $1300 \text{ }^\circ\text{C}$, Eq. (7.71) is

$$\nearrow d = 2.6 + 0.36\sqrt{t} \quad (7.73)$$

$$d = 2.6 + 0.365t^{1/2}$$

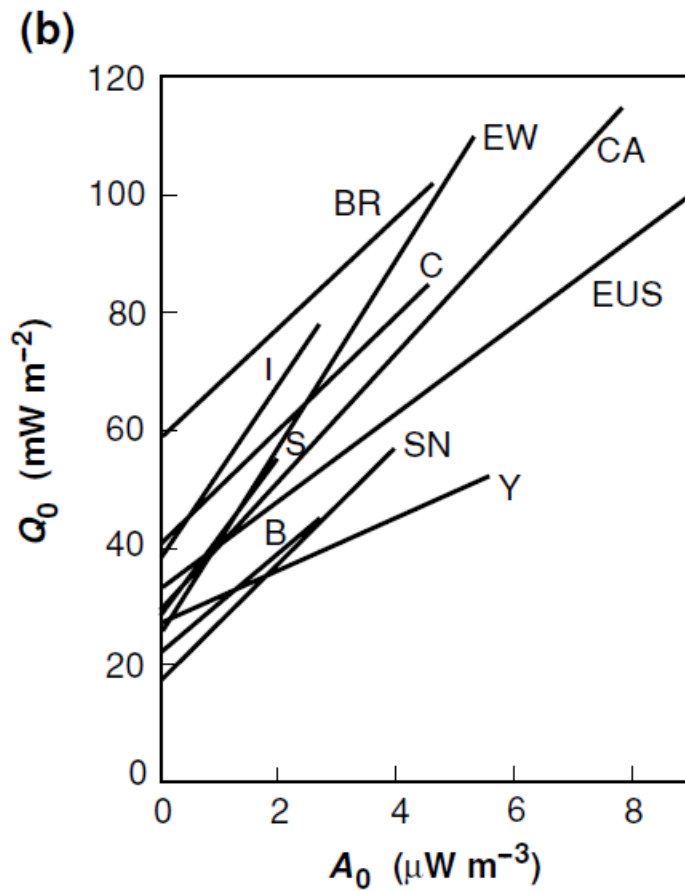
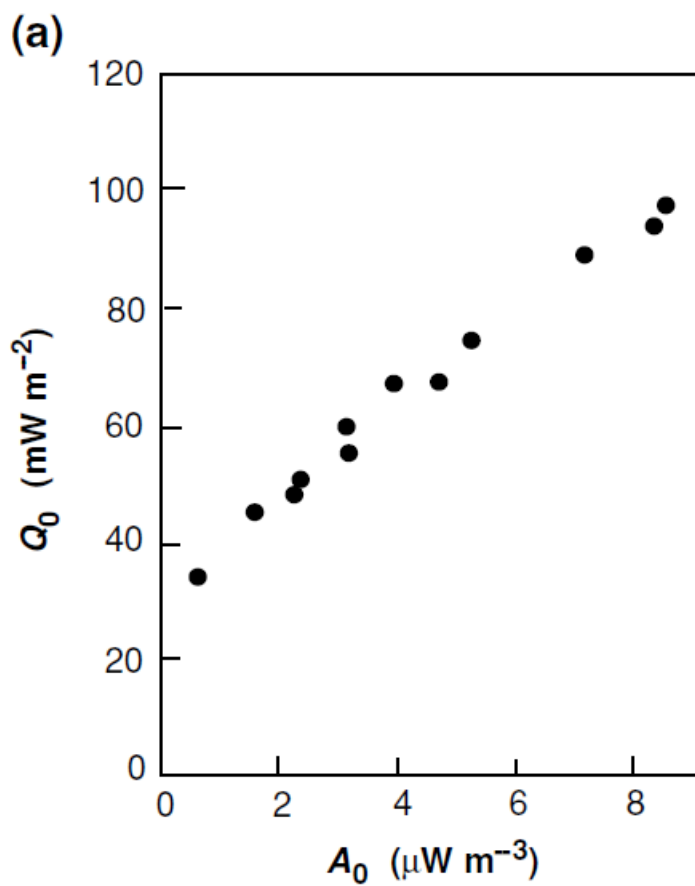


Figure 7.12. Measured heat flow Q_0 plotted against internal heat generation A_0 for (a) the eastern-U.S.A. heat-flow province. The straight line $Q_0 = Q_r + DA_0$ that can be fitted to these measurements has $Q_r = 33 \times 10^{-3} \text{W m}^{-2}$ and $D = 7.5 \text{ km}$. (After Roy et al. (1968).) (b) Best-fitting straight lines for other heat-flow provinces: CA, central Australia; B, Baltic shield; BR, Basin and Range; C, Atlantic Canada; EW, England and Wales; EUS, eastern USA; I, India; S, Superior Province; SN, Sierra Nevada; and Y, Yilgarn block, Australia. (After Jessop (1990).)

1. *Heat generation is uniformly concentrated within a slab with thickness D .*
In this case, using Eq. (7.16), we obtain

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_0}{k} \quad \text{for } 0 \leq z \leq D$$

Integrating once gives

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{A_0}{k}z + c \quad (7.76)$$

where c is the constant of integration. At the surface, $z = 0$, the upward heat flow $Q(0)$ is

$$\begin{aligned} Q(0) = Q_0 &= k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= kc \end{aligned} \quad (7.77)$$

Therefore, the constant c is given by

$$c = \frac{Q_0}{k}$$

At depth D , the upward heat flow is

$$\begin{aligned} Q(D) &= k \left(-\frac{A_0 D}{k} + \frac{Q_0}{k} \right) \\ &= -A_0 D + Q_0 \\ &= Q_r \end{aligned} \tag{7.78}$$

Thus, in this case, the heat flow $Q(D)$ into the base of the uniform slab (and the base of the crust, since all the heat generation is assumed to be concentrated in the slab) is the Q_r of Eq. (7.75).

Tectonic implications of spatial variation of b-values and heat flow in the Aegean region

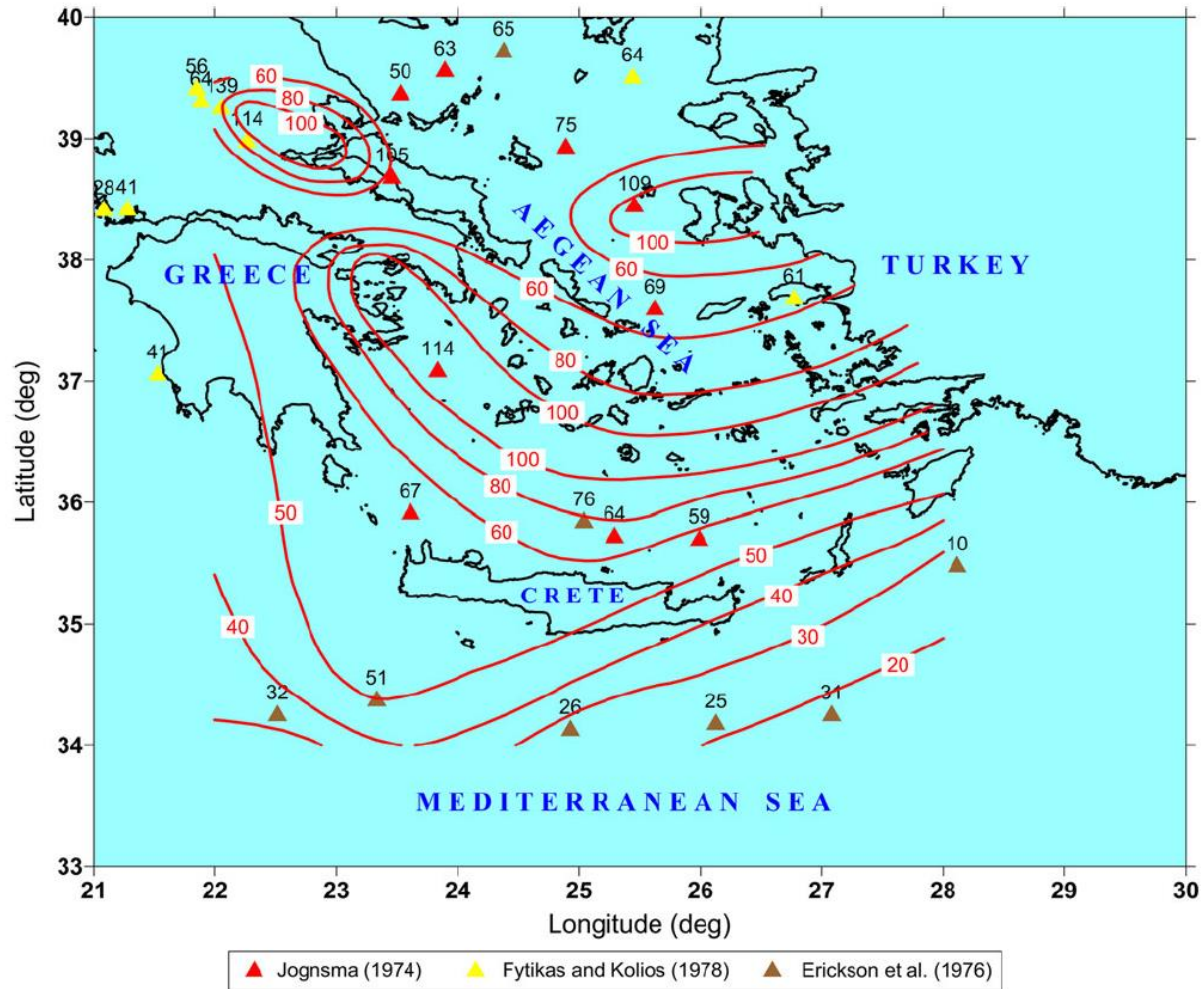


Fig. 2 The heat flow contours of the study area (prepared from Fytikas 1980). Triangle symbols show the heat flow values from Jongsma (1974); Erickson et al. (1976) and Fytikas and Kolios (1978)

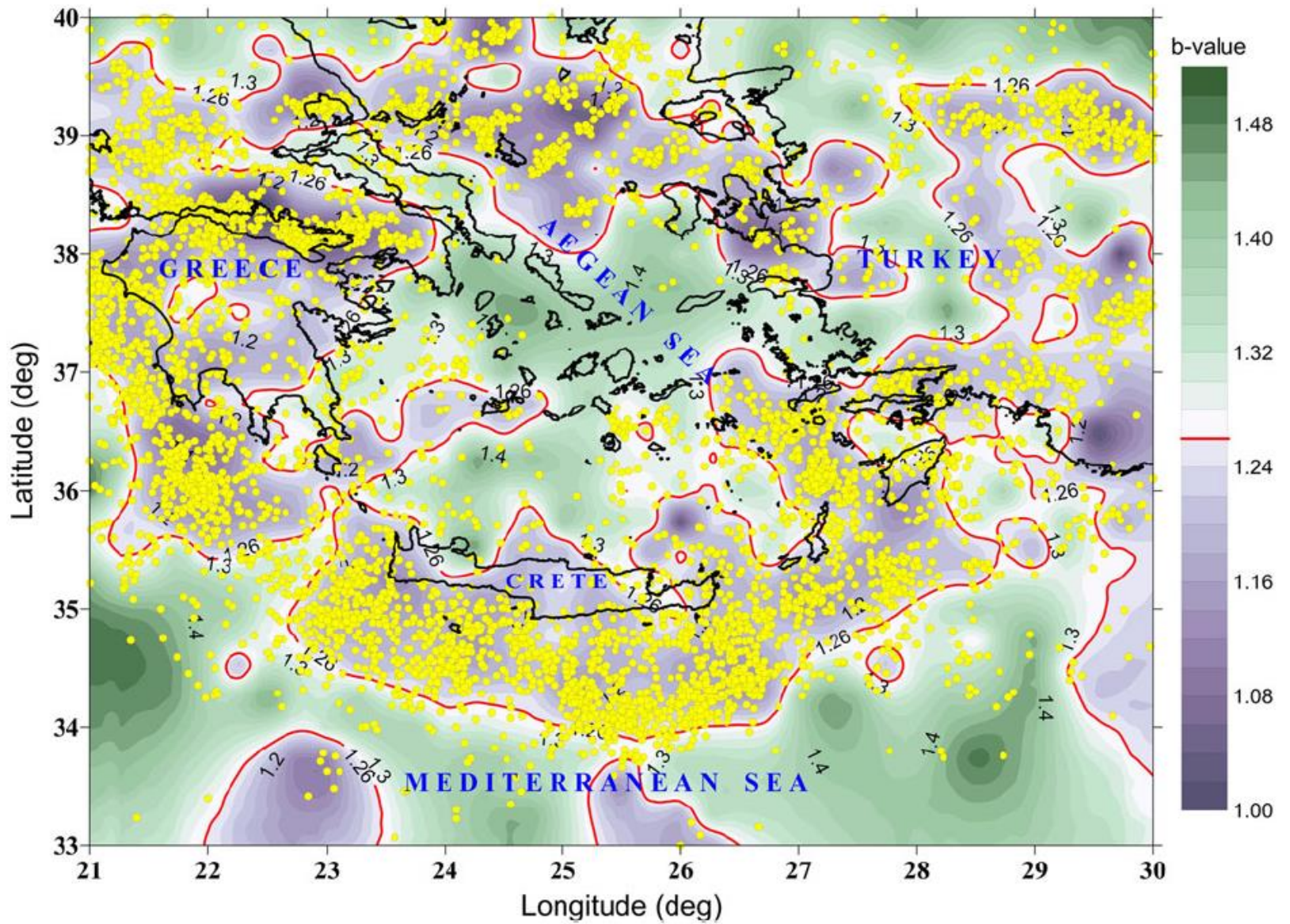


Fig. 7 b-value map (0–180 km) and epicenter distribution of earthquakes

The application of the $cB\Omega$ model for the calculation of the variation of the activation volume for creep with depth in the Earth's lower mantle

F. Vallianatos and K. Eftaxias

A MATERIAL SCIENCE APPROACH FOR THE EVALUATION OF THE RHEOLOGICAL STATE INTO THE EARTH'S LOWER MANTLE

F. VALLIANATOS,¹ K. EFTAXIAS² AND A. VASSILIKOU-DOVA²

¹Technical University of Crete, Chania, 73100, Crete, Greece; ²University of Athens, Section of Solid State Physics, Greece

...odynamic model which connects the Gibbs energy with the bulk properties. According to this model the Gibbs energy g^i is given by:

$$g^i = c^i B \Omega \quad (1)$$

where B is the isothermal bulk modulus, Ω is the mean atomic volume and c^i is a constant independent of temperature and pressure; for a given host lattice c^i depends only on the mechanism i (i = activation, formation, or migration) (Varotsos and Alexopoulos, 1986).

Isoviscosity and adiabaticity in the Lower Mantle We now proceed to the discussion of the isoviscosity of the lower mantle by applying the $cB\Omega$ model. A combination of eqs(1) and (2) leads to an expression for the viscosity η :

$$\eta = \eta_o^* \exp(c^{\text{act}} B \Omega / kT) \quad (7)$$

An insertion of the definition of isoviscous temperature into eq(7) leads to:

$$T_{\text{isov}} = (B/B_o)(\rho_o/\rho)(c^{\text{act}}/c_o^{\text{act}})T_o \quad (8)$$

In order to obtain the lower value of T_{isov} we use eq(3) for the depth variation of c^{act} (i.e. $\frac{\kappa^c = \kappa}{z}$) and we get:

$$T_{1,\text{isov}} = (B/B_o)(\rho_o/\rho)T_o \exp\left(\int_{z_o}^z -\kappa(z)dP(z)\right) \quad (9)$$

In Figure 2 we have plotted $T_{1,\text{isov}}$ calculated from eq(9) and compared it with the adiabatic temperature T_{ad} from the lower mantle derived by Brown and Shankland.⁸

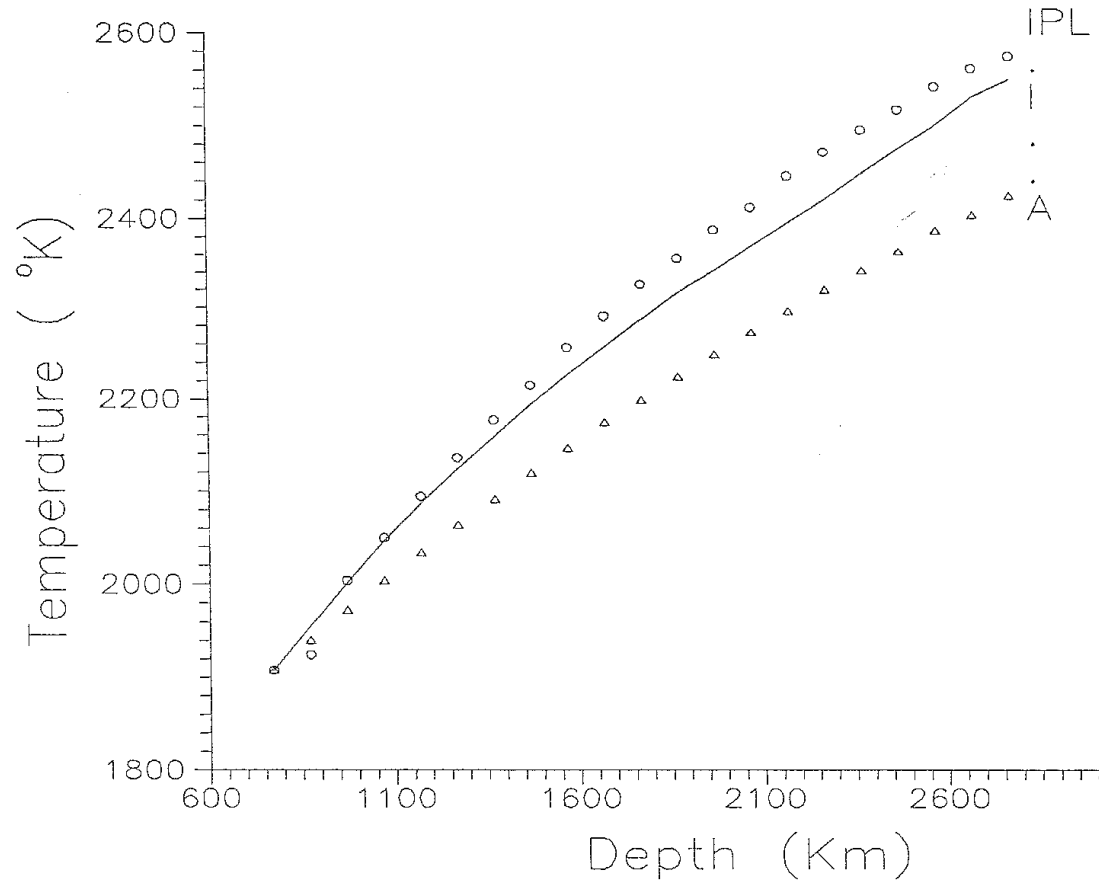


FIGURE 2 The lower permissible value of isoviscous geotherm (I) calculated from eq.(10) with ρ and B from P.R.E.M. The adiabat is taken from Brown and Shankland (1981). The curve IPL is the isoviscous geotherm calculated by Poirier and Liebermann (1984).

Geothermodynamics

or

Heat in the Earth

Heat vs Temperature

T => how fast individual particles are moving around. For a bunch of particles you can think of T as a mean speed. Because the speed of a particle is related to its kinetic energy ($= 1/2 mv^2$) then T will be related to its energy as well.

Q => the total energy represented by all these particles moving about.

Obviously, it is possible to have high T and low Q, and vice versa.

In a rock, the “particles” are atoms in a lattice, and T represents an amplitude of vibration about an equilibrium point (kind of like a spring). More on this later.

It is useful to define a material constant c_p called the “specific heat” as the amount of heat Q that is required to raise a unit mass (say 1 kg) of stuff a unit degree of temperature (degree K). c_p will then have the units $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ and we can write

$$\Delta Q = c_p m \Delta T$$

In most materials, a change in temperature relates to a change in volume and pressure. In a solid, it is easier for elements of a lattice to move farther apart than closer together, so even in a solid there will be a net expansion. In a situation where the pressure p does not change, we can relate the change in temperature to a change in volume by the thermal expansion coefficient α :

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$$

The division by V makes this a fractional change in volume. α has units of K^{-1} .

Note that a change in volume constitutes a change in energy. So, if we add heat (energy) to a system, we could increase the volume without increasing the temperature (all physical work) or increase the temperature without increasing the volume (all internal energy) or some combination of the two.

We write this as

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = T\Delta S$$

ΔU = change in internal energy

ΔW = work done externally (like volume change).

The last term on the right is called the change in Entropy (S).

This is the second law of thermodynamics.

Physically, entropy is a measure of a dispersion of energy from a concentrated to a dilute state. ΔS is always ≥ 0 , which means that energy is always dispersive. This is why heat always flows from hot areas to cold areas, for example.

So, in the above equation, ΔQ is the amount of energy that was dispersed.

If $\Delta S = 0$, a given process is reversible, meaning that we can go back to a previous state

if $\Delta S > 0$, then the process is irreversible, and we can't go back.

Note that if $\Delta S = 0$, then the second law says that we can change T without exchanging heat ($\Delta Q = 0$). This special kind of process is called *adiabatic*.

Heat transport in the Earth

Three mechanisms: Conduction, Convection, and Radiation.

Advection also occurs, but is less important as a general mechanism.

Radiation is electromagnetic energy in the infrared part of the spectrum. It is important for transport through space (and for global warming), but not very important within the Earth (interior materials are opaque).

Conduction is the most important mechanism for heat transfer in solids, and can be used to understand a lot of near surface and/or short duration heating phenomena. However, it is very inefficient for heat transfer.

Convection involves hot stuff physically moving to cold stuff. You can observe this easily in air and liquids, but what about solids? Well, on geologic time scales, rocks can look like extremely viscous liquids. It turns out that convection rules in the interior of the Earth.

Conduction:

Mechanisms:

1. In metals, free electrons conduct heat. As temperature increases, they move faster.
2. In “insulators”, lattice vibrations conduct heat by forces of mutual repulsion.

Both can be described macroscopically in the same way.

Define q as the heat flux = amount of heat that passes through a unit area during a unit time (example units: watts/m²).

$$q = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$$

According to Fourier Law of heat conduction, q is related to the temperature gradient as

$$q = -k \frac{dT}{dz}$$

where k is called the thermal conductivity of the medium (units = watts $\text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

The negative sign means that heat flows from high temp to low temp. Note that this law ALWAYS applies LOCALLY.

If the heat flow is constant and unchanging everywhere, then we are done. Thus, if there are no INTERNAL sources or sinks of heat in our medium, and heat flow is steady state, then the temperature gradient is LINEAR.

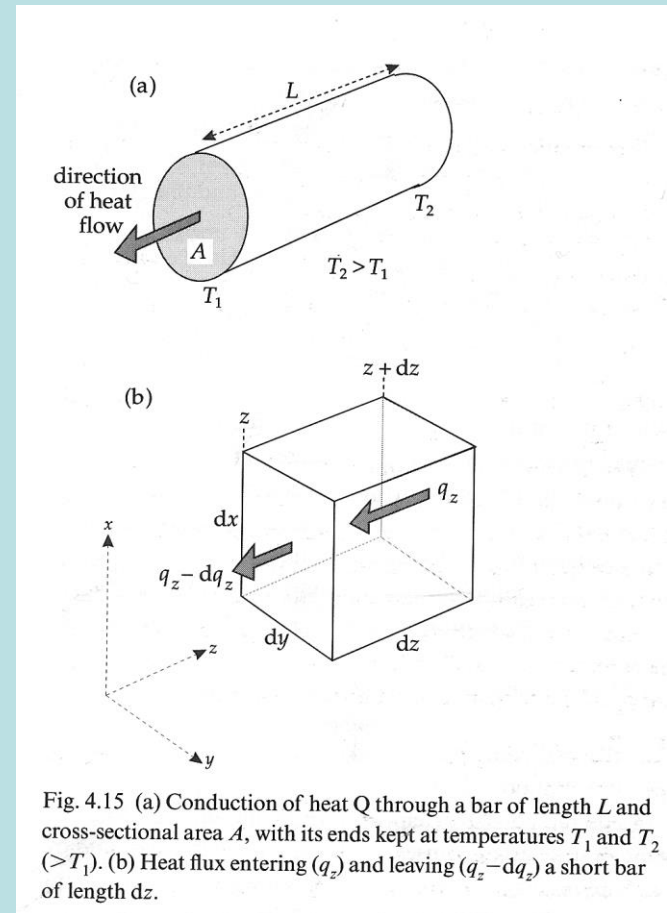
Steady State Heat Production

But what if we have sources or sinks of heat?
For example: radioactive heat production in the earth.

In one dimension we imagine a volume where the amount of heat leaving a medium at $(z + dz)$ is greater than the heat coming in at z :

$$q(z + dz) - q(z) = \frac{dq}{dz} dz = dz \frac{d}{dz} \left(-k \frac{dT}{dz} \right) = -k dz \frac{d^2 T}{dz^2}$$

Since this is steady state (nothing changes with time) then because there is a net amount of heat leaving the body, something must be supplying it.



For radioactivity, it is useful to define A as the heat production rate per unit mass

$$A = \frac{1}{dm} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\rho dV} \frac{dQ}{dt}$$

The total heat production in our volume then would be

$$\frac{dq}{dz} dz = \frac{1}{dxdy} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{dxdy} \rho dVA = \rho dzA$$

and so

$$\rho Adz = -kdz \frac{d^2T}{dz^2}$$

or

$$0 = k \frac{d^2T}{dz^2} + \rho A$$

The biggest contribution to heat flow from radioactive decay in the Earth comes from U, Th, and K in the continental crust.

It also appears that the concentration of these elements in the crust decays exponentially with depth, and so the heat production must as well. We can therefore adopt:

$$A = A_0 e^{-z/D}$$

Where D is a characteristic “skin depth”.

If we substitute this into the above equation and apply boundary conditions: T_o = surface temperature, q_o = heat flow at surface and q_m = heat flow from deep mantle, then the above diff. eq. will give:

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{\rho}{k} A_o e^{-z/D}$$

Integrating:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\rho D}{k} A_o e^{-z/D} + C_1$$

Applying the heat flow boundary conditions:

$$q_m = k \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=\infty} = kC_1 \qquad q_o = k \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = \rho D A_o + q_m$$

Note that the minus sign is not used because the heat flow is in the $-z$ direction. Thus

$$q_o = q_m + \rho D A_o$$

Thus

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\rho D}{k} A_o e^{-z/D} + \frac{q_m}{k}$$

Integrating again:

$$T = -\frac{\rho D^2}{k} A_o e^{-z/D} + \frac{q_m}{k} z + C_2$$

And applying the temperature b.c. at $z = 0$:

$$T|_{z=0} = T_o = -\frac{\rho D^2}{k} A_o + C_2 \qquad C_2 = T_o + \frac{\rho D^2}{k} A_o$$

Thus

$$T = \frac{q_m}{k} z + T_o + \frac{\rho D^2}{k} A_o (1 - e^{-z/D})$$

Or, since $q_o = q_m + \rho D A_o$

$$T = T_o + q_m \frac{z}{k} + (q_o - q_m) \frac{D}{k} (1 - e^{-z/D})$$

The equation

$$q_o = q_m + \rho D A_o$$

suggests that there should be a linear relation between the heat flow measured at the surface and the radioactive heat production rate measured at the surface, and this turns out to be the case. Generally, we find that D is about 10 km.

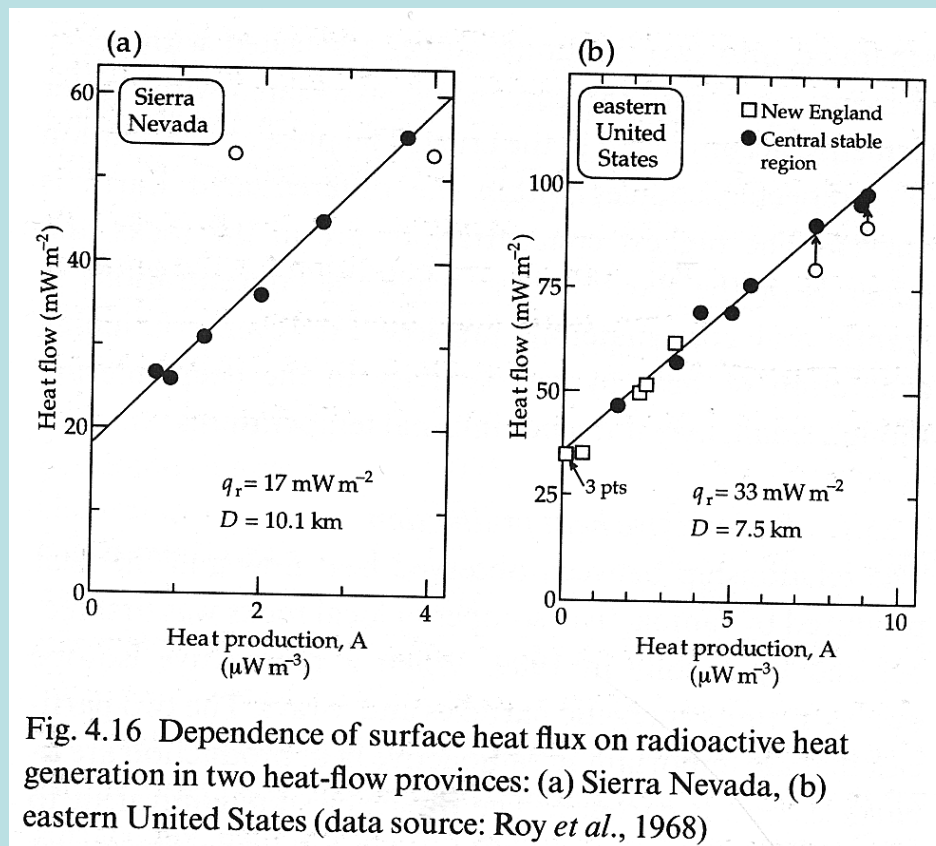


Fig. 4.16 Dependence of surface heat flux on radioactive heat generation in two heat-flow provinces: (a) Sierra Nevada, (b) eastern United States (data source: Roy *et al.*, 1968)

Non steady state heat conduction:

There are of course many situations where heat conduction is not constant in time. Your coffee gets cold, your beer warms up.

Generally, if you don't supply heat to a conducting system, then the system will eventually become all the same temperature.

For now, let's ignore volumetric heat production ($A = 0$). In fact, for a lot of common situations where we worry about bodies heating up or cooling off this is a good assumption.

The cooling/heating rate is just the rate of change of temperature = dT/dt .

Imagine a slab of width dz that is cooling; it will experience a net reduction in heat, which means that the heat flowing out is less than the heat flowing in.

We already described this situation above and found

$$q(z + dz) - q(z) = -k dz \frac{d^2 T}{dz^2}$$

This change in heat flux results in a net change in the internal heat Q . Recall from above that a change in temperature is related to a change in heat by the specific heat c_p , which has units $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$. If a unit volume of the slab is dV , the change in heat per unit time is

$$\frac{dQ}{dt} = Adz\rho c_p \frac{dT}{dt}$$

The net heat flux is just this quantity divided by A . Thus

$$dq = dz\rho c_p \frac{dT}{dt} = dzk \frac{d^2T}{dz^2}$$

or

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \frac{d^2T}{dz^2}$$

where $\kappa = k/\rho c_p$ is called the thermal diffusivity. The above equation is called the thermal diffusion equation or sometimes just the equation of heat conduction (something of a misnomer).

The general solution to the thermal diffusion equation is not trivial and often has to be figured out numerically, but there are a number of geologically significant situations where we can manipulate this equation into something easy to solve.

Case 1: Using separation of variables.

A useful technique for solving the diffusion equation is by separation of variables:

$$T(z,t) = \theta(t)Z(z)$$

Substitution gives:

$$\frac{d(\theta(t)Z(z))}{dt} = \kappa \frac{d^2(\theta(t)Z(z))}{dz^2}$$

$$Z(z) \frac{d\theta(t)}{dt} = \kappa \theta(t) \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

$$\frac{1}{\theta(t)} \frac{d\theta(t)}{dt} = \kappa \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2}$$

The left side depends only on time, the right side only on space. Thus, for example, if we specify a certain $\theta(t)$ then we can solve for $Z(z)$ and vice versa.

A class of problems where this works very well is cyclical heating and cooling at the Earth's surface, caused by daily, seasonal, or geologic (i.e., glacial) cycles.

We can specify variations in the temperature at the surface of the Earth by

$$T(0,t) = T_o e^{i\omega t}$$

where ω is the radial frequency $= 2\pi f$, and we take the real part of this expression (the cosine).

Try

$$Z(z) = Ae^{mz}$$

and solve for A and m.

Substitute:

$$e^{-i\omega t} i\omega e^{i\omega t} = i\omega = \kappa \frac{1}{Ae^{mz}} m^2 Ae^{mz} = \kappa m^2$$

from which

$$m = \pm \sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{i}$$

Note that

$$\sqrt{i} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{1/2} = e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i \sin \pi/4 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

so

$$m = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\kappa}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \pm (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}$$

Hence

$$Z = Ae^{mz} = A \exp\left[\pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z\right] = A \exp\left[\pm\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z\right] \exp\left[\pm i\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z\right]$$

We take the minus sign so that temperature doesn't blow up as z increases:

$$Z = A \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z\right] \exp\left[-i\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}z\right]$$

So then

$$T(z,t) = \theta(t)Z(z)$$

$$= T_o \exp(i\omega t) A \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} z\right] \exp\left[-i\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} z\right]$$

$$= T_o \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} z\right] \exp\left[i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} z\right)\right]$$

Where we recognize that T at z = 0 is T_o, so A = 1.

This gives us a temperature distribution that decreases exponentially with depth and has a depth dependant phase shift. Both the rate of decay and the phase shift depend on the frequency.

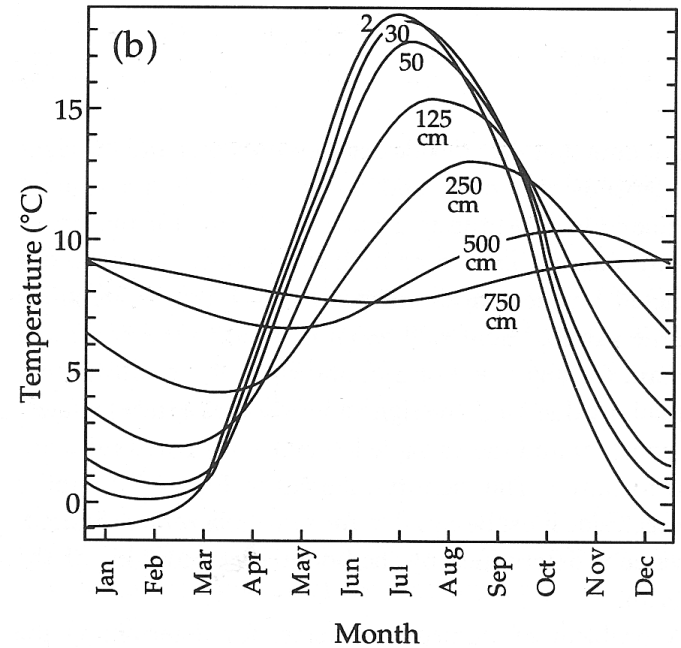
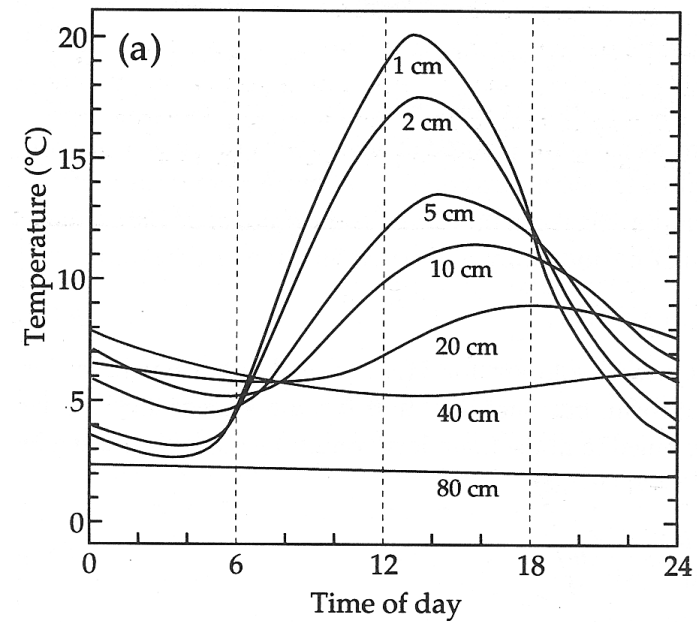


Fig. 4.18 Temperature variations at various depths in a sandy soil: (a) daily fluctuations, (b) annual (seasonal) variations.

Case 2: Instantaneous cooling of a semi infinite half space.

We need to solve this problem to understand how the lithosphere evolves. The solution can also be used to figure out how magma solidifies (or even how a lake freezes).

Here's how we do it:

First, the BC's of this problem are

$$T = T_m \text{ at } t = 0, z > 0$$

$$T = T_s \text{ at } z = 0, t > 0$$

$$T \rightarrow T_m \text{ as } z \rightarrow \infty, t > 0$$

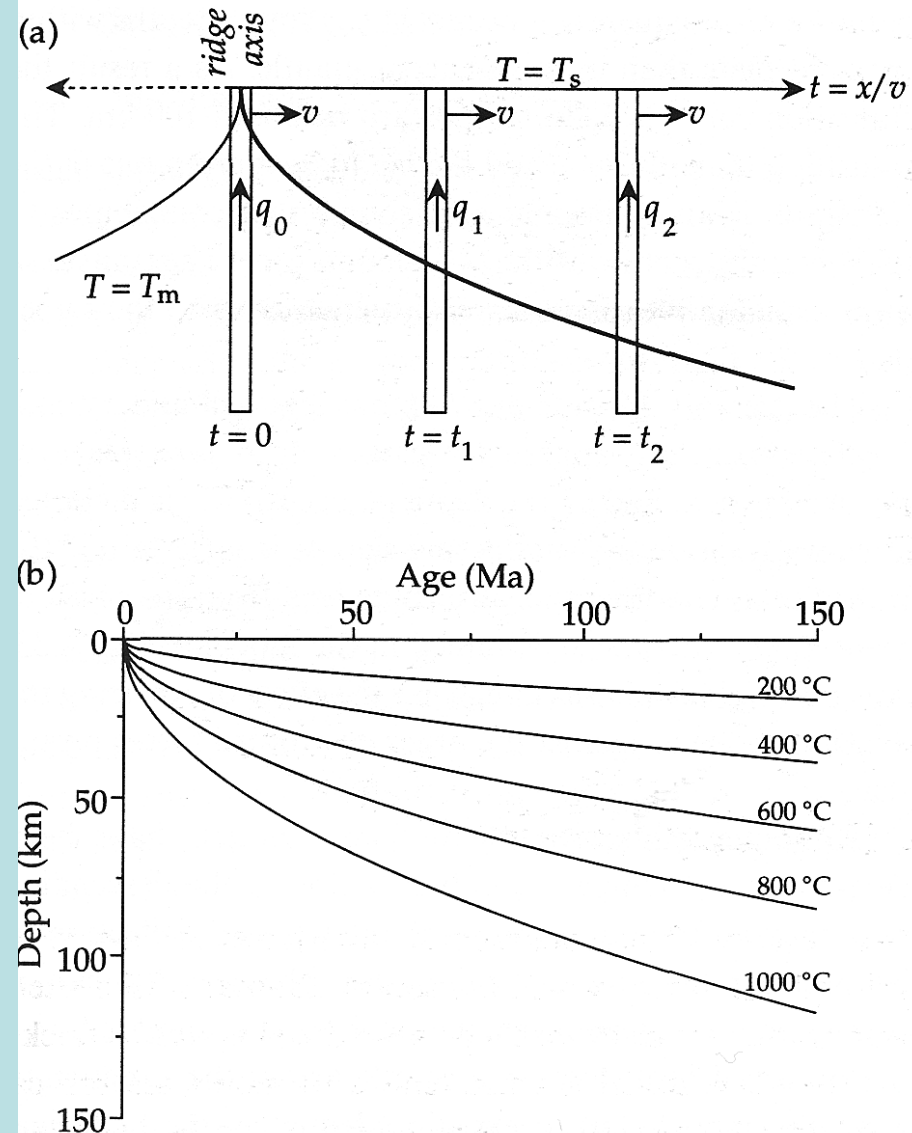


Fig. 4.31 Application of the infinite half-space model to explain the cooling of oceanic lithosphere: (a) vertical heat flow in narrow columns that move away from the ridge crest, and (b) predicted thermal structure in the cooling plate (after Turcotte and Schubert, 1982).

Define a dimensionless temperature θ as

$$\theta = \frac{T - T_m}{T_s - T_m}$$

and a dimensionless variable

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{kt}}$$

Then we can rewrite the thermal diffusion equation as

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

or in other words, we convert a PDE of two variables (z, t) into an ODE of one variable (η). This is much easier to deal with.

The solution to this ODE is $\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' = 1 - \text{erf}(\eta) = \text{erfc}(\eta)$

we call the integral part the “error function” and 1 minus that the “complementary error function”.
Resubstituting:

$$\frac{T - T_m}{T_s - T_m} = \text{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)$$

or

$$1 - \frac{T - T_m}{T_s - T_m} = \frac{T_s - T_m - T + T_m}{T_s - T_m} = \frac{T - T_s}{T_m - T_s} = 1 - \text{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right) = \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)$$

$$T(z, t) = T_s + (T_m - T_s) \text{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)$$

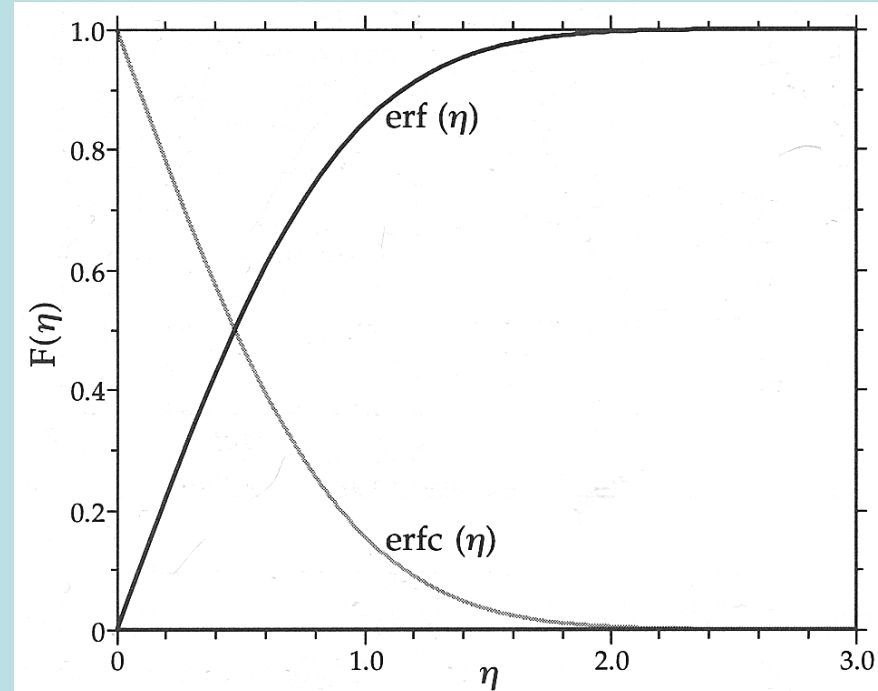


Fig. 4.19 The error function erf(η) and complementary error function erfc(η).

The heat flow is

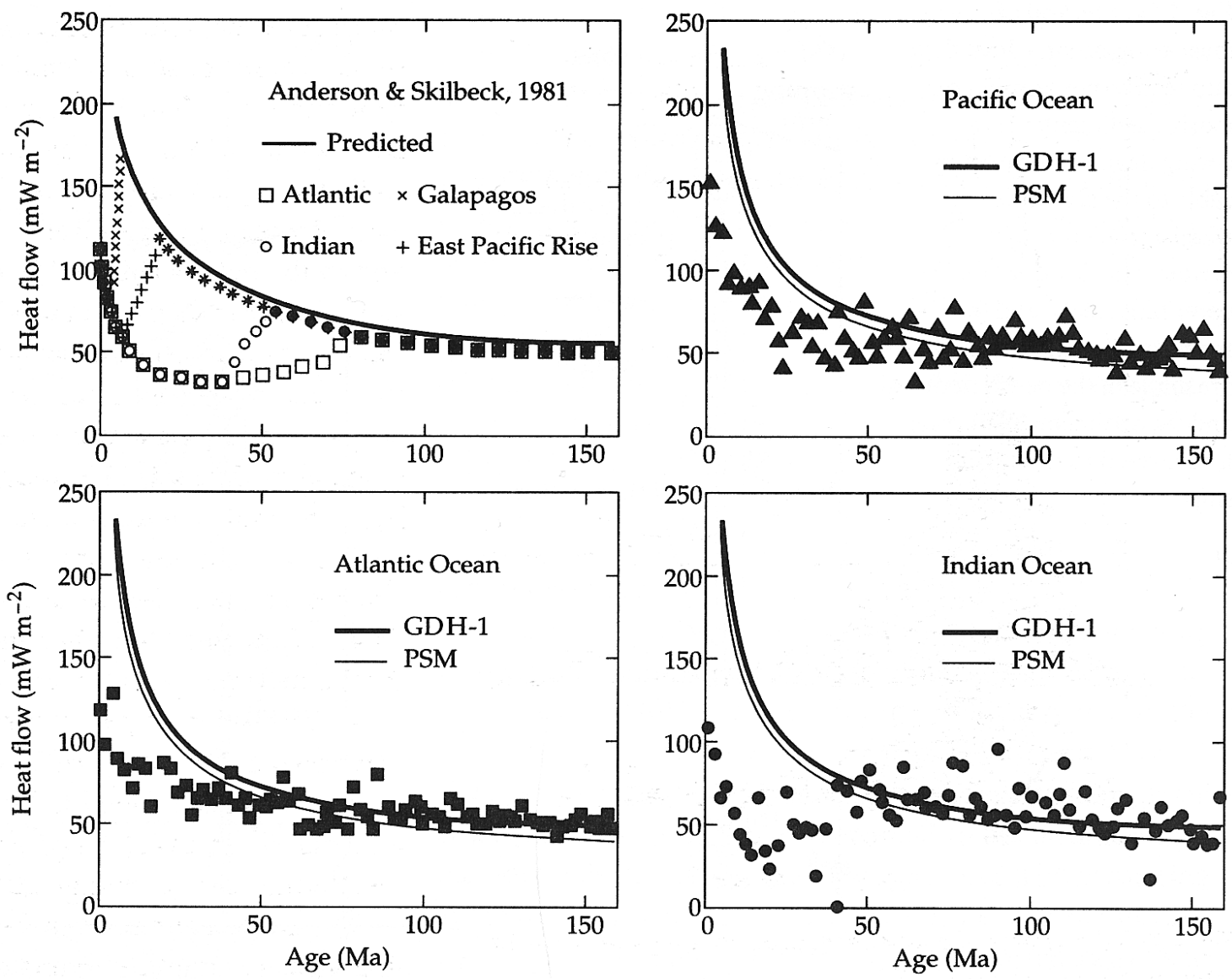
$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z} = -k(T_m - T_s) \frac{\partial}{\partial z} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right] = -\frac{k(T_m - T_s)}{\sqrt{\pi \kappa t}} \exp \left(\frac{-z^2}{4\kappa t} \right)$$

so at the surface ($z=0$)

$$q_o = -\frac{k(T_m - T_s)}{\sqrt{\pi \kappa t}}$$

Note that the surface heat flow is predicted to decrease like $1/\sqrt{t}$. As shown in next figure, this works well for oceans, although there is a lot of uncertainty in HF measurements.

Fig. 4.25 Comparison of observed and predicted heat flow as a function of age of oceanic lithosphere. (a) Schematic summary for all oceans, showing the influence of hydrothermal heat flow at the ocean ridges (after Anderson and Skilbeck, 1981). Comparisons with the reference cooling models PSM (Parsons and Sclater, 1977) and GDH1 (Stein and Stein, 1992) for (b) the Pacific, (c) Atlantic and (d) Indian oceans.



We can also calculate what the depth of the oceans should be by invoking isostasy. We consider that oceanic lithosphere is represented by some depth of water w above a cooling half space. Isostasy requires:

$$\rho_m (w + z_L) = w\rho_w + \int_0^{z_L} \rho'(z') dz'$$

or

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^{z_L} \rho'(z') dz' - \rho_m z_L = \int_0^{z_L} (\rho'(z') - \rho_m) dz'$$

but

$$\rho'(z') - \rho_m = \rho_m \alpha (T_m - T(z'))$$

where α is our thermal expansion coefficient. We can also extend let $z_L \rightarrow \infty$ so that

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^{\infty} \rho_m \alpha (T_m - T(z')) dz' = \rho_m \alpha \int_0^{\infty} (T_m - T(z')) dz'$$

We know from the half space cooling solution that

$$\frac{T - T_m}{T_s - T_m} = \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$$

so

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^{\infty} \rho_m \alpha (T_m - T(z')) dz' = \rho_m \alpha (T_m - T_s) \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{z'}{2\sqrt{\kappa t}}\right) dz'$$

or

$$w(\rho_m - \rho_w) = \rho_m \alpha (T_m - T_s) \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

$$w = \frac{\rho_m \alpha (T_m - T_s)}{(\rho_m - \rho_w)} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}}$$

or in other words w should increase like \sqrt{t} . As shown in the following figure, this works ok for $t <$ about 80 Million yrs, but then w flattens out.

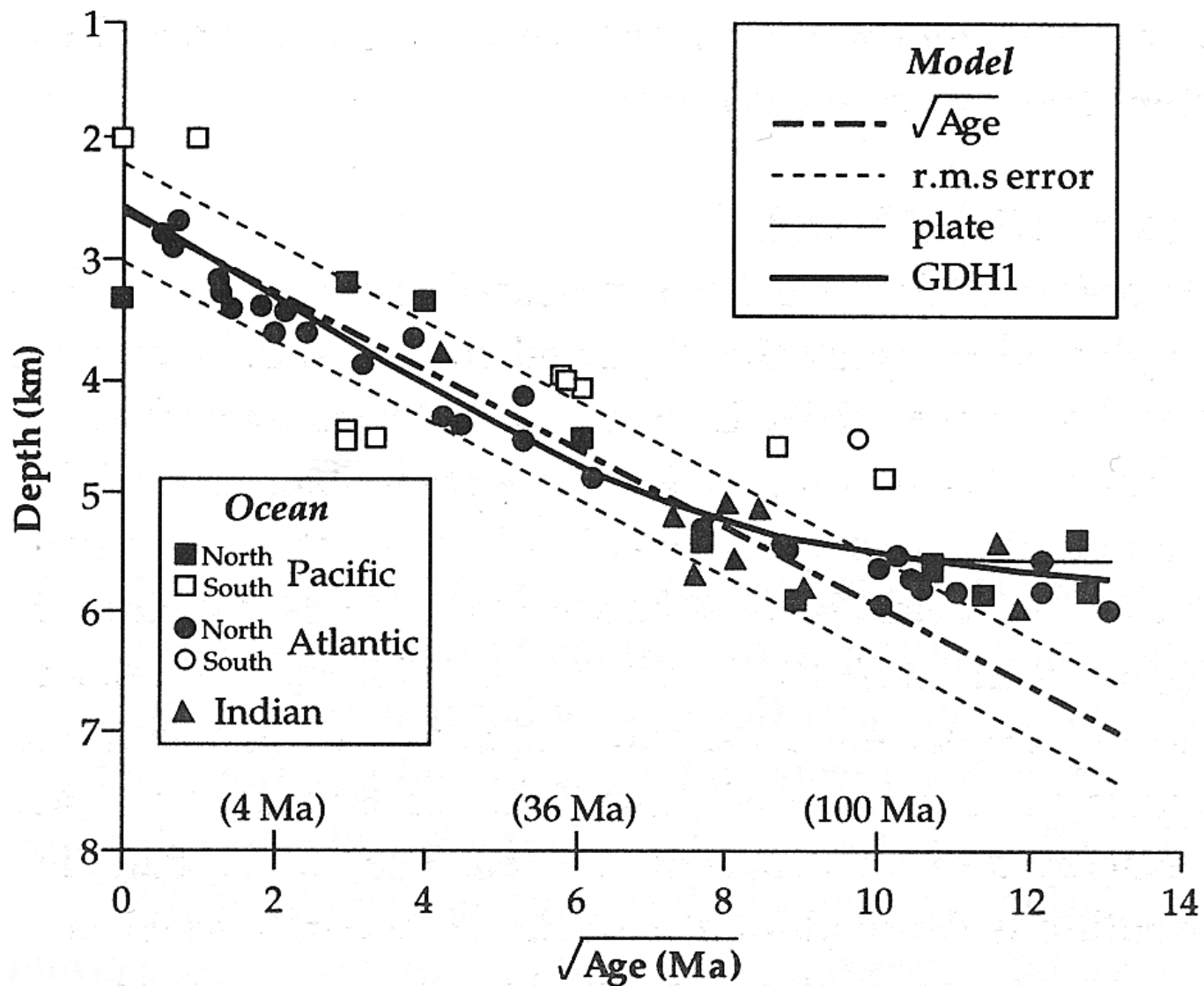


Fig. 4.26 Relationship between mean ocean depth and the square root of age for the Atlantic, Pacific and Indian oceans, compared with theoretical curves for different models of plate structure (after Johnson and Carlson, 1992).

One way to correct is to use the “plate model” instead of the “half space model”. The plate model specifies that the temperature at a certain depth should stay at T_m . Thus, at very old age, the heat flux is constant and $T(z)$ is linear. This seems to fit the data pretty well for z_L of about 125 km depth.

The source of the extra heat is presumed to be basal shear heating (from the lithosphere moving on top of the asthenosphere).

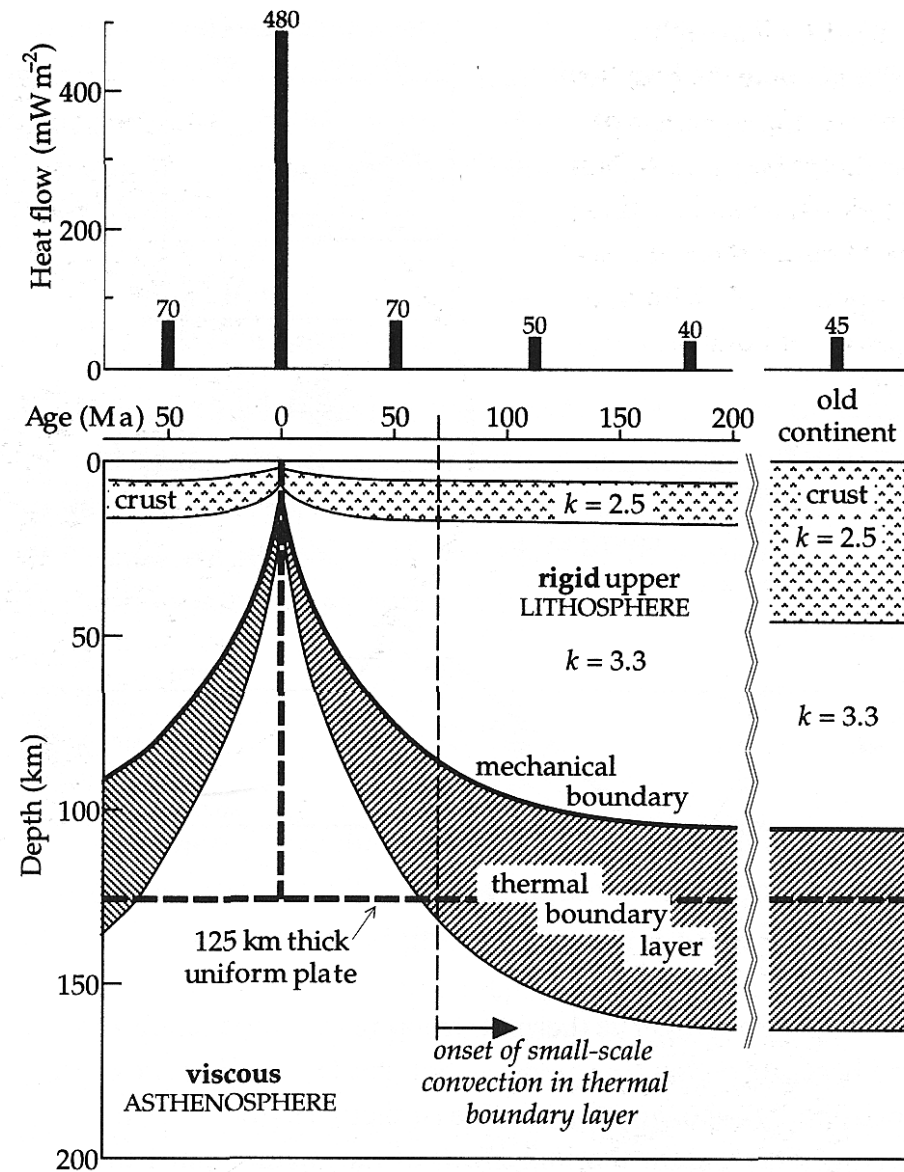


Fig. 4.32 Schematic diagram of lithospheric plate structure beneath oceans and continents. The dashed line indicates the approximation as a plate of constant thickness (based upon Parsons and McKenzie, 1978, and Sclater *et al.*, 1981).

The descending slab

The slab heats back up as it descends into the mantle. Two complications:

1. Shear heating at the top: $q = ut$.
2. Phase changes. Olivine-spinel is exothermic; spinel-perovskite is endothermic.

To understand the effect, we need to know the P-T relationship at which the two phases can coexist. This relationship is called the Clapeyron curve.

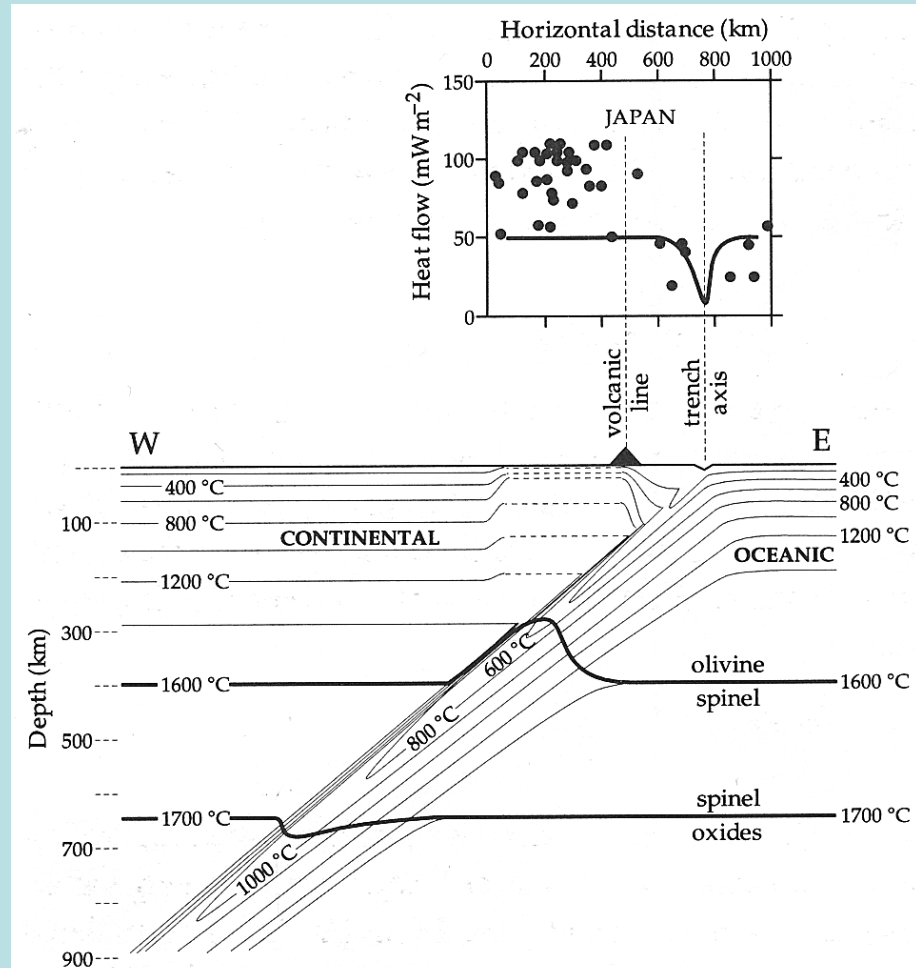


Fig. 4.33 (Bottom): The thermal structure of a subduction zone and back-arc region (the model of Schubert *et al.*, 1975, inverted horizontally), showing the possible isotherms in the cold subducting plate and the thermal effects of the olivine-spinel and spinel-oxide phase changes. (Top): comparison of heat-flow measurements across the Japanese trench with the theoretical heat flow (solid curve) computed by Toksöz *et al.* (1971).

For Olivine – spinel, the slope of the Clapeyron curve (dp/dT) is positive, which means that if the pressure increases, the temperature must increase as well in order for Olivine to turn into spinel.

Consider what happens in a slab. Outside the slab, olivine is turning into spinel at a certain P-T condition. Inside the slab, the Pressure is the same, but the temperature is lower.

This means that the transition will take place at lower pressures, or in other words at shallower depth. Thus we expect the transition to be elevated in the slab, and this should enhance subduction. Just the opposite happens for spinel-perovskite, which means that subduction should be resisted.

Convection

Conduction is the predominant mechanism for heat transfer near the surface, but it cannot be for the mantle. This is because the Earth is losing too much heat. Near surface temperature gradients are on the order of 30K km^{-1} , so that at this rate the center of the Earth would be $200,000\text{ K}$, and more importantly everything below a couple hundred km would be molten, and we know from seismology that the mantle is solid. To explain what happens in the mantle, we appeal to convection.

Recall that as you heat up something, it will expand, and hence become less dense. Thus, if you heat up something from the bottom, there will be a tendency to produce a gravitational instability.

First, let's recall what an adiabat is. It is the condition of no change in entropy, which means that the temperature of a body changes without any gain or loss of heat.

Imagine a small volume at a certain depth (= pressure) in equilibrium with its surroundings. Now, displace it to a shallower depth (less pressure). Remember that

$$PV \sim T$$

so if V is constant and there is no ΔQ , then a decrease in P leads to a decrease in T . If that T just happens to be the same temperature as it's new surroundings, there will be no ΔQ (no temperature gradient) and no δV . In other words, it is stable.

The temperature gradient that corresponds to this condition is called the *adiabatic temperature gradient*.

Now suppose the gradient is greater than adiabatic (superadiabatic). Then, as the volume ascends, it will still be hotter than its surroundings.

This will result in a volume increase, and hence a local density decrease, which creates a net gravitational buoyancy.

The opposite will occur if a downward displacement occurs (there will be a negative buoyancy produced).

BUT there is resistance to this process from

(1) viscosity of the surrounding medium and

(2) the conduction of heat away from the volume that will equilibrate it with its surroundings.

To figure out if the material will rise spontaneously or not (i.e., “convect”) we form a ratio between the forces that make it go up (buoyancy) and those keeping it down (conduction and viscosity) and we call this the Rayleigh number.

A useful form of the Rayleigh number is:

$$Ra = (g\alpha\theta/\kappa\nu) D^4$$

where

g gravitational acceleration

α thermal expansion coefficient

θ superadiabatic temperature gradient (the gradient of the temperature above the adiabat)

κ diffusivity

ν dynamic viscosity (= regular viscosity/density)

D thickness of the fluid layer

Note sensitivity of Ra to D!

Note that convective systems tend to be stabilizing: because heat is taken out of a system so efficiently, the temperature gradient tends to return to an adiabat.

Thus, the temperature gradient in a convecting system tends to be just slightly above adiabatic.

What can we say about temperature in the Earth?

Recall from seismology we know V_p and V_s , from which we can get ρ , from which we can get pressure, and we also know about phase changes in from olivine-spinel and spinel-perovskite and the depth of the CMB.

And of course we can make lab measurements on likely rocks and minerals to determine their thermal properties.

Even so, we have only a vague idea of how temperature changes with depth.

However, it seems clear that if the Earth's interior cannot be losing heat by conduction or radiation, it must be doing so by convection, and from what we learned before it seems most likely that the temperature gradient in the Earth is close to adiabatic.

So it is of interest to compute the adiabatic temperature gradient.

We can do this using a relation developed by Maxwell in late 1800s:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

This says that the change of temperature with pressure at constant entropy (i.e. adiabatic conditions) is equal to the change of volume with entropy at constant pressure.

Working on the right hand side first, let's do

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \alpha V \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p$$

Recall from 2nd law of thermo:

$$\partial \mathcal{S} = \frac{\partial \mathcal{Q}}{T}$$

and that the relation between dQ and dT is

$$\partial \mathcal{Q} = c_p m \partial T$$

So

$$\frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}} = \frac{\partial T}{\partial \mathcal{Q}/T} = T \frac{\partial T}{\partial \mathcal{Q}} = \frac{T}{c_p m}$$

Hence

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathcal{S}} \right)_p = \alpha V \left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}} \right)_p = \alpha V \frac{T}{c_p m} = \frac{\alpha T}{c_p \rho}$$

and

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{\alpha T}{c_p \rho}$$

Now, $\delta p = \rho g dz$ so

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{\alpha T}{c_p \rho} = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_s = \frac{\alpha g}{c_p} T$$

So, if we have estimates of how each of the parameters varies with depth, we can derive $T(z)$.

The gradient in the mantle is reckoned to be about 0.3 K km^{-1} and, in the core, 0.8 K km^{-1} (much less than the conductive gradient).

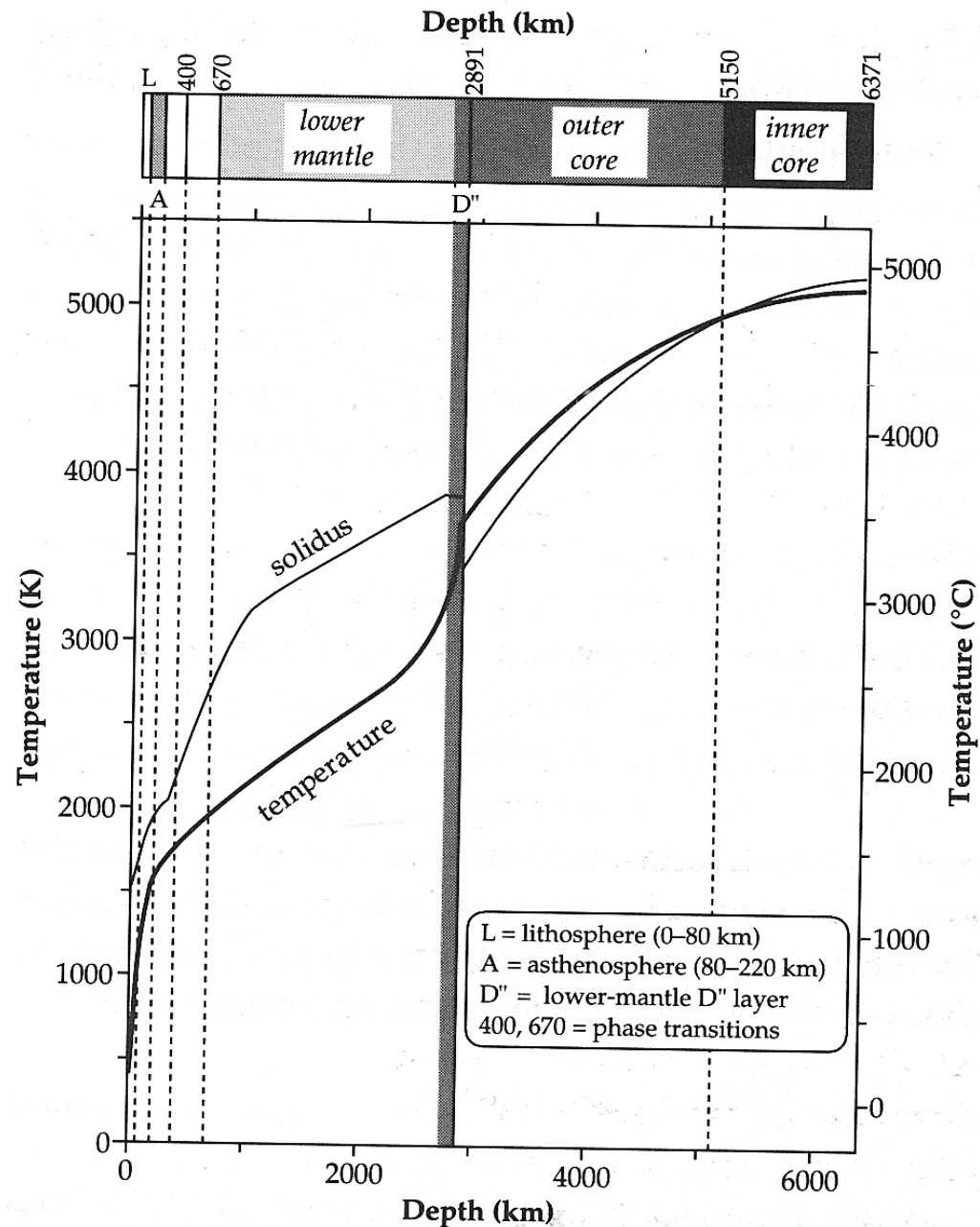


Fig. 4.14 Variations of estimated temperature and melting point with depth in the Earth (based upon data from Stacey, 1992).

"Στο παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει γίνει χρήση διαφανειών και παρουσιάσεων των Καθ. Κ. Παπαζάχου και Δ. Κοντοπούλου, (ΑΠΘ) καθώς και υλικό από το Βιβλίο «Εισαγωγή στη Γεωφυσική» των Παπαζάχος και Παπαζάχος (2008) . Ευχαριστούμε τους Συγγραφείς για την ευγενική παραχώρηση της άδειας χρήσης του υλικού " .

