

# ΓΕΩΦΥΣΙΚΗ

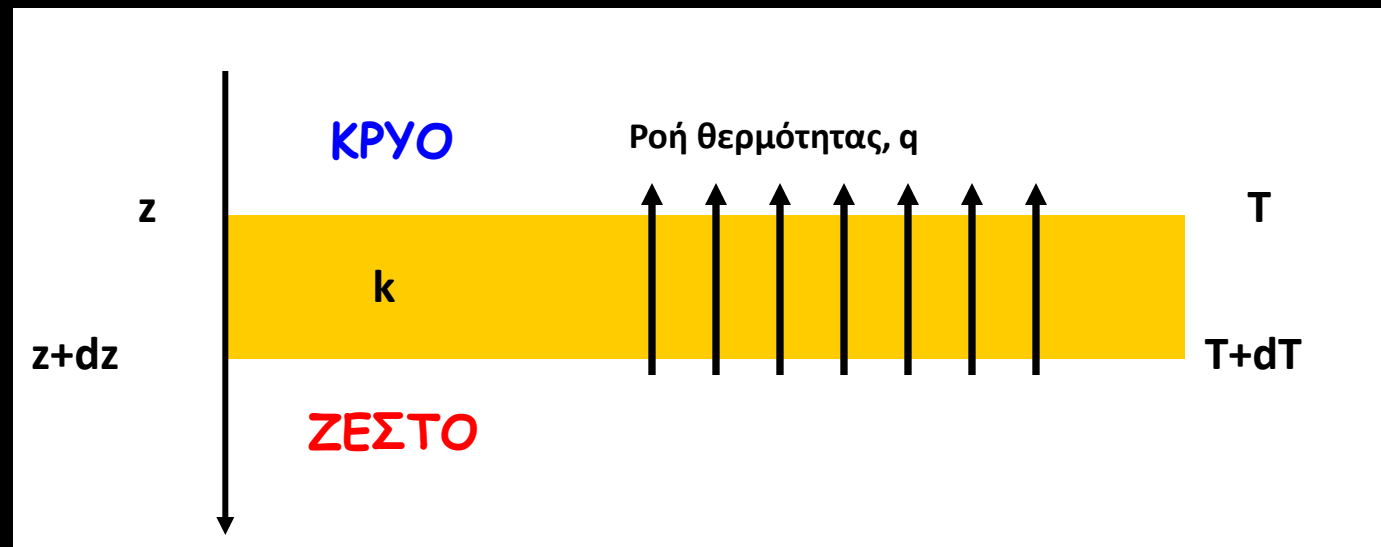
**Εργαστήριο** : Θερμότητα του εσωτερικού της Γης

Η ροή θερμότητας από το εσωτερικό της Γης, μπορεί να εκφραστεί από τη σχέση:

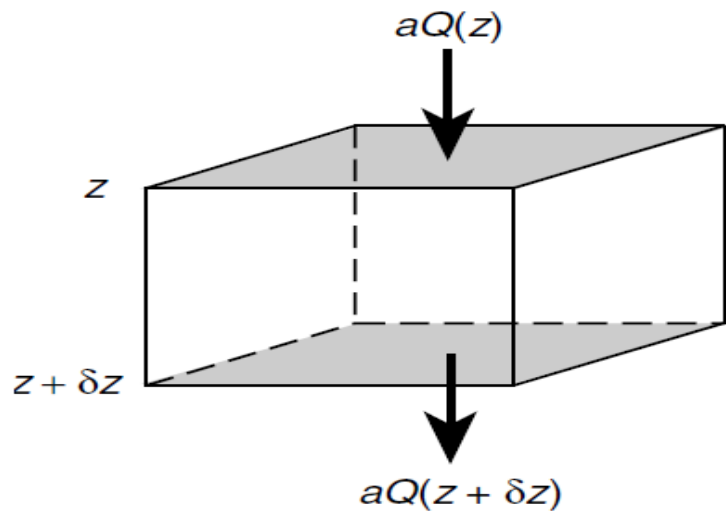
$$q = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

όπου  $k$  είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας  
και  $\partial T / \partial z$  είναι η κατακόρυφη θερμοβαθμίδα

→ Ικανότητα ενός μέσου να μεταφέρει θερμότητα



Ροή θερμότητας,  $q$ , από θερμή σε ψυχρή περιοχή που απέχουν απόσταση  $dz$  και έχουν διαφορά θερμοκρασίας  $dT$ , για υλικό μέσο με συντελεστή θερμικής αγωγής,  $k$ .



Expanding  $Q(z + \delta z)$  in a Taylor series gives

$$Q(z + \delta z) = Q(z) + \delta z \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{(\delta z)^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \dots$$

heat entering across  $z$  – heat leaving across  $z + \delta z$

$$= aQ(z) - aQ(z + \delta z)$$

$$= -a \delta z \frac{\partial Q}{\partial z}$$

Suppose that heat is generated in this volume element at a rate  $A$  per unit volume per unit time. The total amount of heat generated per unit time is then

$$Aa \delta z$$

(7.7)

$$Aa \delta z - a \delta z \frac{\partial Q}{\partial z}$$

If the material has density  $\rho$  and specific heat  $c_p$ , and undergoes a temperature increase  $\delta T$  in time  $\delta t$ , the rate at which heat is gained is

$$c_p a \delta z \rho \frac{\delta T}{\delta t}$$

(7.9)

$$c_p a \delta z \rho \frac{\delta T}{\delta t} = A a \delta z - a \delta z \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$c_p \rho \frac{\delta T}{\delta t} = A - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (7.10)$$

In the limiting case when  $\delta z, \delta t \rightarrow 0$ , Eq. (7.10) becomes

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = A - \frac{\partial Q}{\partial z} \quad (7.11)$$

Using Eq. (7.4) for  $Q$  (heat flow per unit area), we can write

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = A + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (7.12)$$

or

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A}{\rho c_p} \quad (7.13)$$


This is the one-dimensional heat-conduction equation.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho c_p}$$

For a steady-state situation when there is no change in temperature with time, Eq. (7.15) becomes

$$\nabla^2 T = -\frac{A}{k} \quad (7.16)$$

In the special situation when there is no heat generation, Eq. (7.15) becomes


$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_P} \nabla^2 T \quad (7.17)$$

This is the *diffusion equation* (Section 7.3.5).

### Relative motion through a region where the temperature varies with depth

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_P} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A}{\rho c_P} - u_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (7.18)$$

and

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_P} \nabla^2 T + \frac{A}{\rho c_P} - \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (7.19)$$

In Eq. (7.19),  $\mathbf{u}$  is the three-dimensional velocity of the material. The term  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$  is the *advective-transfer* term.

Table 7.1 *Typical concentrations of radioactive elements and heat production of some rock types*

	Granite	Tholeiitic basalt	Alkali basalt	Peridotite	Average continental upper crust	Average continental crust	Average oceanic crust	Undepleted mantle
Concentration by weight								
U (ppm)	4	0.1	0.8	0.006	2.8	1.1	0.9	0.02
Th (ppm)	15	0.4	2.5	0.04	10.7	4.2	2.7	0.10
K (%)	3.5	0.2	1.2	0.01	3.4	1.3	0.4	0.04
Heat generation ( $10^{-10} \text{ W kg}^{-1}$ )								
U	3.9	0.1	0.8	0.006	2.8	1.1	0.9	0.02
Th	4.1	0.1	0.7	0.010	3.0	1.2	0.7	0.03
K	1.3	0.1	0.4	0.004	1.2	0.5	0.1	0.007
Total	9.3	0.3	1.9	0.020	7.0	2.7	1.7	0.057
Density ( $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ )	2.7	2.8	2.7	3.2	2.7	2.7	2.9	3.2
Heat generation ( $\mu\text{W m}^{-3}$ )	2.5	0.08	0.5	0.006	1.8	0.7	0.5	0.02

1. *Heat generation is uniformly concentrated within a slab with thickness  $D$ .*  
In this case, using Eq. (7.16), we obtain

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_0}{k} \quad \text{for } 0 \leq z \leq D$$

Integrating once gives

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{A_0}{k}z + c \quad (7.76)$$

where  $c$  is the constant of integration. At the surface,  $z = 0$ , the upward heat flow  $Q(0)$  is

$$\begin{aligned} Q(0) = Q_0 &= k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} \\ &= kc \end{aligned} \quad (7.77)$$

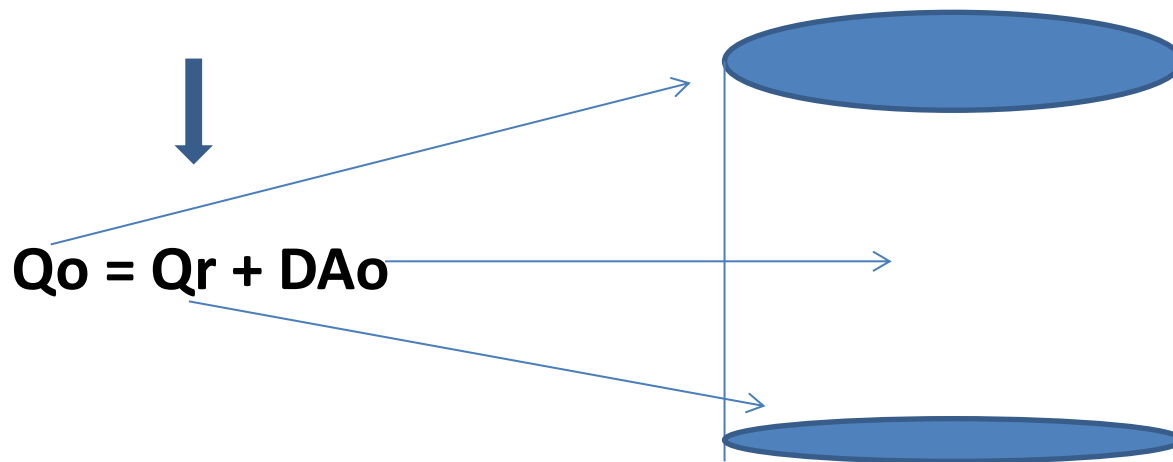
Therefore, the constant  $c$  is given by

$$c = \frac{Q_0}{k}$$

At depth  $D$ , the upward heat flow is

$$\begin{aligned} Q(D) &= k \left( -\frac{A_0 D}{k} + \frac{Q_0}{k} \right) \\ &= -A_0 D + Q_0 \\ &= Q_r \end{aligned} \tag{7.78}$$

Thus, in this case, the heat flow  $Q(D)$  into the base of the uniform slab (and the base of the crust, since all the heat generation is assumed to be concentrated in the slab) is the  $Q_r$  of Eq. (7.75).





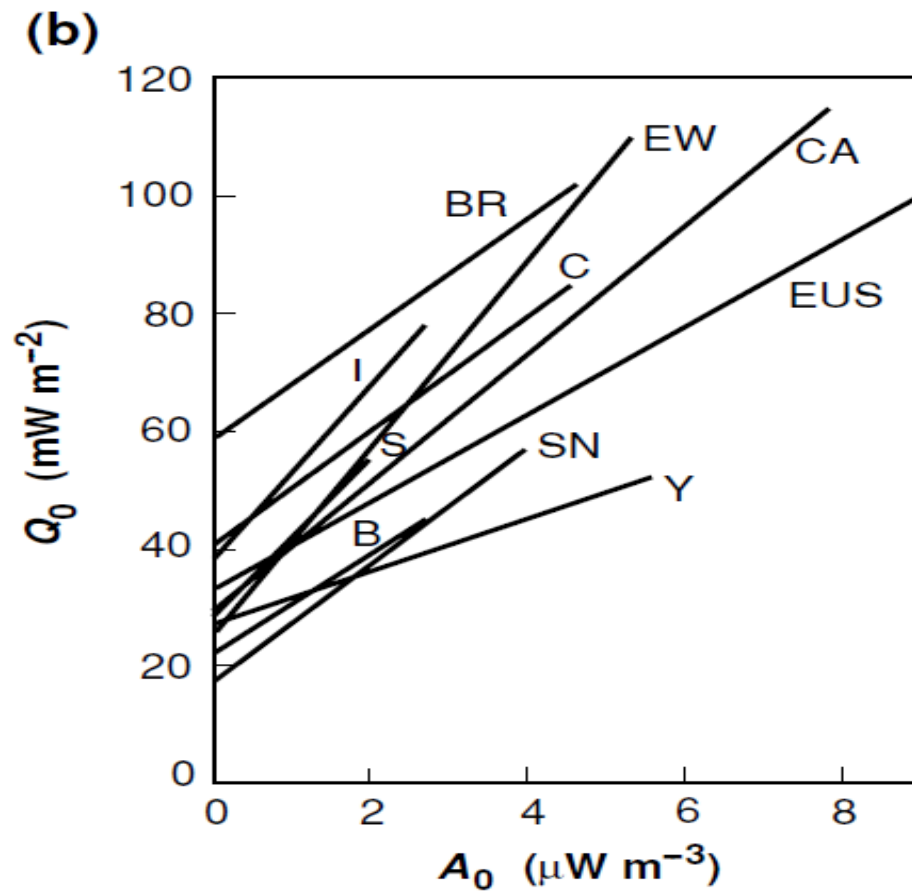
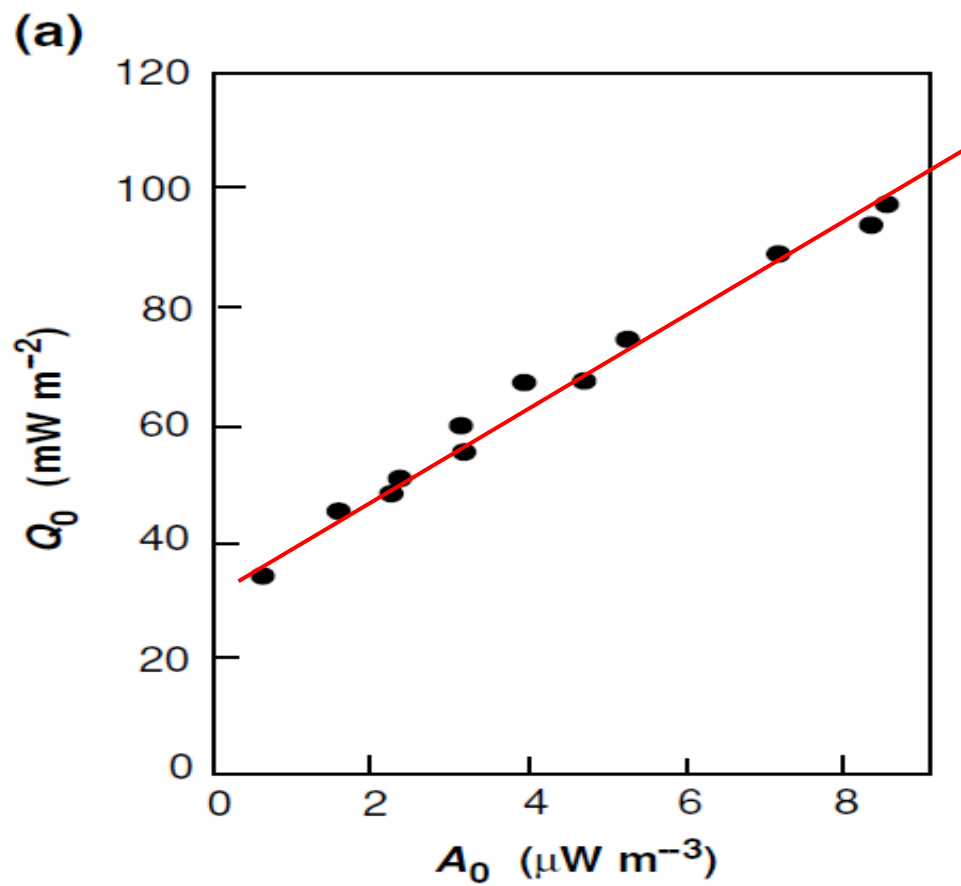


Figure 7.12. Measured heat flow  $Q_0$  plotted against internal heat generation  $A_0$  for (a) the eastern-U.S.A. heat-flow province. The straight line  $Q_0 = Q_r + DA_0$  that can be fitted to these measurements has  $Q_r = 33 \times 10^{-3} \text{Wm}^{-2}$  and  $D = 7.5 \text{ km}$ . (After Roy et al. (1968).) (b) Best-fitting straight lines for other heat-flow provinces: CA, central Australia; B, Baltic shield; BR, Basin and Range; C, Atlantic Canada; EW, England and Wales; EUS, eastern USA; I, India; S, Superior Province; SN, Sierra Nevada; and Y, Yilgarn block, Australia. (After Jessop (1990).)

## Two layer model

Consider a two-layer model:

$$A = A_1 \quad \text{for } 0 \leq z < z_1$$

$$A = A_2 \quad \text{for } z_1 \leq z < z_2$$

$$T = 0 \quad \text{on } z = 0$$

with a basal heat flow  $Q = -Q_2$  on  $z = z_2$ . In the first layer,  $0 \leq z < z_1$ , the equilibrium heat-conduction equation is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_1}{k} \quad (7.29)$$

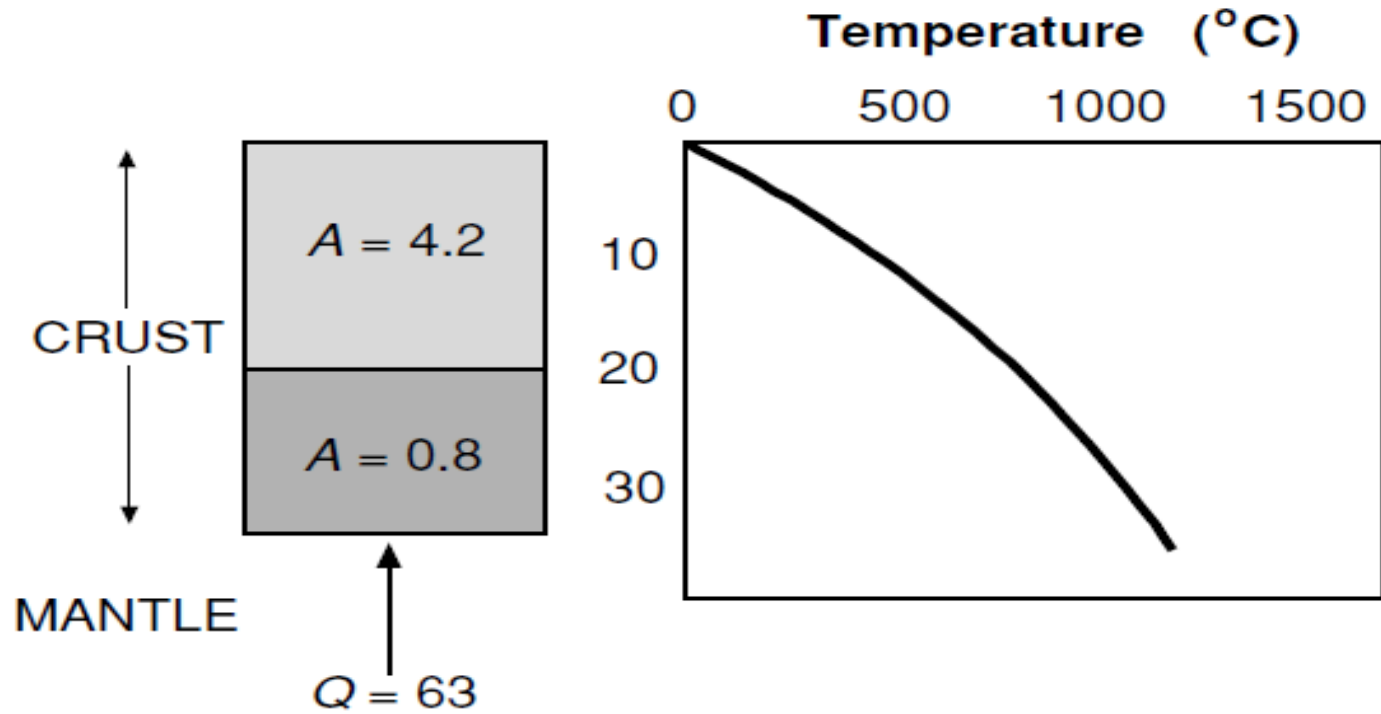
In the second layer,  $z_1 \leq z < z_2$ , the equilibrium heat-conduction equation is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{A_2}{k} \quad (7.30)$$

The solution to these two differential equations, subject to the boundary conditions and matching both temperature,  $T$ , and temperature gradient,  $\partial T / \partial z$ , on the boundary  $z = z_1$ , is

$$T = -\frac{A_1}{2k}z^2 + \left( \frac{Q_2}{k} + \frac{A_2}{k}(z_2 - z_1) + \frac{A_1 z_1}{k} \right)z \quad \text{for } 0 \leq z < z_1 \quad (7.31)$$

$$T = -\frac{A_2}{2k}z^2 + \left( \frac{Q_2}{k} + \frac{A_2 z_2}{k} \right)z + \frac{A_1 - A_2}{2k}z_1^2 \quad \text{for } z_1 \leq z < z_2 \quad (7.32)$$



**Figure 7.4.** A two-layer model for the crust and equilibrium geotherm in the Archaean. Heat generation  $A$  is in  $\mu\text{W m}^{-3}$ ; heat flow from the mantle  $Q$  is in  $10^{-3} \text{W m}^{-2}$ . Recall that, during the Archaean, heat generation was much greater than  $t$  is now (Table 7.2). (After Nisbet and Fowler (1982).)

# Άσκηση 1

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας μετρήσεων της θερμοκρασίας,  $\vartheta$ , σε συνάρτηση με το βάθος,  $h$ , σε ορισμένο τόπο.

$h$ (m)	$\vartheta$ °C
400	27
500	30
600	32
700	37
800	41

Από δείγμα υλικού που λήφθηκε στον τόπο αυτό βρέθηκε ότι το υλικό αποτελείται κυρίως από γρανίτη, του οποίου ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας είναι:

$$k=3 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$$

Να γίνει γραφική παράσταση της θερμοκρασίας σε συνάρτηση με το βάθος και να υπολογισθεί η θερμοβαθμίδα με εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Να χρησιμοποιηθεί αυτή η τιμή της θερμοβαθμίδας για τον υπολογισμό της **ροής θερμότητας**  $\sigma'$  αυτόν τον τόπο.

# Άσκηση 2

Να αποδειχθεί η σχέση

$$\left( \frac{dT}{dP} \right)_S = \frac{\alpha T}{\rho C_P}$$

$\alpha$  : συντελεστής θερμικής διαστολής

$C_p$  : ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση

$T$  : θερμοκρασία (σε βαθμούς Κ)

$\rho$  : πυκνότητα του υλικού

$S$  : εντροπία

$P$  : πίεση

# Άσκηση 3

## Προσδιορισμός θερμοκρασίας στο μανδύα της Γης

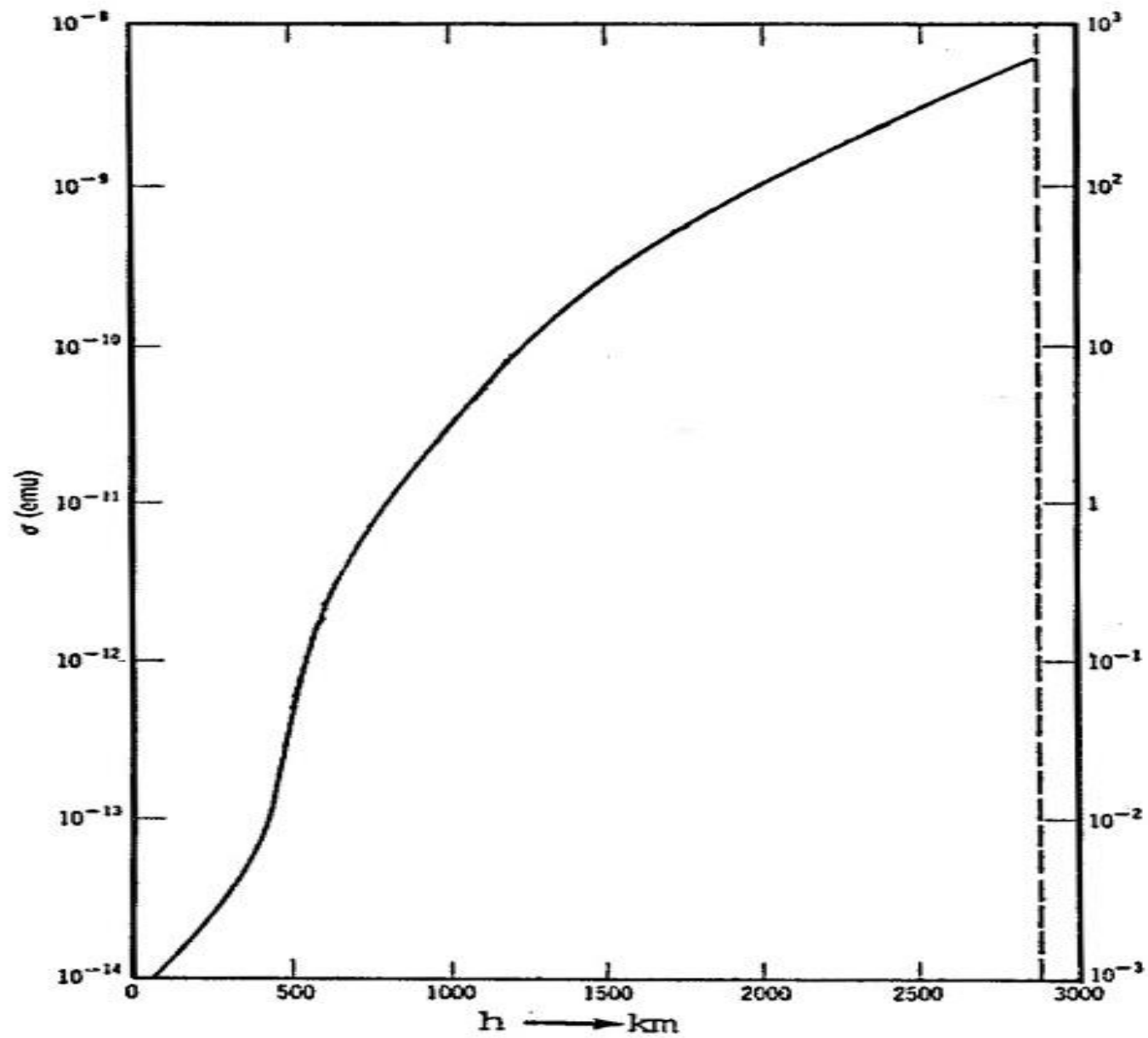
Αν υποτεθεί ότι το υλικό αποτελείται από **ολιβίνη**, η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα εκφράζεται σε  $\text{ohm}^{-1}\text{m}^{-1}$  και η ποσότητα  $KT$  σε eV, τότε, οι σταθερές του τύπου  $\sigma = \sigma_1 e^{-E_1/2KT} + \sigma_2 e^{-E_2/KT}$  (4.19) έχουν τιμές  $\sigma_1 = 55$ ,  $E_1 = 1,84$ ,  $\sigma_2 = 4 \cdot 10^7$ ,  $E_2 = 2,7$ .

Όταν το υλικό αποτελείται από **περιδοτίτη** οι σταθερές αυτές έχουν τιμές  $\sigma_1 = 3,8$ ,  $E_1 = 1,62$ ,  $\sigma_2 = 10^7$ ,  $E_2 = 2,3$ .

**(A)** Να υπολογισθεί η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα  $\sigma$  σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία  $T$  (για τιμές μεταξύ  $1000^\circ\text{C}$  και  $3000^\circ\text{C}$ ) για τα δύο αυτά υλικά και να γίνουν κατόπιν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

**(B)** Να χρησιμοποιηθούν αυτές καθώς και η καμπύλη του σχήματος 1 για να υπολογισθεί η θερμοκρασία σε συνάρτηση με το βάθος μέσα στο μανδύα.

Δίνεται ότι  $K = 1,3805 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$  και ότι  $1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$ .



  Η μεταβολή της ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας μέσα στο μανδύα (Stacey 1969).

# Άσκηση 4

Στον Πίνακα παρουσιάζεται η θερμική ροή  $Q$  (mW/m<sup>2</sup>) στην επιφάνεια σε σχέση με την παραγωγή θερμότητας  $A$  (μW/m<sup>2</sup>) από μετρήσεις στην περιοχή New England (USA) (Roy et al, 1968).

a) Να γίνει το διάγραμμα  $Q$  σε σχέση με  $A$ . Να εξαχθεί με εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων η γραμμική συσχέτιση που συνδέει το  $Q$  με το  $A$ .

a) Να προταθεί ένα απλό πρότυπο που ερμηνεύει τη σχέση

b) Τι πληροφορία μπορεί να εξαχθεί από το πρότυπο που προτάθηκε ?

$A$ (μw/m <sup>2</sup> )	$Q$ (mW/m <sup>2</sup> )
0.2	35
1.7	46
2.3	50
2.4	51
3.1	61
3.3	58
4.8	70
5.4	73
7.3	88
8.6	98
8.8	110



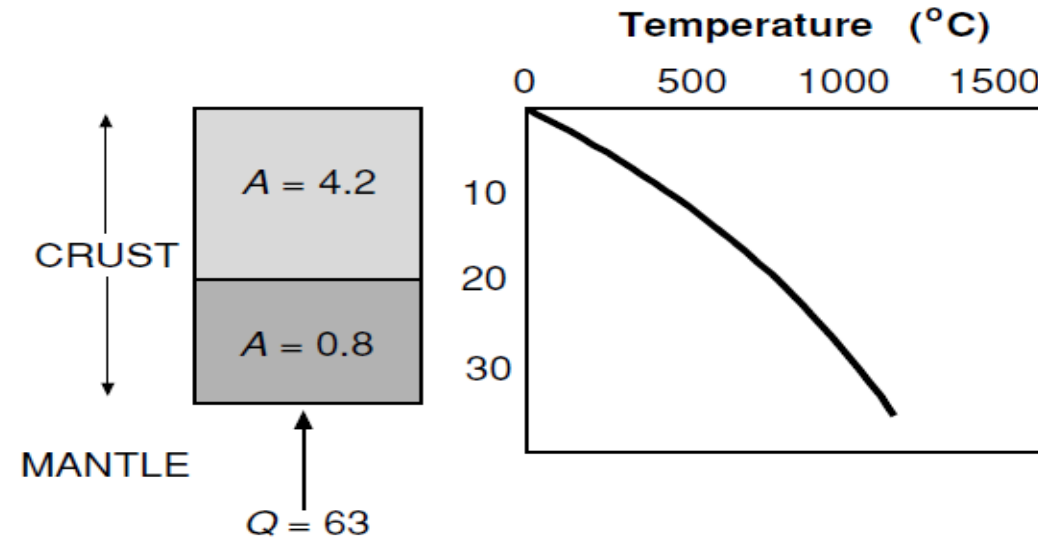
# Άσκηση 5

Σε βάθος 35 km η θερμοκρασία είναι 700 οC. Αν η παραγωγή θερμότητας είναι  $1 \mu\text{W}/\text{m}^3$  μεταξύ του βάθους αυτού και της επιφάνειας της Γης και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας έχει τιμή  $3 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ , να ορισθεί η εξίσωση της γεώθερμης ισορροπίας και να γίνει η γραφική της παράσταση.

## **BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- Anderson, O.L., (1982). The Earth's core and the phase diagram of iron. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 306, 21–35.
- Brown, J.M. and Shankland, T.J. (1981). Thermodynamic parameters in the Earth as determined from seismic profiles, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 66, 579–596.
- Bukowinski, M.S.T. (1999). Taking the core temperature, *Nature*, 401, 432-433.
- da Silva, C.R.S., Wentzovitch, R.M., Patel, A., Price, G.D. and Karato, S.I. (2000). The composition and geotherm of the lower mantle, constraints from the elasticity of silicate perovskite, *Phys. Earth Planet. Int.*, 118, 103-109.
- Fowler, C.M.R. (2005). *The Solid Earth: An introduction to global geophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, 685pp.
- Jeanloz, R. (1988). High Pressure experiments and the Earth's deep interior. The year of the perovskite, *Phys.Today*, 41, 544-45.
- Jessop, A.M. (1990). *Thermal Geophysics, Developments in Solid Earth Geophysics*, 17, Elsevier, Amsterdam, 306pp.
- Morgan, P. (1984). The thermal structure and thermal evolution of the continental lithosphere, In: *Structure and evolution of the continental lithosphere* (eds. H.N. Pollack and V.R. Murphy), *Physics Chem. Earth*, 15, 107-193.
- Parsons, B. and Sclater, J.G. (1977). An analysis of the variation of ocean floor bathymetry and heat flow with age, *J.Geophys.Res.*, 82, 803-827.
- Phillips, D.W. (1936). Thermal conductivities of rocks comm., B.A., Rep., 258-291.
- Pollack, H. N., Hurter, S.J. and Johnston, J.R. (1992). Global heat flow data set, World Data Center A for Solid Earth Geophysics, NOAA E/GCI, 325 Broadway, Boulder, CO 80303, USA.
- Pollack, H. N., Hurter, S.J. and Johnston, J.R. (1993). Heat flow from the Earth's interior: Analysis of the global data set, *Rev. Geophysics*, 31, 267-280.
- Sclater, J.G., Jaupart, C. and Galson, D. (1980). The heat flow through oceanic and continental crust and the heat loss of the Earth, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 18, 269-311.
- Stacey, F.D. (1992). *Physics of the Earth*, Brookfield Press, Australia, 513pp.
- Stein, C.A. and Stein, S. (1992). A model for the global variation in oceanic depth and heat flow with lithospheric age, *Nature*, 359, 123-129.

## Άσκηση Π1



**Figure 7.4.** A two-layer model for the crust and equilibrium geotherm in the Archaean. Heat generation  $A$  is in  $\mu\text{W m}^{-3}$ ; heat flow from the mantle  $Q$  is in  $10^{-3} \text{W m}^{-2}$ . Recall that, during the Archaean, heat generation was much greater than  $t$  is now (Table 7.2). (After Nisbet and Fowler (1982).)

Να υπολογιστεί η γεώθερμη  $T(z)$  όπως στο σχ. 7.4 ( $H_1=20 \text{ Km}$  ,  $H_2=15 \text{ Km}$ ) και για δυο τιμές του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας α)  $k= 1.7 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  και β)  $k= 3.4 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ .  
Να απεικονιστούν τα αποτελέσματα στο ίδιο διάγραμμα κατ' αναλογία με το Σχ. 7.4

# Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Η χάραξη της βέλτιστης ευθείας που διέρχεται από τα πειραματικά σημεία, με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

$\psi$ : Θεωρητική εξίσωση της ευθείας:

$$\psi_i = a + b x_i$$

Ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των αποκλίσεων μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών.

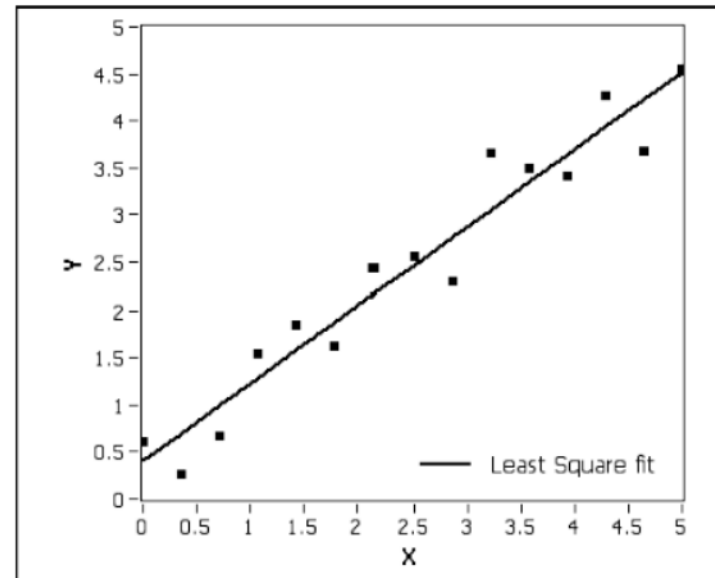
**Συνάρτηση:**

$$F(a,b) = \sum (\Psi_i - \psi_i)^2 = \sum (a + bx - \psi_i)^2 \longrightarrow \min$$

$\Psi_i \rightarrow$  Θεωρητική τιμή

$\psi_i \rightarrow$  Πειραματική τιμή

$$\Psi_i = a + b x_i$$



$$a = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum \psi_i - \sum x_i \cdot \sum x_i \psi_i}{v \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sum$$

$$b = \frac{v \sum x_i \psi_i - \sum x_i \cdot \sum \psi_i}{v \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης:

$$r = \frac{\sum x_i \psi_i - v \cdot \bar{x} \cdot \bar{\Psi}}{[(\sum x_i^2 - v \cdot \bar{x}^2) \cdot (\sum \psi_i^2 - v \cdot \bar{\Psi}^2)]^{1/2}} \quad -1 \leq r \leq 1$$

$$\delta a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{D}}$$

$$\delta b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}}$$

$$D = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

"Στο παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει γίνει χρήση διαφανειών και παρουσιάσεων των Καθ. Κ. Παπαζάχου και Δ. Κοντοπουλου, (ΑΠΘ) καθώς και υλικό από το Βιβλίο «Εισαγωγή στη Γεωφυσική» των Παπαζάχος και Παπαζάχος (2008) . Ευχαριστούμε τους Συγγραφείς για την ευγενική παραχώρηση της άδειας χρήσης του υλικού " .

