



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΦΥΣΙΚΗΣ – ΓΕΩΘΕΡΜΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΩΦΥΣΙΚΗΣ (Υ4202)

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

**Υπολογισμός Τανυστή παραμόρφωσης, Περιστροφής και
Κύριων παραμορφώσεων από 3 σταθμούς GPS/GNSS**

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Στην παρούσα άσκηση εξετάζεται ένα μικρό γεωδαιτικό δίκτυο αποτελούμενο από τρεις σταθμούς GPS/GNSS (SAMO – σταθμός A, CHIO – σταθμός B, και IZMI -σταθμός C), με σκοπό τον προσδιορισμό του δισδιάστατου πεδίου παραμόρφωσης στην περιοχή που αυτοί ορίζουν. Θεωρείται ότι οι τρεις σταθμοί βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους, ώστε το πεδίο ταχυτήτων να μπορεί να προσεγγιστεί με ένα γραμμικό μοντέλο πρώτης τάξης.

Οι συντεταγμένες των σταθμών δίνονται σε μοίρες (Γ. Μήκος και Πλάτος) και μέτρα (UTM Z35), σε σύστημα αναφοράς όπου ο άξονας X αντιστοιχεί στην Ανατολή και ο άξονας Y στον Βορρά. Οι αντίστοιχες οριζόντιες συνιστώσες των ταχυτήτων των σταθμών δίνονται σε mm/yr.

Σταθμός GPS/GNSS	Μήκος (°)	Πλάτος (°)	Ανατολική (m)	Βόρεια (m)	Ταχ. A-Δ u (mm/yr)	Ταχ. B-N v (mm/yr)
A - SAMO	26.7053	37.7928	474053.470	4182867.047	54.4	-93.3
B – CHIO	26.1272	38.3679	423754.215	4246996.054	56.9	-99
C - IZMI	27.0818	38.3948	507143.149	4249623.543	32	-33.4

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, να θεωρηθεί ότι το πεδίο ταχυτήτων περιγράφεται από τις γραμμικές σχέσεις:

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$$

$$v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y$$

Όπου

- u η συνιστώσα ταχύτητας στον άξονα X (Ανατολή-Δύση)
- v η συνιστώσα ταχύτητας στον άξονα Y (Βορράς – Νότος)

Ζητείται:

1. Να προσδιορισθεί το κέντρο βάρους του τριγώνου που σχηματίζουν οι 3 σταθμοί, και να προσδιορισθούν οι συντεταγμένες του κάθε σταθμού (σε m) ως προς αυτό.
2. Να προσδιοριστούν οι παράμετροι του γραμμικού πεδίου ταχυτήτων, δηλαδή οι συντελεστές $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ με χρήση των τριών διαθέσιμων σταθμών.
3. Να υπολογιστούν οι χωρικές παράγωγοι του πεδίου ταχυτήτων:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

4. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες του συμμετρικού τανυστή παραμόρφωσης:

$$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$$

και να γραφεί ο τανυστής παραμόρφωσης σε μορφή πίνακα.

5. Να υπολογιστεί η τοπική περιστροφή ω του μικρού δικτύου και να προσδιοριστεί αν αυτή είναι δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη.
6. Να προσδιοριστούν οι κύριες παραμορφώσεις ϵ_1 και ϵ_2 , δηλαδή οι ιδιοτιμές του τανυστή παραμόρφωσης.

7. Να υπολογιστεί ο προσανατολισμός των κύριων αξόνων παραμόρφωσης και να εκφραστεί:
 - Ως γωνία από τον άξονα X (ανατολή-Δύση)
 - Ως αζιμούθιο από τον Βορρά.
8. Να γίνει σύντομη φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων, δηλαδή να σχολιαστεί:
 - Αν στην περιοχή κυριαρχεί επιμήκυνση ή βράχυνση,
 - Αν υπάρχει σημαντική διατμητική παραμόρφωση,
 - Ποια είναι η διεύθυνση της κύριας επιμήκυνσης,
 - Ποια είναι η φορά της τοπικής περιστροφής.
 - Τί τύπου ρήγμα και με τι προσανατολισμό επηρεάζει την περιοχή
9. Χρησιμοποιώντας το αρχείο “gps_strain_calculator_results.xls” επαληθεύσατε/συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας

Οδηγίες

Για το “Ερώτημα 2”

Δημιουργήστε τα δύο συστήματα εξισώσεων από τους 3 σταθμούς. Για κάθε σταθμό αντικαταστήστε στο γραμμικό μοντέλο τις συντεταγμένες (x_i, y_i) και την ταχύτητα (u_i, v_i)

$$u(A) = \alpha_0 + \alpha_1 x_A + \alpha_2 y_A$$

$$u(B) = \alpha_0 + \alpha_1 x_B + \alpha_2 y_B$$

$$u(C) = \alpha_0 + \alpha_1 x_C + \alpha_2 y_C$$

$$v(A) = b_0 + b_1 x_A + b_2 y_A$$

$$v(B) = b_0 + b_1 x_B + b_2 y_B$$

$$v(C) = b_0 + b_1 x_C + b_2 y_C$$

Λύστε τα δύο γραμμικά συστήματα (με αντικατάσταση, πίνακες ή όποια άλλη διαδικασία μπορείτε) και προσδιορίστε τους συντελεστές.

Για το “Ερώτημα 3”

Υπολογίστε τις χωρικές παραγώγους του πεδίου ταχυτήτων, από το γραμμικό μοντέλο:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b_2$$

Αυτές είναι οι βασικές ποσότητες από τις οποίες προκύπτουν η παραμόρφωση και η περιστροφή.

Πρόσεξε τις μονάδες: οι συντεταγμένες δίνονται σε m οι ταχύτητες δίνονται σε mm/yr τότε οι παράγωγοι προκύπτουν αρχικά σε: (mm/yr)/m. Για να εκφραστούν ως strain σε yr^{-1} , πρέπει να γίνει μετατροπή μονάδων.

Για το “Ερώτημα 4”

Ο ταυσιτής έχει την μορφή: $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix}$

Με $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ (Ορθές παραμορφώσεις): Περιγράφουν την επιμήκυνση ή συστολή κατά μήκος των αξόνων X (Ανατολή) και Y (Βορράς).

ϵ_{xy} (Διατμητική παραμόρφωση): Περιγράφει τη μεταβολή των γωνιών (αλλαγή σχήματος).
Λόγω ισορροπίας ροπών, ισχύει $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$

Και
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Για το “Ερώτημα 5”

Η τοπική περιστροφή (ω) του μικρού δικτύου δίνεται από:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$\omega > 0$: αριστερόστροφη κίνηση (αντίθετα από την φορά του ρολογιού)

$\omega < 0$: δεξιόστροφη κίνηση (αντίστοιχη με την φορά του ρολογιού)

Για το “Ερώτημα 6”

Οι κύριες παραμορφώσεις είναι οι ιδιοτιμές του τανυστή ϵ

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

ϵ_1 : είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή

ϵ_2 : είναι η μικρότερη ιδιοτιμή

$\epsilon_1 > 0$: κύρια επιμήκυνση (εφελκυσμός)

$\epsilon_2 < 0$: κύρια βράχυνση (συμπίεση)

Για το “Ερώτημα 7”

Για τον προσανατολισμό των κύριων αξόνων της ϵ_1 και ϵ_2 , η γωνία θ του κύριου άξονα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan(2\theta) = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}$$

Ο τύπος δίνει μία διεύθυνση, η άλλη κύρια διεύθυνση είναι κάθετη στην πρώτη, δηλαδή: $\theta + 90^\circ$

Το σύστημα συντεταγμένων είναι: x= Ανατολή y= Βορράς, τότε η γωνία θ από τον x είναι μαθηματική γωνία.

Για να προσδιορισθεί η διεύθυνση ως αζιμούθιο από τον Βορρά, πρέπει να γίνει η κατάλληλη μετατροπή.