

Μιγαδική ανάλυση – Μέρος Α – Πρόχειρες σημειώσεις¹**Μιγαδικοί αριθμοί****Τι είναι και πώς τους αναπαριστούμε**

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι μια επέκταση του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Με την εισαγωγή τους αποκτούν νόημα εξισώσεις της μορφής $z^2 + 4 = 0$, δηλαδή αποκτούν νόημα οι ρίζες των αρνητικών αριθμών.

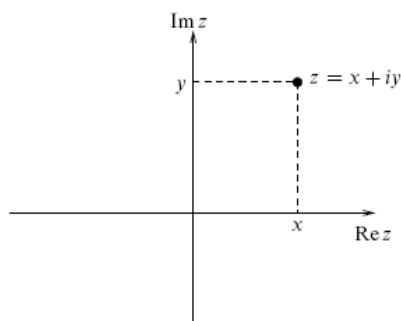
Οι ρίζες των αρνητικών αριθμών ονομάζονται φανταστικοί αριθμοί και είναι πολλαπλάσια της φανταστικής «μονάδας», που συμβολίζεται με i και ορίζεται ως $i = \sqrt{-1}$.

Ένας μιγαδικός αριθμός, z , είναι, εν γένει, άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού αριθμού. Γράφουμε $z = x + iy$ ή $z = (x, y)$, όπου το x λέγεται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται ως $\text{Re}(z)$ και το y λέγεται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται ως $\text{Im}(z)$.

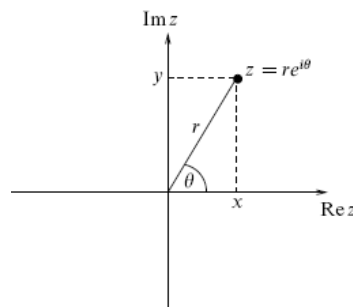
Οι μιγαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους και για την περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων, όπως, π.χ., στην κυματική θεωρία, τη διάδοση θερμότητας, κοκ, ενώ βρίσκονται στη θεμελίωση της κβαντομηχανικής, που αποτελεί τη βάση για τη φυσική των υλικών. Σε πολλές περιπτώσεις η χρήση τους γίνεται απλά για διευκόλυνση των πράξεων (π.χ. πολλά ολοκληρώματα πραγματικών συναρτήσεων υπολογίζονται πολύ ευκολότερα με χρήση μιγαδικής ολοκλήρωσης), ενώ σε άλλες η χρήση τους είναι επιβεβλημένη από το ίδιο το πρόβλημα.

Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικού

Σε αναλογία με την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών πάνω σε μια ευθεία (ευθεία των πραγματικών), μια συνήθης αναπαράσταση μιγαδικού είναι σε ένα σε ένα x - y διάγραμμα του επιπέδου (γνωστό ως διάγραμμα Argand), όπου ο μιγαδικός $z = x + iy$ αναπαρίσταται ως ένα σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες x, y . Τετμημένη, x , είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού και τεταγμένη, y , το φανταστικό μέρος του (βλ. Σχήμα 1α).



Σχ. 1α: Γεωμετρική αναπαράσταση του μιγαδικού $z = x + iy$ (διάγραμμα Argand).



Σχ. 1β: Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικού, όπου δείχνεται το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού.

¹ Τα περισσότερα από τα σχήματα έχουν αντιγραφεί από το βιβλίο *Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής I*, Ι.Δ. Βέργαδου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Οι αριθμοί $x=\operatorname{Re}(z)$, $y=\operatorname{Im}(z)$, προσδιορίζουν πλήρως το σημείο z στο επίπεδο. Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε πλήρως το σημείο z στο επίπεδο, άρα και τον μιγαδικό αριθμό z , είναι αντί για τις καρτεσιανές του συντεταγμένες να δώσουμε τις πολικές συντεταγμένες, r και θ (r είναι το μέτρο του διανύσματος που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο σημείο z και θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα αυτό με τον άξονα των x). Το r τότε λέγεται μέτρο του μιγαδικού αριθμού z , και συμβολίζεται με $|z|$, και το θ λέγεται όρισμα του z , και συμβολίζεται με $\arg(z)$.

Όπως μπορεί να δει κανείς εύκολα από το διάγραμμα Argand (βλ. Σχ. 1β), αν μια γωνία θ είναι όρισμα ενός μιγαδικού z , τότε κάθε γωνία $\theta+2k\pi$, όπου k ακέραιος, θα είναι επίσης όρισμα του z . Το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού δηλαδή δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Από όλες τις δυνατές γωνίες που μπορούν να θεωρηθούν όρισμα του μιγαδικού z , η γωνία θ για την οποία ισχύει $0 \leq \theta < 2\pi$ λέγεται βασικό όρισμα του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Arg}(z)$. Ισχύει δηλαδή

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi. \quad (1)$$

Οι πολικές συντεταγμένες ενός μιγαδικού z συνδέονται με τις καρτεσιανές μέσω των σχέσεων:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2)$$

οι οποίες μπορούν να εξαχθούν εύκολα από τριγωνομετρία. Αντίστροφα, οι καρτεσιανές συντεταγμένες εκφράζονται μέσω των πολικών ως

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta). \quad (3)$$

Έχουμε τότε

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}. \quad (4)$$

Το τελευταίο μέλος της ισότητας (4) προκύπτει από τον πολύ σημαντικό **τύπο του Euler**, σύμφωνα με τον οποίο

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (5)$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης.

Όπως δείχνεται στην Εξ. (4), ο z μπορεί να γραφεί μέσω των πολικών συντεταγμένων r και θ ως

$$z = re^{i\theta} = |z| e^{i\arg(z)}. \quad (6)$$

Ο τρόπος αυτός γραφής του z (δηλ. μέσω των r και θ), λέγεται πολική γραφή του z .

Εφαρμογές:

- Υπολογίστε το μέτρο και το όρισμα των μιγαδικών i , $2i$, 2 , $4+2i$, $4-2i$.
- Υπολογίστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών $2e^{i\pi/2}$, $2e^{i\pi/3}$, $2e^{i\pi}$.

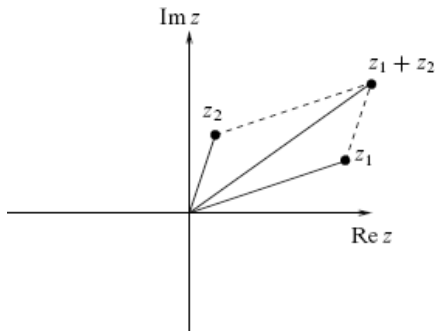
Πράξεις με μιγαδικούς

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

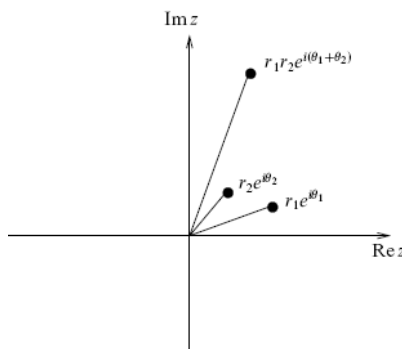
Ισότητα μιγαδικών: Οι μιγαδικοί z_1 και z_2 είναι ίσοι αν και μόνο αν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.

Οι πράξεις γενικά μεταξύ μιγαδικών μπορούν να εξαχθούν εύκολα μέσω των πράξεων μεταξύ πραγματικών. Παρακάτω αναφέρονται συνοπτικά οι βασικές πράξεις.

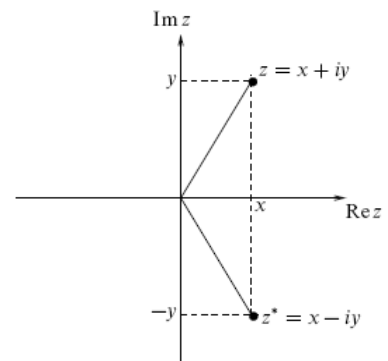
Άθροισμα μιγαδικών: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (μπορεί ναδειχθεί εύκολα χρησιμοποιώντας πρόσθεση πραγματικών). Η γεωμετρική αναπαράσταση του αθροίσματος δείχνεται στο Σχήμα 2α.



Σχ. 2α: Γεωμετρική αναπαράσταση του αθροίσματος μιγαδικών.



Σχ. 2β: Γεωμετρική αναπαράσταση του γινομένου μιγαδικών.



Σχ. 2γ: Γεωμετρική αναπαράσταση του συζυγούς μιγαδικού.

Γινόμενο με πραγματικό: $kz_1 = kx_1 + ik y_1$, όπου k πραγματικός.

Μοναδιαίο στοιχείο στους μιγαδικούς είναι ο πραγματικός αριθμός 1 (ισχύει $1z = z$ για κάθε $z = x + iy$).

Μηδενικό στοιχείο είναι ο αριθμός μηδέν (ισχύει $0z = 0$ για κάθε $z = x + iy$).

(Σημειώστε ότι τόσο οι πραγματικοί αριθμοί όσο και οι φανταστικοί αποτελούν υποσύνολα του συνόλου των μιγαδικών.)

Γινόμενο μιγαδικών: $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Άσκηση: Υπολογίστε το μέτρο και το όρισμα του γινομένου $z_1 z_2$ συναρτήσει των καρτεσιανών συντεταγμένων των z_1 και z_2 .

Γράφοντας τους αριθμούς z_1 και z_2 σε πολική μορφή, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, το γινόμενο $z_1 z_2$ μπορεί να γραφεί ως $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$. Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι το μέτρο του γινομένου $z_1 z_2$ είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των μιγαδικών z_1 και z_2 , και το όρισμα του γινομένου είναι το άθροισμα των ορισμάτων των z_1 , z_2 , δηλαδή

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \quad (7)$$

Η γεωμετρική αναπαράσταση του γινομένου δείχνεται στο Σχήμα 2β.

Συζυγής μιγαδικού: Για κάθε μιγαδικό $z = x + iy$ ορίζεται ο συζυγής μιγαδικός, z^* , ως ο αριθμός ο οποίος έχει ίδιο πραγματικό μέρος με τον z και αντίθετο φανταστικό. Δηλαδή

$$z = x + iy \Rightarrow z^* = x - iy. \quad (8)$$

Άσκηση: Υπολογίστε το μέτρο και το όρισμα του z^* και δείξτε ότι $|z^*| = |z|$ και $\arg(z^*) = -\arg(z)$.

Άρα, αν $z = re^{i\theta}$, τότε $z^* = re^{-i\theta}$

Παρατηρήστε ότι τόσο στην καρτεσιανή όσο και στην πολική γραφή του z ο z^* βρίσκεται εύκολα με την αντικατάσταση του i από $-i$. Γενικά, σε οποιαδήποτε μορφή και αν είναι γραμμένος ο αριθμός z , ο συζυγής του μπορεί να βρεθεί πολύ εύκολα αντικαθιστώντας όλα τα i με $-i$. Ο συζυγής ενός μιγαδικού z παριστάνεται γραφικά όπως δείχνεται στο Σχ. 2γ.

Γράφοντας τον z και τον συζυγή του σε καρτεσιανή μορφή, μπορούν να αποδειχθούν εύκολα οι εξής σχέσεις:

$$zz^* = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (9)$$

(παρατηρήστε ότι ο πολλαπλασιασμός με τον συζυγή οδηγεί σε πραγματικό αριθμό).

$$\operatorname{Re}(z) = x = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = y = \frac{z - z^*}{2i}. \quad (10)$$

Αντίστροφος μιγαδικού: Για κάθε μιγαδικό z , μη μηδενικό, ορίζεται ο αντίστροφος, $1/z$, από τη σχέση $z \cdot (1/z) = 1$. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του αντιστρόφου υπολογίζονται εύκολα μέσω πολλαπλασιασμού με τον συζυγή του παρονομαστή, δηλαδή

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad (11)$$

Αν ο z δίδεται σε πολική μορφή, $z = re^{i\theta}$, τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} \frac{re^{-i\theta}}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}. \quad (12)$$

Οι σχέσεις (12) δείχνουν ότι το μέτρο του αντιστρόφου είναι το αντίστροφο του μέτρου του z και το όρισμά του είναι το αντίθετο του ορίσματος του z .

Εφαρμογή: Αν έχουμε έναν μιγαδικό αριθμό με μέτρο μονάδα υπολογίστε τον αντίστροφο και τον συζυγή του. Τι παρατηρείτε; Υπολογίστε τον αντίστροφο και τον συζυγή του i .

Λόγος μιγαδικών: Ο λόγος δύο μιγαδικών, z_1 / z_2 , ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του z_1 με τον αντίστροφο του z_2 . (Στις περισσότερες περιπτώσεις όπου έχουμε διαίρεση μιγαδικών, είναι πολύ βολικό να πολλαπλασιάζει κανείς αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή, ώστε να απαλείφονται οι φανταστικοί αριθμοί από τους παρονομαστές.)

Εφαρμογές:

- Αποδείξτε ότι $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$, $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, $(z_1 / z_2)^* = z_1^* / z_2^*$.
- Βρείτε τον συζυγή του $z = (3 - 2i)^{4+3i}$.
- Υπολογίστε το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $z = (3 + 2i)e^{2-i3}$ και του $z = \frac{1}{3+2i} e^{2-i3}$.
- Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler για το $e^{i\theta}$ και το $e^{-i\theta}$, εκφράστε το ημίτονο και το συνημίτονο μέσω εκθετικών. Θα πρέπει να καταλήξετε στα:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Τύπος του de Moivre

Από την ισότητα $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, αναπτύσσοντας και τα δύο μέλη σύμφωνα με τον τύπο του Euler, προκύπτει εύκολα ότι

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Ο παραπάνω τύπος, γνωστός ως τύπος του de Moivre, μας λέει ότι το όρισμα της n -στής δύναμης μιγαδικού ισούται με n φορές το όρισμα του μιγαδικού. Ο τύπος του de Moivre είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων πολλαπλασίων τόξων, και αντίστροφα.

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του de Moivre για να εκφράσετε το $\sin(2\theta)$ και το $\cos(2\theta)$ συναρτήσει των $\sin(\theta)$ και $\cos(\theta)$.

Τριγωνική ανισότητα

Για κάθε μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 μπορεί να αποδειχθεί ότι $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ και $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$, ή, πιο συνεπτυγμένα, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Η διπλή αυτή ανισότητα είναι γνωστή ως τριγωνική ανισότητα και μπορεί να αποδειχθεί εύκολα υπολογίζοντας το $|z_1 + z_2|^2$ και συγκρίνοντάς το, π.χ. για το δεύτερο μέλος, με το $(|z_1| + |z_2|)^2$.

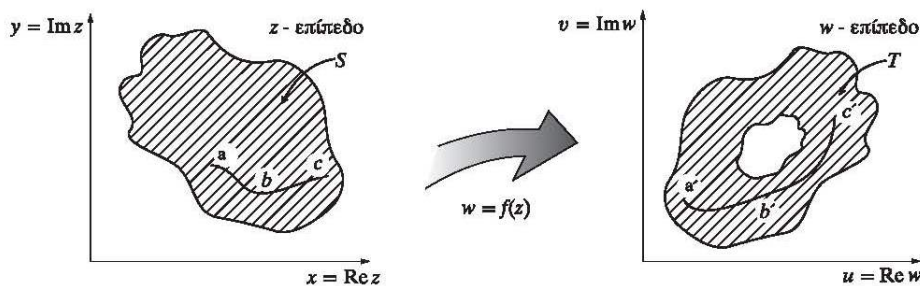
Συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής

Σε αναλογία με τις πραγματικές συναρτήσεις, $f(x)$, οι οποίες αντιστοιχίζουν/απεικονίζουν έναν πραγματικό αριθμό x , που ανήκει σε διάστημα $[a, \beta]$ (το οποίο λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης), στον αριθμό $y=f(x)$, ορίζονται και οι μιγαδικές συναρτήσεις.

Οι μιγαδικές συναρτήσεις, π.χ. $f(z)$, σε κάθε μιγαδικό αριθμό/μεταβλητή $z=x+iy$ αντιστοιχίζουν τον μιγαδικό αριθμό (ή τους μιγαδικούς αριθμούς) $w=f(z)$, ο οποίος λέγεται εικόνα του z . Πεδίο ορισμού της συνάρτησης μπορεί να είναι κάθε περιοχή του μιγαδικού επιπέδου ή κάθε καμπύλη πάνω στο μιγαδικό επίπεδο.

Αν $z=x+iy$, τότε η $f(z)$ μπορεί να γραφεί ως $f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, όπου με u συμβολίζεται το πραγματικό μέρος της f και με v το φανταστικό. Π.χ. για $f(z)=z^2=(x+iy)^2$, $u(x,y)=x^2-y^2$ και $v(x,y)=2xy$.

Αντίθετα με τη γεωμετρική απεικόνιση πραγματικών συναρτήσεων, η οποία μπορεί να γίνει σε ένα επίπεδο διάγραμμα όπου το πεδίο ορισμού (σύνολο των δυνατών τιμών της μεταβλητής x) απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα και το πεδίο τιμών (το σύνολο των αντίστοιχων εικόνων) στον κατακόρυφο άξονα, για την γεωμετρική απεικόνιση μιγαδικών συναρτήσεων χρησιμοποιούμε δύο διαγράμματα Argand - ένα για την απεικόνιση του πεδίου ορισμού (επίπεδο z) και ένα για την απεικόνιση του πεδίου τιμών (επίπεδο w), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχ. 3: Η συνάρτηση $w=f(z)$ απεικονίζει μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου (γραμμοσκιασμένη περιοχή στο επίπεδο z) σε μια άλλη περιοχή (γραμμοσκιασμένη περιοχή του επιπέδου $w=f(z)$).

Στοιχειώδεις συναρτήσεις

Οι μιγαδικές συναρτήσεις, σε αναλογία με τις πραγματικές, μπορούν να γραφούν ως συνδυασμοί στοιχειωδών συναρτήσεων, οι κυριότερες από τις οποίες είναι οι δυνάμεις, η εκθετική συνάρτηση, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι υπερβολικές συναρτήσεις. Αυτές ορίζονται ως εξής:

Ύψωση σε δύναμη: $z^2 = z \cdot z$, $z^n = z \cdot z \cdot z \cdot \dots (n\text{-φορές})$.

Εκθετική συνάρτηση: $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Για το τελευταίο μέρος της ισότητας χρησιμοποιήθηκε ο τύπος του Euler.

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις στους μιγαδικούς ορίζονται μέσω της εκθετικής συνάρτησης, ως εξής:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z}. \quad (13)$$

Υπερβολικές συναρτήσεις²: Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται όπως στους πραγματικούς, μέσω της εκθετικής συνάρτησης, ως εξής:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1}{\tanh z}. \quad (14)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των εκθετικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μπορούν να αποδειχθούν πολύ εύκολα οι παρακάτω σχέσεις (αποδείξτε τις):

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \quad (15)$$

Πλειότιμες συναρτήσεις

Όλες οι συναρτήσεις που ορίστηκαν παραπάνω σε κάθε αριθμό z αντιστοιχίζουν ένα μόνο $f(z)$, για αυτό και λέγονται μονότιμες. Υπάρχουν όμως και συναρτήσεις οι οποίες σε κάθε z αντιστοιχίζουν περισσότερα από ένα $f(z)$. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται πλειότιμες. Οι βασικές πλειότιμες συναρτήσεις είναι η ρίζα, ο λογάριθμος και η ύψωση μιγαδικού αριθμού σε δύναμη με εκθέτη μιγαδικό.

Ρίζα

Λέμε ότι ένας αριθμός w είναι τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού z , και γράφουμε $w = f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$, αν ο w ικανοποιεί την εξίσωση $w^2 = z$. Η εξίσωση αυτή είναι ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού ως προς w , και, σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα τις Άλγεβρας³, έχει δύο λύσεις, δηλαδή υπάρχουν δύο αριθμοί w οι οποίοι είναι τετραγωνικές ρίζες του z (πόσες νιοστές ρίζες θα έχει ο z).

Για να βρούμε τις ρίζες (κάθε τάξης) ενός μιγαδικού z , γράφουμε τον αριθμό στην πιο γενική πολική μορφή, δηλαδή $z = re^{i\theta+2ik\pi}$, όπου r είναι μέτρο του z , θ το πρωτεύον όρισμά του και k ακέραιος που παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, 3 \dots$. Τότε,

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n} = (re^{i\theta+2ik\pi})^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n + i2k\pi/n}. \quad (16)$$

Για τις τετραγωνικές ρίζες ο τύπος (16) δίνει $w = \sqrt{z} = z^{1/2} = (re^{i\theta+2ik\pi})^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2 + ik\pi}$.

Παρατηρήστε ότι η ρίζα του μιγαδικού z δεν είναι μοναδική, αλλά εξαρτάται από την τιμή του k .

² Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται υπερβολικές γιατί το σύνολο των σημείων $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in (-\infty, +\infty)$, σχηματίζει το δεξιό μέρος υπερβολής.

³ Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας λέει ότι κάθε πολυώνυμο n βαθμού έχει n ρίζες (στο σύνολο των μιγαδικών).

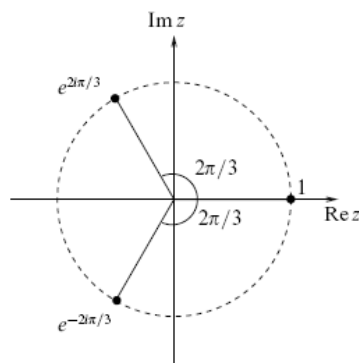
$$\text{Για } \begin{cases} k=0 \rightarrow w=w_0=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\theta/2} \\ k=1 \rightarrow w=w_1=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} \\ k=2 \rightarrow w=w_2=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i(\theta/2+2\pi)}=w_0 \\ k=3 \rightarrow w=w_3=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i(\theta/2+3\pi)}=w_1 \\ \dots \end{cases}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχουμε δύο διαφορετικές τετραγωνικές ρίζες του z , σε συμφωνία με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Όμοια, οι τρίτες ρίζες ενός μιγαδικού z θα είναι τρεις, και οι νιοστές ρίζες θα είναι n στο πλήθος.

Αν εφαρμόσουμε τα παραπάνω για να υπολογίσουμε τις τρίτες ρίζες της μονάδας θα έχουμε

$$w=1^{1/3}=(e^{2ik\pi})^{1/3}=e^{2ik\pi/3}\Rightarrow$$

$$\text{Για } \begin{cases} k=0 \rightarrow w=w_0=\sqrt[3]{1}=e^0=1 \\ k=1 \rightarrow w=w_1=\sqrt[3]{1}=e^{2i\pi/3} \\ k=2 \rightarrow w=w_2=\sqrt[3]{1}=e^{4i\pi/3} \end{cases}$$



Οι ρίζες αυτές απεικονίζονται γραφικά όπως δείχνεται στο Σχ. 4.

Σχ. 4: Γραφική απεικόνιση των αριθμών που αποτελούν τις τρίτες ρίζες της μονάδας.

Εφαρμογή: Υπολογίστε τις τέταρτες ρίζες της μονάδας και τις τετραγωνικές ρίζες του i .

Λογάριθμος μιγαδικού

Εκτός από τη ρίζα, άλλη σημαντική πλειότιμη συνάρτηση είναι ο λογάριθμος ενός μιγαδικού z , $w=f(z)=\ln(z)$. Για να υπολογίσουμε το λογάριθμο και πάλι ξεκινάμε από την πολική μορφή του z . Γράφουμε

$$w=\ln(z)=\ln(re^{i\theta+2ik\pi})=\ln r+\ln e^{i\theta+2ik\pi}=\ln r+i\theta+2ik\pi, \quad k=0,1,2,\dots \quad (17)$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο λογάριθμος και το εκθετικό είναι αντίστροφες συναρτήσεις).

Παρατηρήστε ότι ο λογάριθμος εξαρτάται από την τιμή του ακέραιου αριθμού k . Για κάθε τιμή του k ο λογάριθμος είναι διαφορετικός, και υπάρχουν άπειρες δυνατές διαφορετικές τιμές. Παρατηρήστε επίσης ότι στους μιγαδικούς και οι αρνητικοί αριθμοί έχουν λογάριθμο.

Τον λογάριθμο που αντιστοιχεί σε $k=0$ τον ονομάζουμε πολλές φορές και βασικό λογάριθμο, και τον συμβολίζουμε με Ln , δηλαδή

$$\text{Ln}(z)=\ln r+i\theta, \quad 0\leq\theta<2\pi. \quad (18)$$

Λόγω της πλειότιμης φύσης του λογαρίθμου, βασικές ιδιότητες του λογαρίθμου που ξέρουμε από τους πραγματικούς αριθμούς στους μιγαδικούς δεν ισχύουν. Δηλαδή για z_1, z_2 μιγαδικούς

$$\begin{aligned}\ln(z_1 z_2) &\neq \ln z_1 + \ln z_2, \\ \ln(z_1^n) &\neq n \ln z_1.\end{aligned}\quad (19)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δεν ισχύουν ούτε και για τον βασικό λογάριθμο (είναι εύκολο, π.χ., να δει κανείς ότι $\text{Ln}(i^4) \neq 4\text{Ln } i$).

Άλλη πλειότιμη συνάρτηση είναι η ύψωση σε δύναμη με εκθέτη μιγαδικό, δηλαδή η συνάρτηση t^z με t και z μιγαδικούς. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται μέσω της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης ως εξής:

$$t^z = e^{z \ln t}. \quad (20)$$

Σημείο διακλάδωσης πλειότιμης συνάρτησης. Τάξη σημείου διακλάδωσης.

Στενά συνδεδεμένη με την έννοια της πλειότιμης συνάρτησης είναι η έννοια του σημείου διακλάδωσης. Λέμε ότι ένα σημείο z_0 είναι *σημείο διακλάδωσης* της πλειότιμης συνάρτησης $f(z)$ αν μια πλήρης περιστροφή του z γύρω από το z_0 δεν φέρνει τη συνάρτηση $f(z)$ στην αρχική της τιμή. Π.χ., για τη συνάρτηση $f(z) = \sqrt{z}$ σημείο διακλάδωσης είναι το $z_0=0$. Μια πλήρης περιστροφή του z γύρω από το μηδέν, όπως είδαμε πιο πάνω, δεν επαναφέρει τη ρίζα του z στην αρχική της τιμή.

Για την τετραγωνική ρίζα, εν τούτοις, μια δεύτερη περιστροφή γύρω από το μηδέν επαναφέρει τη συνάρτηση στην αρχική της τιμή. Το μηδέν τότε λέγεται σημείο διακλάδωσης τάξης 1.

Γενικά, ένα σημείο διακλάδωσης z_0 της συνάρτησης $f(z)$ λέμε ότι είναι *τάξης n* αν ο ελάχιστος αριθμός περιστροφών του z γύρω από το z_0 που απαιτούνται για να επανέλθει η συνάρτηση $f(z)$ στην αρχική της τιμή είναι $n+1$.

Οι διαφορετικές τιμές μια πλειότιμης συνάρτησης ονομάζονται και κλάδοι της συνάρτησης.

Σημείο διακλάδωσης της ρίζας είναι επίσης και το $z_0 = \infty$. (Σημειώστε ότι, σε αντίθεση με τους πραγματικούς, στους μιγαδικούς υπάρχει μόνο ένα άπειρο. Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης $f(z)$ στο άπειρο προσδιορίζεται από τη συμπεριφορά της $1/f(z)$ στο μηδέν.)

Για να αποφύγουμε την παρουσία πολλαπλών τιμών για μια συνάρτηση και να μπορούμε να τη χειριζόμαστε ως μονότιμη, ορίζουμε τη λεγόμενη *τομή* μιγαδικής συνάρτησης. *Τομή* μιγαδικής συνάρτησης είναι κάθε γραμμή που ενώνει δύο σημεία διακλάδωσης. Π.χ., για τη ρίζα τομή μπορεί να είναι οποιαδήποτε γραμμή που ενώνει το μηδέν και το άπειρο. Την τομή συνήθως τη συμβολίζουμε σχηματικά με μια κυματοειδή γραμμή.

Ορίζοντας για μια πλειότιμη μιγαδική συνάρτηση μια τομή και απαγορεύοντας στη μεταβλητή z να διασχίσει αυτή την τομή, μπορούμε να εξασφαλίσουμε τη μονοτιμία της $f(z)$. Η διαδικασία αυτή λέγεται *μονοσημαντοποίηση πλειότιμης συνάρτησης*. Για να προσδιορίσουμε ποιος ακριβώς κλάδος της συνάρτησης επιλέγεται αρκεί να δώσουμε, εκτός από τον τύπο της συνάρτησης, την τιμή της για κάποιον, οποιονδήποτε, μιγαδικό αριθμό z .

Εφαρμογή: Υπολογίστε την τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού z επιλέγοντας τον κλάδο για τον οποίο $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, αν ως τομή οριστεί ο πραγματικός θετικός ημιάξονας.