

Τριπλό Ολοκλήρωμα

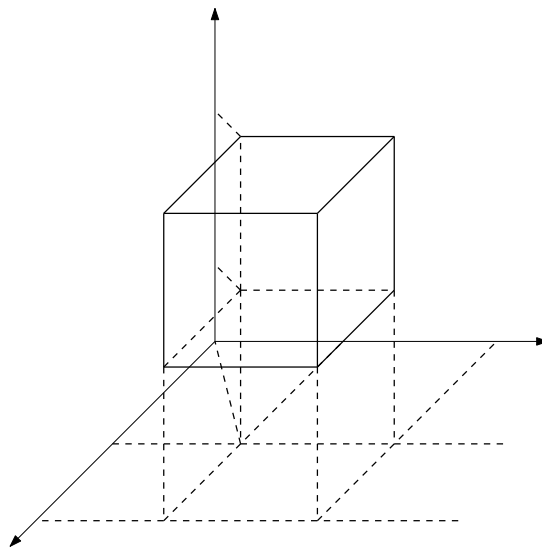
I. Πάνω σε ορθογώνιο του \mathbb{R}^3

Έστω

$$R = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times [\alpha_3, \beta_3]$$

ένα κλειστό ορθογώνιο (παραλληλεπίπεδο) του \mathbb{R}^3 και μία φραγμένη συνάρτηση:

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R}$$



Το τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^3$ ορίζεται όπως ορίστηκε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ορθογώνιο του \mathbb{R}^2 . Συγκεκριμένα θεωρούμε μία διαμέριση του R , ως εξής:

$$P = P_{\xi\eta\zeta} = \{R_{ijk} : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, l\}$$

όπου

$$R_{ijk} = [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [\eta_{j-1}, \eta_j] \times [\zeta_{k-1}, \zeta_k]$$

είναι τα ορθογώνια του \mathbb{R}^3 , που ορίζονται από τις διαμερίσεις:

$$\begin{aligned} P_\xi &= \{\alpha_1 = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n = \beta_1\}, \quad \text{με } \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n, \\ P_\eta &= \{\alpha_2 = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m = \beta_2\}, \quad \text{με } \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_m, \\ P_\zeta &= \{\alpha_3 = \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_l = \beta_3\}, \quad \text{με } \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_l, \end{aligned}$$

των διαστημάτων $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, $[\alpha_3, \beta_3]$ αντίστοιχα.

Η λεπτότητα $\lambda(P)$ της διαμέρισης P ορίζεται:

$$\lambda(P) = \max\{\rho(R_{ijk}) : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, l\},$$

όπου

$$\rho(R_{ijk}) = \sqrt{(\xi_i - \xi_{i-1})^2 + (\eta_j - \eta_{j-1})^2 + (\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}$$

είναι το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου R_{ijk} .

Θεωρούμε μία φραγμένη συνάρτηση

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R}$$

και για τη διαμέριση $P = P_{\xi\eta\zeta}$ ορίζουμε τα αθροίσματα:

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l M_{ijk} V(R_{ijk}) \quad : \text{άνω άθροισμα}$$

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l m_{ijk} V(R_{ijk}) \quad : \text{κάτω άθροισμα}$$

όπου

$$M_{ijk} = \sup\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in R_{ijk}\}$$

$$m_{ijk} = \inf\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in R_{ijk}\}$$

$$V(R_{ijk}) = (\xi_i - \xi_{i-1})(\eta_j - \eta_{j-1})(\zeta_k - \zeta_{k-1}) \quad : \text{όγκος του } R_{ijk}.$$

Επίσης ορίζουμε

$$\int_R^- f d(V) := \inf_P U(f, P) \quad : \text{Άνω ολοκλήρωμα}$$

$$\int_{-R} f d(V) := \sup_P L(f, P) \quad : \text{Κάτω ολοκλήρωμα}$$

Ορισμός

Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^3$, όταν ισχύει

$$\int_R^- f d(V) = \int_{-R} f d(V) = \lambda$$

Ο αριθμός λ είναι το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο ορθογώνιο R και συμβολίζεται

$$\int \int \int_R f(x, y, z) d(V) \text{ ή } \int \int \int_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Οι ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων (αλλά και των απλών) αποδεικνύεται ότι ισχύουν και εδώ.

Ο υπολογισμός ενός τριπλού ολοκληρώματος πάνω στο ορθογώνιο R του \mathbb{R}^3 , γίνεται, όπως του διπλού ολοκληρώματος με τη βοήθεια των (τριπλών) διαδοχικών ολοκληρωμάτων.

Για τη συνάρτηση $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, $R \subseteq \mathbb{R}^3$, υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα διπλά διαδοχικά ολοκληρώματα :

$$F_{23}(x) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy, \quad x \in [\alpha_1, \beta_1]$$

$$F_{32}(x) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x, y, z) dy dx, \quad x \in [\alpha_1, \beta_1]$$

$$F_{13}(y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx, \quad y \in [\alpha_2, \beta_2]$$

κ.λ.π. (6 συνολικά συνδυασμοί).

Αν οι συναρτήσεις F_{23}, F_{32} , κ.λ.π. είναι ολοκληρώσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα, τότε ορίζονται τα τριπλά διαδοχικά ολοκληρώματα. Π.χ.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy \right] dx,$$

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx dy = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx \right] dy.$$

Αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1. Αν η $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R και όλα τα τριπλά διαδοχικά ολοκληρώματα και ισχύει:

$$\begin{aligned} \int \int \int_R f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy dx = \\ &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx dy = \\ &= \dots \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το (τριπλό) διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 xze^{y+z} dx dz dy$$

Λύση

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 z e^{y+z} \right]_1^3 dz dy \\ &= \int_0^1 \int_1^2 4z e^{y+z} dz dy \\ &= 4 \int_0^1 [z e^{y+z} - e^{y+z}]_1^2 dy \\ &= 4 \int_0^1 e^{y+2} dy = 4 [e^{y+2}]_0^1 = 4(e^3 - e^2). \end{aligned}$$

II. Πάνω σε φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$, B : φραγμένο και $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη.

B : φραγμένο $\Rightarrow \exists$ κλειστό ορθογώνιο $R : B \subseteq R$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in B \\ 0, & (x, y, z) \in R - B \end{cases}$$

Ορισμός

Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $B \Leftrightarrow$ η \tilde{f} είναι ολοκληρώσιμη στο R .

Αποδεικνύεται ότι

$$\int \int \int_R \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{R_1} \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

\forall κλειστό ορθογώνιο $R_1 : B \subseteq R_1$, δηλαδή το ολοκλήρωμα της \tilde{f} είναι ανεξάρτητο του R (αρκεί να περιέχει το B).

Ορίζουμε:

Τριπλό ολοκλήρωμα της f στο B :

$$\int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_R \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

Όγκος V του B :

$$V(B) = \int \int \int_B dx dy dz$$

Απλά σύνολα

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$:

$B : xy$ – απλό \Leftrightarrow

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \omega_1(x, y) \leq z \leq \omega_2(x, y)\},$$

όπου $D : x$ – απλό $\subseteq \mathbb{R}^2$, $\omega_1, \omega_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς.

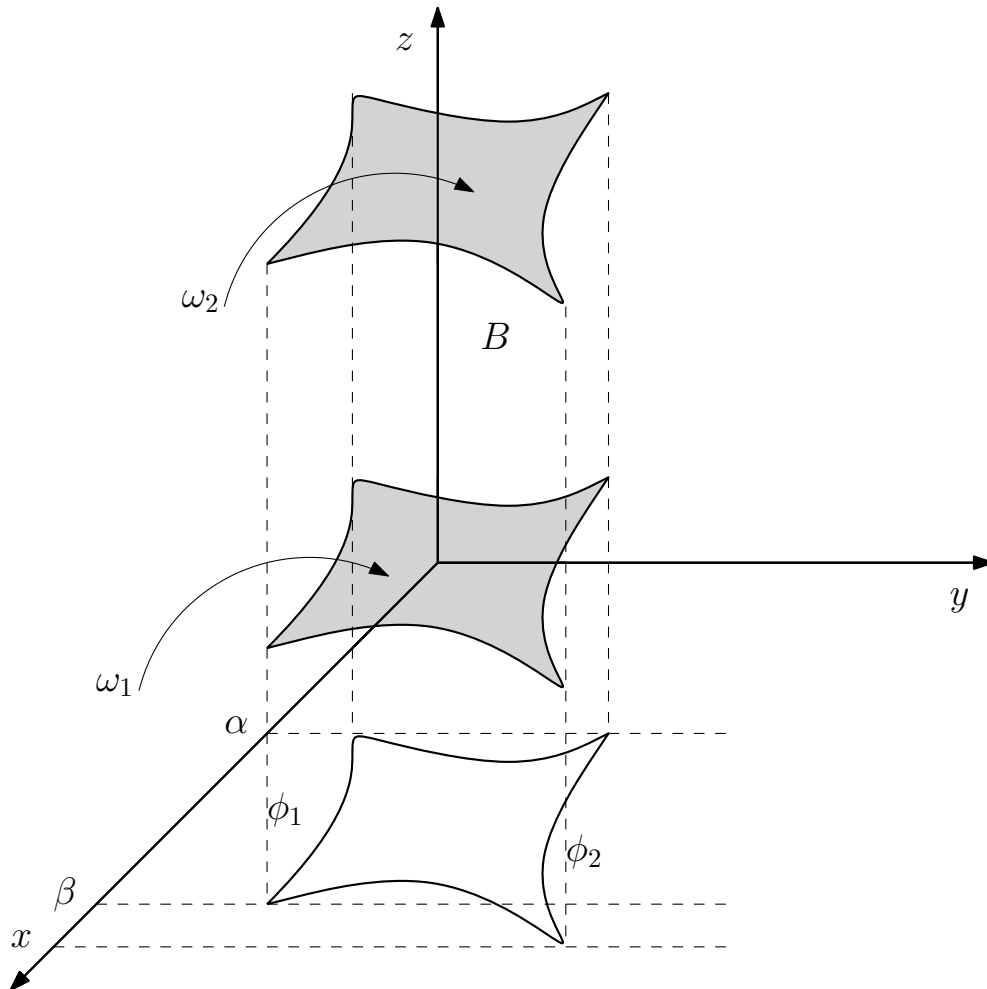
Δηλαδή

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$\alpha \leq x \leq \beta, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \omega_1(x, y) \leq z \leq \omega_2(x, y)\},$$

$$\phi_1, \phi_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχείς.}$$

Ανάλογα ορίζονται τα σύνολα: yx – απλό, xz – απλό,



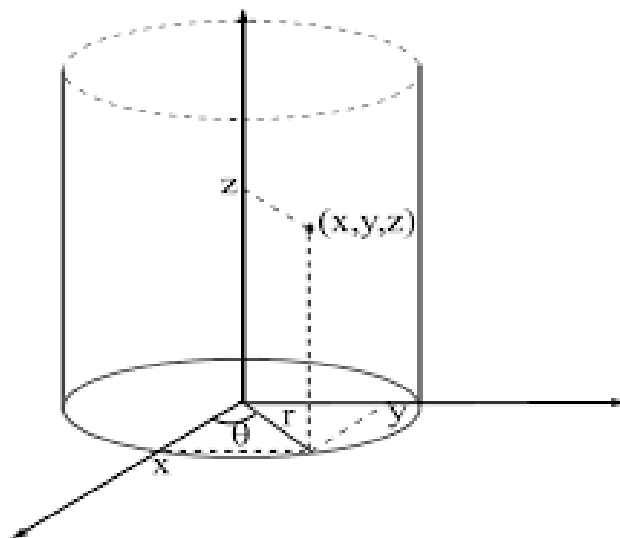
Το $B \subseteq \mathbb{R}^3$ λέγεται απλό σύνολο αν είναι συγχρόνως: xy -απλό, xz -απλό, \dots , π.χ. η σφαίρα.

Θεώρημα 2. (Fubini) Έστω $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$, συνεχής και φραγμένη. Αν B είναι xy -απλό, τότε υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα $\int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz$ και ισχύει:

$$\int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\omega_1(x,y)}^{\omega_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Ομοίως, αν το B είναι xz -απλό, τότε \dots .

Κυλινδρικός Μετασχηματισμός



$$\vec{T} : \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq r < \infty, \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{T} : G \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \vec{T}(G) = B \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ (κυλινδρικός μετασχημ.)}$$

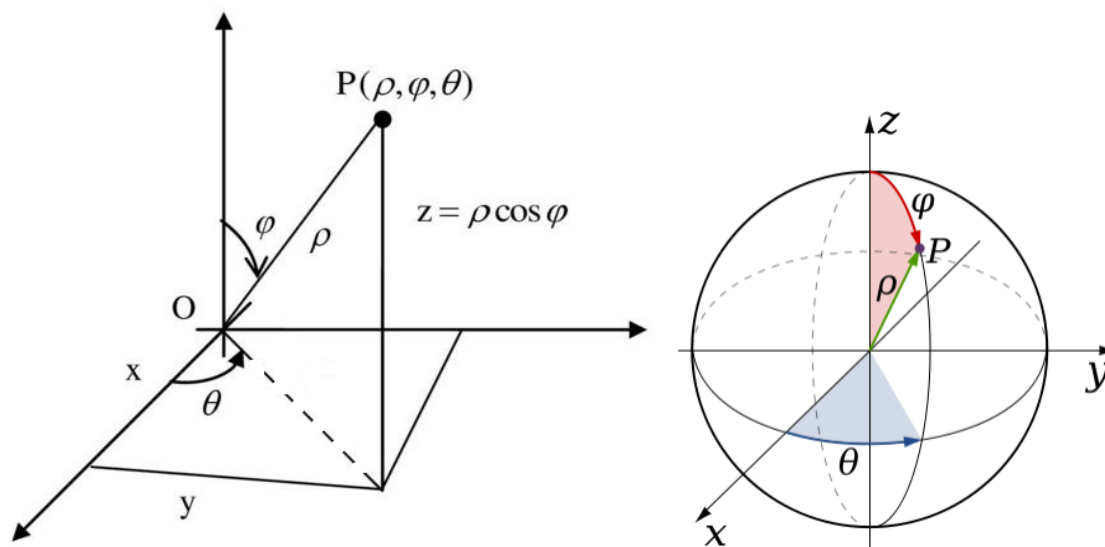
$$\det(J\vec{T}(r, \theta, z)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr d\theta dz$$

και

$$V(B) = \iiint_G r \, dr d\theta dz$$

Σφαιρικός Μετασχηματισμός



$$\vec{T} : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi, & 0 \leq \rho < \infty \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi, & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = \rho \cos \phi, & 0 \leq \phi < \pi \end{cases}$$

$$f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{T} : G \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \vec{T}(G) = B \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ (σφαιρικός μετασχημ.)}$$

$$\det(J\vec{T}(\rho, \theta, \phi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi$$

$$\begin{aligned} & \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_G f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

και

$$V(B) = \iiint_G \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

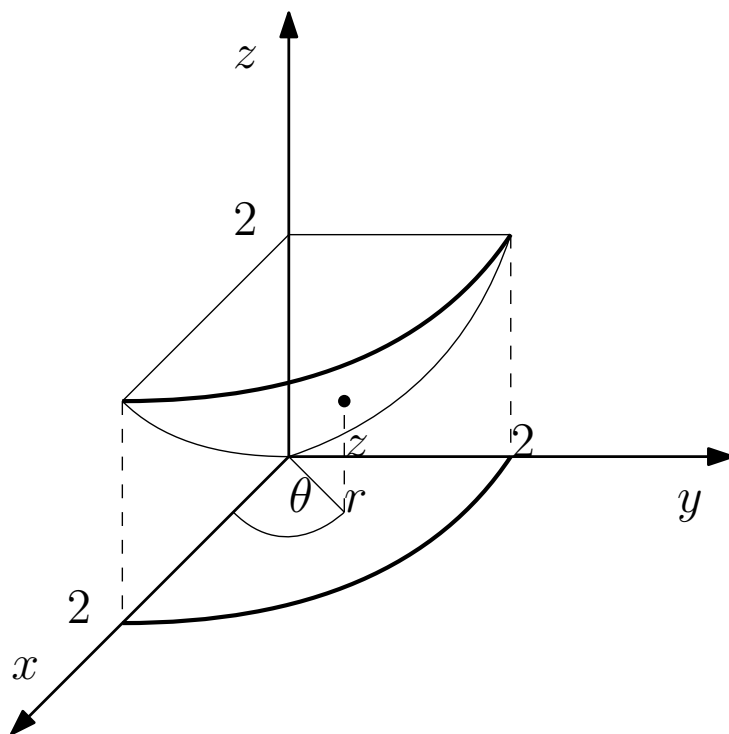
Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int \int \int_B (x^2 + y^2) dx dy dz$, όπου B είναι το στερεό που περιβάλλεται από την επιφάνεια $x^2 + y^2 = 2z$ (παραβολοειδής) και το επίπεδο $z = 2$.

Λύση

Τομή των επιφανειών:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$



Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 2 \end{cases}$$

Εξίσωση παραβολοειδούς: $r^2 = 2z$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2 \end{cases}$$

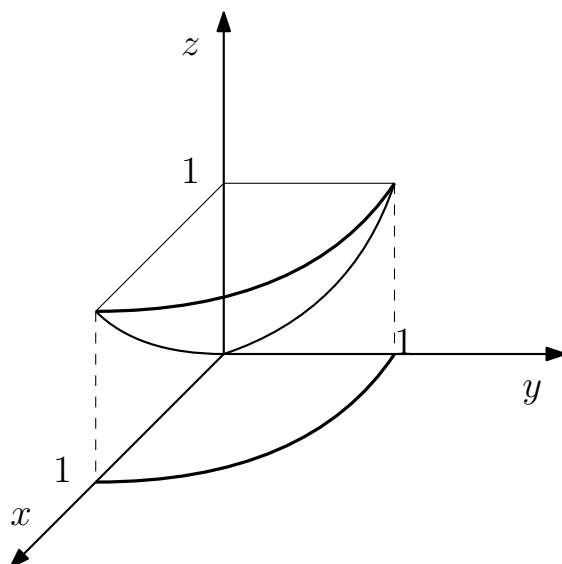
Επομένως:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^4}{4} - \frac{r^6}{12} \right]_0^2 d\theta = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

2) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B, που περιβάλλεται από το επίπεδο $z = 0$, το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση

Αν B_1 είναι το μέρος του στερεού B που βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία, τότε: $V(B) = 4V(B_1)$, όπου $V(B_1) = \int \int \int_{B_1} dx dy dz$.



Εφαρμόζουμε τον κυλινδρικό μετασχηματισμό και έχουμε:

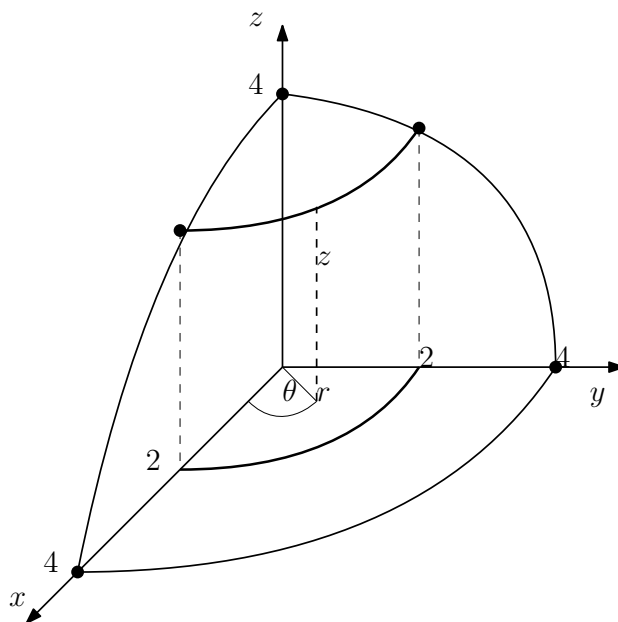
$$\begin{aligned} V(B_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Άρα $V(B) = 4 * \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

3) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ και μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$.

Λύση

Αν B_1 είναι το μέρος του στερεού B που περιέχεται στην πρώτη στερεά γωνία, τότε: $V(B) = 8V(B_1)$.



Σε κυλινδρικές συντεταγμένες οι εξισώσεις των επιφανειών είναι:

$$\begin{cases} z = \sqrt{16 - r^2} : & \text{σφαίρας} \\ r = 2 : & \text{κύλινδρου} \end{cases}$$

Eíva1

$$\begin{aligned} V(B_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r \sqrt{16-r^2} dr d\theta \\ &= -\frac{12}{23} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(16-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} \left(16^{\frac{3}{2}} - 12^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

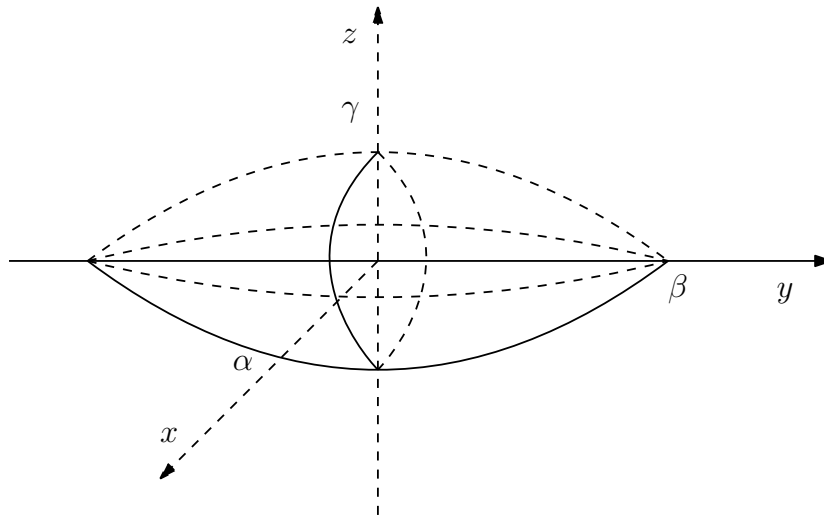
Όγκος ελλειψοειδούς: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

$$\begin{cases} x = \alpha \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \beta \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \gamma \rho \cos \phi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} J\vec{T}(\rho, \theta, \phi) = -\alpha\beta\gamma\rho^2 \sin \phi \\ V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \alpha\beta\gamma d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

4) Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$.

Λύση



Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = \alpha \rho \cos \theta \sin \phi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \beta \rho \sin \theta \sin \phi, & 0 \leq \phi \leq \pi \\ z = \gamma \rho \cos \phi, & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

Η εξίσωση του ελλειψοειδούς γίνεται $\rho = 1$ και η ορίζουσα του μετασχηματισμού:

$$\left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \alpha\beta\gamma\rho^2 \sin \phi$$

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \alpha\beta\gamma\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \dots = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma.$$