

ΘΕΜΑΤΑ

A1. Δίνεται $f(x) = x^2 - 100$. Εφαρμόστε δυο επαναλήψεις της μεθόδου Newton – Raphson για να προσεγγίσετε την $\sqrt{100}$. Λάβετε $x_0 = 8$ και καταγράψτε τα x_1, x_2 .

A2. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 1$ σε σειρά Taylor με κέντρο $x_0 = 2$.

A3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^8 dx$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simpson και βήμα $h = \frac{1}{4}$. Οι υπολογισμοί με 4 δεκαδικά ψηφία.

A4. Δίνονται τα σημεία στο επίπεδο $(1,2), (2,5), (3,7)$. Βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που διέρχεται από αυτά, μέσω ελαχιστοποίησης της συνάρτησης σφάλματος ως προς τις παραμέτρους της.

A5. Υπολογίστε το $\int \frac{1}{6x-5x^2+x^3} dx$.

A6. Επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$. Καταγράψτε τα x_1, x_2, x_3 .

A7. Υπολογίστε το $\iint_D \sqrt{4-y^2} dx dy$, με $D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

B1. Ρίχνουμε 3 ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα (α) Να έχουμε άθροισμα τουλάχιστον 16, (β) Να έχουμε άθροισμα τουλάχιστον 16 δεδομένου ότι ένα ζάρι θα είναι σίγουρα 5 ή 6;

B2. Κάθε ώρα προσέρχονται σε ένα ταμείο 7 πελάτες σύμφωνα με την κατανομή Poisson. Ποια είναι η πιθανότητα (α) να προσέλθουν ακριβώς 8 πελάτες, (β) να προσέλθουν τουλάχιστον 3 πελάτες;

B3. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 18, \sigma = 5$. Υπολογίστε την πιθανότητα: $P(12 < X < 22)$. Χρησιμοποιείτε τον παρακάτω πίνακα τυποποιημένης κανονικής κατανομής $z \sim N(0,1)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6701	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453	0.7484	0.7515	0.7546
0.7	0.7577	0.7607	0.7637	0.7667	0.7696	0.7725	0.7754	0.7783	0.7811	0.7841
0.8	0.7869	0.7896	0.7924	0.7951	0.7978	0.8005	0.8032	0.8059	0.8085	0.8112
0.9	0.8138	0.8164	0.8189	0.8214	0.8238	0.8264	0.8289	0.8314	0.8338	0.8362
1.0	0.8389	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8621	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8830	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9015	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9177	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9319	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9441	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9545	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9633	0.9641	0.9648	0.9655	0.9661	0.9668	0.9674	0.9681	0.9687	0.9693
1.9	0.9699	0.9705	0.9711	0.9716	0.9722	0.9727	0.9732	0.9737	0.9742	0.9747
2.0	0.9752	0.9757	0.9762	0.9767	0.9771	0.9776	0.9780	0.9785	0.9789	0.9793

Γράψτε 5 θέματα κατηγορίας A & 2 θέματα κατηγορίας B.

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΘΕΜΑΤΑ

A1. Δίνεται $f(x) = x^2 - 81$. Εφαρμόστε δυο επαναλήψεις της μεθόδου Newton – Raphson για να προσεγγίσετε την $\sqrt{81}$. Λάβετε $x_0 = 8$ και καταγράψτε τα x_1, x_2 .

A2. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 1$ σε σειρά Taylor με κέντρο $x_0 = 3$.

A3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^9 dx$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simpson και βήμα $h = \frac{1}{4}$. Οι υπολογισμοί με 4 δεκαδικά ψηφία.

A4. Δίνονται τα σημεία στο επίπεδο $(1,3), (2,5), (3,6)$. Βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που διέρχεται από αυτά, μέσω ελαχιστοποίησης της συνάρτησης σφάλματος ως προς τις παραμέτρους της.

A5. Υπολογίστε το $\int \frac{1}{4x-5x^2+x^3} dx$.

A6. Επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 0x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 3 \\ -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 1 \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = -5 \end{cases}$. Καταγράψτε τα x_1, x_2, x_3 .

A7. Υπολογίστε το $\iint_D \sqrt{4-x^2} dx dy$, με $D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

B1. Ρίχνουμε 3 ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα (α) Να έχουμε άθροισμα το πολύ 5, (β) Να έχουμε άθροισμα το πολύ 5 δεδομένου ότι ένα ζάρι θα είναι σίγουρα 1 ή 2;

B2. Κάθε ώρα προσέρχονται σε ένα ταμείο 8 πελάτες σύμφωνα με την κατανομή Poisson. Ποια είναι η πιθανότητα (α) να προσέλθουν ακριβώς 9 πελάτες, (β) να προσέλθουν τουλάχιστον 3 πελάτες;

B3. Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 19, \sigma = 4$. Υπολογίστε την πιθανότητα: $P(15 < X < 24)$. Χρησιμοποιείτε τον παρακάτω πίνακα τυποποιημένης κανονικής κατανομής $z \sim N(0,1)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453	0.7484	0.7515	0.7546
0.7	0.7577	0.7607	0.7637	0.7667	0.7696	0.7725	0.7754	0.7783	0.7811	0.7841
0.8	0.7869	0.7897	0.7925	0.7953	0.7980	0.8007	0.8034	0.8061	0.8087	0.8113
0.9	0.8139	0.8166	0.8192	0.8218	0.8244	0.8269	0.8294	0.8319	0.8344	0.8369
1.0	0.8394	0.8419	0.8443	0.8468	0.8491	0.8515	0.8538	0.8561	0.8584	0.8607
1.1	0.8629	0.8651	0.8673	0.8694	0.8715	0.8736	0.8757	0.8777	0.8797	0.8817
1.2	0.8837	0.8857	0.8877	0.8896	0.8915	0.8934	0.8953	0.8972	0.8990	0.9009
1.3	0.9027	0.9045	0.9063	0.9081	0.9099	0.9116	0.9133	0.9151	0.9168	0.9185
1.4	0.9202	0.9219	0.9235	0.9251	0.9267	0.9282	0.9298	0.9312	0.9327	0.9341
1.5	0.9357	0.9371	0.9386	0.9399	0.9413	0.9427	0.9440	0.9454	0.9467	0.9479
1.6	0.9491	0.9504	0.9516	0.9528	0.9539	0.9551	0.9562	0.9573	0.9584	0.9594
1.7	0.9605	0.9615	0.9625	0.9635	0.9645	0.9655	0.9665	0.9674	0.9683	0.9692

Γράψτε 5 θέματα κατηγορίας A & 2 θέματα κατηγορίας B.

Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

A1. $x_0 = 8$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 8 - \frac{-36}{16} = 8 + \frac{36}{16} = 8 + \frac{9}{4} = \frac{41}{4}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{41}{4} - \frac{\frac{1681}{16} - 100}{\frac{41}{2}} = \frac{41}{4} - \frac{81/16}{41/2} = \frac{41}{4} - \frac{162}{656} = \frac{3362 - 162}{328} = \frac{3200}{328} = \frac{400}{41}$$

$$x_1 = \frac{41}{4}, x_2 = \frac{400}{41}$$

A2 $f'(x) = 5x^4, f''(x) = 20x^3, f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x, f^{(5)}(x) = 120$

$$f(2) = 32 - 1 = 31, f'(2) = 5 \cdot 16 = 80, f''(2) = 20 \cdot 8 = 160$$

$$f^{(3)}(2) = 60 \cdot 4 = 240, f^{(4)}(2) = 120 \cdot 2 = 240, f^{(5)}(2) = 120$$

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 + \frac{f^{(5)}(2)}{5!}(x-2)^5$$

$$f(x) = 31 + 80(x-2) + 80(x-2)^2 + 40(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5$$

A3. με $h = 1/4$, άρα 4 υποδιαστήματα: $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$

$$f(x_0) = 0^8 = 0, f(x_1) = (1/4)^8 = 1/65536 \approx 0.00001526$$

$$f(x_2) = (1/2)^8 = 1/256 = 0.00390625, f(x_3) = (3/4)^8 = 6561/65536 \approx 0.1001129$$

$$f(x_4) = 1^8 = 1$$

Με τη μέθοδο Simpson:

$$\int_0^1 x^8 dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)]$$

$$\frac{h}{3} = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12} \approx 0.0833$$

$$\text{Άθροισμα: } f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4) \approx 0 + 4(0.00001526 + 0.1001129) + 2(0.00390625) + 1$$

$$4(0.1001282) = 0.4005128, 2(0.00390625) = 0.0078125$$

$$\text{Άθροισμα} = 0.4005128 + 0.0078125 + 1 = 1.4083253$$

$$\text{Πολλαπλασιάζοντας με } h/3: 0.0833 \cdot 1.4083 \approx 0.1173$$

Έτσι:

$$\int_0^1 x^8 dx \approx 0.1173$$

A4. Έστω η ευθεία $y = ax + b$ και συνάρτηση σφάλματος

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^3 (y_i - (ax_i + b))^2 = (2 - (a \cdot 1 + b))^2 + (5 - (a \cdot 2 + b))^2 + (7 - (a \cdot 3 + b))^2$$

Παράγωγοι ως προς a και b :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2(2 - (a + b)) \cdot 1 - 2(5 - (2a + b)) \cdot 2 - 2(7 - (3a + b)) \cdot 3 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2(2 - (a + b)) - 2(5 - (2a + b)) - 2(7 - (3a + b)) = 0$$

Απλοποιώντας:

$$\text{Για } b: (2 - (a + b)) + (5 - (2a + b)) + (7 - (3a + b)) = 0$$

$$2 - a - b + 5 - 2a - b + 7 - 3a - b = 0$$

$$14 - 6a - 3b = 0 \Rightarrow 6a + 3b = 14 \Rightarrow 2a + b = \frac{14}{3}$$

Για α: $(2 - (a + b)) \cdot 1 + (5 - (2a + b)) \cdot 2 + (7 - (3a + b)) \cdot 3 = 0$

$$(2 - a - b) + 2(5 - 2a - b) + 3(7 - 3a - b) = 0$$

$$2 - a - b + 10 - 4a - 2b + 21 - 9a - 3b = 0$$

$$33 - 14a - 6b = 0 \Rightarrow 7a + 3b = \frac{33}{2} (\text{όμως καλύτερα σε κλάσματα})$$

Ας το ξαναγράψουμε: $33 - 14a - 6b = 0 \Rightarrow 14a + 6b = 33$

Λύνοντας το σύστημα:

$$2a + b = \frac{14}{3}, 14a + 6b = 33$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με 3: $6a + 3b = 14$

Διπλάσια: $12a + 6b = 28$

Αφαιρούμε από δεύτερη: $14a + 6b - 12a - 6b = 33 - 28 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

Τότε $b = \frac{14}{3} - 2a = \frac{14}{3} - 5 = \frac{14-15}{3} = -\frac{1}{3}$

Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων: $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$

A5. Μερική διάσπαση: $\frac{1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

$$1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

Βάζοντας $x = 0$: $1 = A(-2)(-3) = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

$x = 2$: $1 = B \cdot 2(-1) = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$x = 3$: $1 = C \cdot 3(1) = 3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$

Άρα: $\frac{1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{1}{6x} - \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x-3)}$

Ολοκλήρωση:

$$\int \frac{1}{6x - 5x^2 + x^3} dx = \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x-3| + C$$

A6. Το σύστημα είναι

$$0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

Από την πρώτη: $2x_2 + 3x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1-3x_3}{2}$

Στη δεύτερη: $2x_1 - 3\left(\frac{1-3x_3}{2}\right) + x_3 = 6 \Rightarrow 2x_1 - \frac{3-9x_3}{2} + x_3 = 6$

$$2x_1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{2}x_3 + x_3 = 6 \Rightarrow 2x_1 + \frac{11}{2}x_3 - \frac{3}{2} = 6$$

$$2x_1 + \frac{11}{2}x_3 = \frac{15}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{15}{4} - \frac{11}{4}x_3$$

Στην τρίτη: $4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \Rightarrow 4\left(\frac{15}{4} - \frac{11}{4}x_3\right) + \frac{1-3x_3}{2} - x_3 = 2$

$$15 - 11x_3 + \frac{1 - 3x_3}{2} - x_3 = 2 \Rightarrow 15 - 11x_3 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 - x_3 = 2$$

Συνδυάζοντας όρους: $15.5 - (11 + 1.5 + 1)x_3 = 2 \Rightarrow 15.5 - 13.5x_3 = 2 \Rightarrow 13.5x_3 = 13.5 \Rightarrow x_3 = 1$

$$\text{Τότε } x_2 = \frac{1-3 \cdot 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Και } x_1 = \frac{15}{4} - \frac{11}{4} \cdot 1 = \frac{4}{4} = 1$$

Λύση: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$

A7. Το ολοκλήρωμα είναι

$$\iint_D \sqrt{4 - y^2} \, dx \, dy$$

όπου $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Για σταθερό y , το x κυμαίνεται από 0 έως $\sqrt{4 - y^2}$. Άρα

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-y^2} \, dx \, dy = \int_0^2 \sqrt{4-y^2} \cdot \sqrt{4-y^2} \, dy = \int_0^2 (4-y^2) \, dy.$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 (4-y^2) \, dy = \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Άρα

$$\iint_D \sqrt{4-y^2} \, dx \, dy = \frac{16}{3}.$$

B1. Έστω X_1, X_2, X_3 τα αποτελέσματα των τριών ζαριών. Το συνολικό πλήθος αποτελεσμάτων είναι $6^3 = 216$.

(α) Το άθροισμα τουλάχιστον 16 σημαίνει $X_1 + X_2 + X_3 \in \{16, 17, 18\}$.

- Για 18: μόνο $(6, 6, 6) \rightarrow 1$ περίπτωση
- Για 17: $(6, 6, 5)$ και οι παραλλαγές $\rightarrow 3$ παραλλαγές $\times 3$ θέσεις = 3
- Για 16: $(6, 6, 4), (6, 5, 5)$ και οι παραλλαγές:
 $(6, 6, 4) \rightarrow 3$ παραλλαγές, $(6, 5, 5) \rightarrow 3$ παραλλαγές, σύνολο 6

Άρα συνολικά $1 + 3 + 6 = 10$ περιπτώσεις

$$P(X_1 + X_2 + X_3 \geq 16) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}.$$

(β) Δεδομένου ότι ένα ζάρι είναι 5 ή 6, ας βρούμε την πιθανότητα $P(X_1 + X_2 + X_3 \geq 16 \mid \text{ένα ζάρι} \in \{5, 6\})$. Ο αριθμός αποτελεσμάτων όπου τουλάχιστον ένα ζάρι είναι 5 ή 6:

$$216 - 4^3 = 216 - 64 = 152$$

Εκ των 10 περιπτώσεων για άθροισμα ≥ 16 , όλες έχουν τουλάχιστον ένα 5 ή 6. Άρα

$$P(X_1 + X_2 + X_3 \geq 16 \mid \text{ένα ζάρι} \in \{5, 6\}) = \frac{10}{152} = \frac{5}{76}.$$

B2. Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 7)$, τότε

$$P(X = k) = \frac{7^k e^{-7}}{k!}.$$

(α) Ακριβώς 8 πελάτες:

$$P(X = 8) = \frac{7^8 e^{-7}}{8!} \approx 0.130$$

(β) Τουλάχιστον 3 πελάτες:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - \left(\frac{7^0 e^{-7}}{0!} + \frac{7^1 e^{-7}}{1!} + \frac{7^2 e^{-7}}{2!} \right) = 1 - e^{-7} \left(1 + 7 + \frac{49}{2} \right) = 1 - e^{-7} \cdot \frac{71}{2} \approx 0.978 \end{aligned}$$

B3. Έστω $X \sim N(\mu = 18, \sigma^2 = 25)$. Τυποποιούμε με $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$:

$$P(12 < X < 22) = P\left(\frac{12 - 18}{5} < Z < \frac{22 - 18}{5}\right) = P(-1.2 < Z < 0.8).$$

Από τον πίνακα τυποποιημένης κανονικής κατανομής:

$$P(Z < 0.8) \approx 0.7881, P(Z < -1.2) \approx 0.1151$$

Άρα

$$P(12 < X < 22) = P(-1.2 < Z < 0.8) = 0.7881 - 0.1151 = 0.6730 \approx 0.673$$

ομάδα 2

A1. Η συνάρτηση είναι $f(x) = x^2 - 81$ και η παράγωγός της $f'(x) = 2x$. Ο τύπος της μεθόδου Newton-Raphson είναι

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Με $x_0 = 8$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 - \frac{8^2 - 81}{2 \cdot 8} = 8 - \frac{64 - 81}{16} = 8 - \frac{-17}{16} = 8 + 1.0625 = 9.0625 \\ x_2 &= 9.0625 - \frac{(9.0625)^2 - 81}{2 \cdot 9.0625} \approx 9.0625 - \frac{82.1289 - 81}{18.125} \approx 9.0625 - \frac{1.1289}{18.125} \approx 9.0625 - 0.0623 \approx 9.0002 \end{aligned}$$

Άρα

$$x_1 \approx 9.0625, x_2 \approx 9.0002.$$

A2. Η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x)$ γύρω από το $x_0 = 3$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x - 3)^n.$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους:

$$f(x) = x^5 - 1, f'(x) = 5x^4, f''(x) = 20x^3, f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x, f^{(5)}(x) = 120, f^{(n)}(x) = 0$$

για $n > 5$.

Αντικαθιστούμε στο $x_0 = 3$:

$$f(3) = 242, f'(3) = 405, f''(3) = 540, f^{(3)}(3) = 540, f^{(4)}(3) = 360, f^{(5)}(3) = 120.$$

Άρα η σειρά Taylor είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= 242 + 405(x-3) + \frac{540}{2!}(x-3)^2 + \frac{540}{3!}(x-3)^3 + \frac{360}{4!}(x-3)^4 + \frac{120}{5!}(x-3)^5 \\ &= 242 + 405(x-3) + 270(x-3)^2 + 90(x-3)^3 + 15(x-3)^4 + (x-3)^5. \end{aligned}$$

A3. Το διάστημα είναι $[0, 1]$ και το βήμα $h = \frac{1}{4}$, άρα οι κόμβοι είναι

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1.$$

Η μέθοδος Simpson δίνει

$$\int_0^1 x^9 dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)].$$

Υπολογίζουμε τις τιμές:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0, f(x_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{262144}, f(x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \\ f(x_3) &= \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \frac{19683}{262144}, f(x_4) = 1. \end{aligned}$$

Άρα το Simpson δίνει

$$\frac{1/4}{3} \left[0 + 4 \cdot \frac{1}{262144} + 2 \cdot \frac{1}{512} + 4 \cdot \frac{19683}{262144} + 1 \right] = \frac{1}{12} \left[\frac{4}{262144} + \frac{2}{512} + \frac{78732}{262144} + 1 \right].$$

Συνδυάζουμε τα κλάσματα με παρονομαστή 262144:

$$\frac{4 + 78732}{262144} + \frac{2}{512} + 1 = \frac{78736}{262144} + \frac{1024}{262144} + \frac{262144}{262144} = \frac{344904}{262144}.$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{12}$:

$$\int_0^1 x^9 dx \approx \frac{344904}{12 \cdot 262144} = \frac{344904}{3145728} = \frac{43113}{393216}.$$

A4. Έστω η ευθεία $y = ax + b$. Η συνάρτηση σφάλματος ελαχίστων τετραγώνων είναι

$$E(a, b) = (a + b - 3)^2 + (2a + b - 5)^2 + (3a + b - 6)^2.$$

Παράγωγοι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 2(a + b - 3) + 4(2a + b - 5) + 6(3a + b - 6) = 28a + 12b - 62 = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 2(a + b - 3) + 2(2a + b - 5) + 2(3a + b - 6) = 12a + 6b - 28 = 0. \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$28a + 12b = 62, 12a + 6b = 28 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = \frac{5}{3}.$$

Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}}.$$

A5. Αρχικά παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή:

$$x^3 - 5x^2 + 4x = x(x-1)(x-4)$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x-4)}.$$

Χρησιμοποιώντας μερικές κλασματικές διασπάσεις:

$$\frac{1}{x(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}.$$

Λύνοντας, βρίσκουμε

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{12}.$$

Οπότε

$$\int \frac{1}{4x - 5x^2 + x^3} dx = \int \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{12(x-4)} \right) dx.$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\boxed{\frac{1}{4} \ln |x| - \frac{1}{3} \ln |x-1| + \frac{1}{12} \ln |x-4| + C.}$$

A6. Το σύστημα είναι

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

Από την πρώτη: $2x_2 + 3x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3-3x_3}{2}$.

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη: $-2x_1 + 3\frac{3-3x_3}{2} - x_3 = 1 \Rightarrow -2x_1 + \frac{9-9x_3}{2} - x_3 = 1 \Rightarrow -2x_1 + \frac{9-11x_3}{2} = 1 \Rightarrow -4x_1 + 9 - 11x_3 = 2 \Rightarrow -4x_1 - 11x_3 = -7 \Rightarrow 4x_1 + 11x_3 = 7$.

Από την τρίτη: $4x_1 + x_2 - x_3 = -5 \Rightarrow 4x_1 + \frac{3-3x_3}{2} - x_3 = -5 \Rightarrow 8x_1 + 3 - 3x_3 - 2x_3 = -10 \Rightarrow 8x_1 - 5x_3 = -13 \Rightarrow 8x_1 - 5x_3 = -13$.

Λύνοντας το σύστημα για x_1, x_3 :

$$4x_1 + 11x_3 = 7, 8x_1 - 5x_3 = -13.$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη επί 2: $8x_1 + 22x_3 = 14$. Αφαιρούμε τη δεύτερη: $(8x_1 + 22x_3) - (8x_1 - 5x_3) = 14 - (-13) \Rightarrow 27x_3 = 27 \Rightarrow x_3 = 1$.

Άρα $4x_1 + 11 = 7 \Rightarrow 4x_1 = -4 \Rightarrow x_1 = -1$.

Τέλος $x_2 = \frac{3-3 \cdot 1}{2} = 0$.

Η λύση είναι

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1.$$

A7. Το πεδίο D είναι το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου ακτίνας 2, δηλαδή $x \in [0, 2]$, $y \in [0, (4 - x^2)^{1/2}]$

Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2} \, dx \, dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2} \, dy \right) dx = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{4 - x^2} \, dx = \int_0^2 (4 - x^2) \, dx.$$

Υπολογίζουμε:

$$\int_0^2 (4 - x^2) \, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Άρα

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2} \, dx \, dy = \frac{16}{3}.$$

B1. Ο συνολικός αριθμός δυνατών εκβάσεων με 3 ζάρια είναι $6^3 = 216$.

(α) Θέλουμε $S = x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$. Τα δυνατά αθροίσματα είναι 3, 4, 5.

$$S = 3: (1,1,1) \Rightarrow 1 \text{ τρόπος}, S = 4: (1,1,2) \text{ και μεταθέσεις} \Rightarrow 3 \text{ τρόποι}, S = 5: (1,1,3), (1,2,2) \text{ και μεταθέσεις} \Rightarrow 6 \text{ τρόποι}.$$

Συνολικά 10 ευνοϊκά αποτελέσματα, άρα

$$P(S \leq 5) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}.$$

(β) Δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα ζάρι είναι 1 ή 2, ορίζουμε $B = \{\text{τουλάχιστον ένα ζάρι} \in \{1, 2\}\}$. Θέλουμε

$$P(S \leq 5 \mid B) = \frac{P(S \leq 5 \cap B)}{P(B)}.$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα 10 ευνοϊκά αποτελέσματα για $S \leq 5$ περιλαμβάνουν σίγουρα τουλάχιστον ένα ζάρι 1 ή 2, οπότε $S \leq 5 \subseteq B$ και $P(S \leq 5 \cap B) = P(S \leq 5) = \frac{10}{216}$.

Ο αριθμός των εκβάσεων που δεν ανήκουν σε B είναι αυτές που όλα τα ζάρια είναι ≥ 3 : $4^3 = 64$, άρα $|B| = 216 - 64 = 152$ και

$$P(B) = \frac{152}{216}.$$

Τελικά

$$P(S \leq 5 \mid B) = \frac{10/216}{152/216} = \frac{10}{152} = \frac{5}{76}.$$

Άρα οι πιθανότητες είναι:

$$P(S \leq 5) = \frac{5}{108}, P(S \leq 5 \mid B) = \frac{5}{76}.$$

B2. Η κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 8$ έχει τύπο

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

(α) Ακριβώς 9 πελάτες:

$$P(X = 9) = \frac{e^{-8} 8^9}{9!} \approx 0.124$$

(β) Τουλάχιστον 3 πελάτες:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left(e^{-8} \frac{8^0}{0!} + e^{-8} \frac{8^1}{1!} + e^{-8} \frac{8^2}{2!} \right) \\ &= 1 - e^{-8}(1+8+32) = 1 - 41e^{-8} \approx 0.986 \end{aligned}$$

B3. Έστω $X \sim N(\mu = 19, \sigma^2 = 16)$. Τυποποιούμε με $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$:

$$P(15 < X < 24) = P\left(\frac{15 - 19}{4} < Z < \frac{24 - 19}{4}\right) = P(-1 < Z < 1.25).$$

Από τον πίνακα τυποποιημένης κανονικής κατανομής:

$$P(Z < 1.25) \approx 0.8944, P(Z < -1) \approx 0.1587$$

Άρα

$$P(15 < X < 24) = P(-1 < Z < 1.25) = 0.8944 - 0.1587 = 0.7357 \approx 0.736.$$