

## ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Είχαμε την πείρα  
μας έλειπε το νόημα  
Τ. Έλιοτ

Τα τελευταία χρόνια στο χώρο της έρευνας για την Διδασκαλία και Κατανόηση των Μαθηματικών κερδίζει έδαφος η συζήτηση για τα embodied mathematics, που μπορούμε να το μεταφράσουμε ενσωματωμένα είτε ενσαρκωμένα είτε και σωματοποιημένα είτε σωματικά. Η κάθε μετάφραση έχει τα επιχειρήματά της.

Η ιδέα στην πλήρη ανάδειξή της εμφανίζεται με τις πρόσφατες εργασίες του Lakoff και των συνεργατών του με το περιώνυμο βιβλίο:

Lakoff G. & Núñez E. R. (2000) *Where Mathematics Comes From*, Basic Books, New York, και το οποίο δέχτηκε πολλές κριτικές όπως εκείνη του:

Presmeg G. N. (2002), *Mathematical idea analysis: a science of embodied mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 33, no 1, 2002, pp. 59-63, ενώ εμφανίστηκε ως επικοινωνιακή ιδέα και συζητήθηκε σε εργασίες. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους:

- Boero P. & Bazzini L. & Garutti R, (2001) *Metaphors in teaching and learning Mathematics: A case study concerning inequalities*, International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education CIEAEM 53 Verbania-Italy 21-27 (July),
- Schiralli M. & Sinclair (2003), *A constructive Response to "Where Mathematics comes from"*, Educational Studies of Mathematics, 00: 1-13,
- Drodge N. E. & Reid D. (2000), *Embodied Cognition, Mathematical Emotional Orientation, Mathematical thinking and learning*, 2(4), pp. 249-267, Lawrence Erlbaum Associates,
- Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001), *Relationships between embodied objects and symbolic precepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics*. PME25.
- Edwards L. (1998), *Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representations*, Journal of Mathematical Behaviour 17 (1) pp. 53-78,
- Núñez E. & Edwards L. & Matos J. (1999), *Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education*, Educational Studies of Mathematics, 39, pp. 45 – 65,
- Watson A., (2002). *Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth*. In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), *Proceedings of the 26<sup>th</sup> Conference*

of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 369–376. Norwich: UK,

- Watson & Spyrou & Tall (2003), *The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector*, (in print) in Mediterranean Journal in Mathematics Education 2. Cyprus.

#### PERCEPTUO-MOTOR ACTIVITY AND IMAGINATION IN MATHEMATICS A RESEARCH FORUM (London, 2002)

- Nemirowski R.(Cambridge), *Three Conjectures Concerning the Relationship between Body Activity and Understanding Mathematics*
- Robutti O. & Arzarello F., (Torino), *Approach Algebra through Motion Experiences*
- Schnepf M. & Chazan D.(Maryland), *Incorporating Experiences of Motion into a Calculus Classroom*
- Borba M. & Scheffer N. (Brazil), *Sensors, Body, Technology and Multiple Representations*
- Rasmussen C. (Purdue) & Nemirowski R., *Becoming Friends with Acceleration: The role of Tools and Bodily Activity in Mathematical Learning*

Έτσι σύμφωνα με το Lakoff, ο οποίος συζητά για τα embodied mathematics τουλάχιστον από το 1987,

“τα μαθηματικά βασίζονται σε δομές του εννοιολογικού συστήματος του ανθρώπου τις οποίες δομές χρησιμοποιεί για να αντιληφθεί κατανοήσει την πρωτογενή εμπειρία”

Lakoff G. (1987), *Women, Fire and Dangerous Things*, The University Chicago Press, Chicago, p. 364).

Τα Μαθηματικά του ανθρώπου είναι σωματοποιημένα, εδράζονται στην ανθρώπινη πείρα δεν είναι εντελώς υποκειμενικά ... δεν είναι θέμα απλών κοινωνικών συμβάσεων....

Χρησιμοποιούν άκρως οριοθετιμένες και περιορισμένες πηγές της βιολογίας του ανθρώπου και μορφοποιούνται από την φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων και αφορούν στην ανθρώπινη κοινωνία και τον πολιτισμό.

Lakoff & Núñez ( pp. 351 -365)

Η θεωρία των ενσαρκωμένων μαθηματικών θέτει τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

1. Τα μαθηματικά είναι προϊόν των ανθρώπων. Χρησιμοποιούν τα πολύ περιορισμένα μέσα της ανθρώπινης βιολογίας και σχηματίζονται από τη

φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων, και των ενδιαφερόντων των ανθρώπινων κοινωνιών και πολιτισμών.

2. Τα τμήματα της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας που παράγουν τα ανώτερα μαθηματικά είναι φυσιολογικές γνωστικές ικανότητες των ενηλίκων – λόγου χάρη, η ικανότητα για την εννοιολογική μεταφορά. Τέτοιες γνωστικές ικανότητες είναι κοινές σε όλους τους ανθρώπους. Ως τέτοια, η ικανότητα για μαθηματικά, ακόμη και για τα ανώτερα, είναι καθολική σε ανθρώπινο επίπεδο.

3. Η απλή απαρίθμηση είναι έμφυτη στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Όπως πολλά άλλα θηλαστικά, οι άνθρωποι μπορούν να αναγνωρίσουν άμεσα και με ακρίβεια το πλήθος κάποιων οντοτήτων ενός πολύ μικρού συνόλου. Τούτη είναι σαφώς μια ενσαρκωμένη ικανότητα.

4. Οι θεματικές περιοχές των μαθηματικών – αριθμητική, γεωμετρία, πιθανότητες, απειροστικός λογισμός, θεωρία συνόλων, συνδυαστική, θεωρία παιγνίων, τοπολογία, κλπ – προκύπτουν από ανθρώπινα ενδιαφέροντα και δραστηριότητες: λόγου χάρη, την απαρίθμηση και τη μέτρηση, την αρχιτεκτονική, το χαρτοπαίγνιο, την κίνηση και άλλες μεταβολές, τη συγκέντρωση, το χειρισμό γραπτών συμβόλων, τα παιχνίδια, την επιμήκυνση και το λύγισμα αντικειμένων. Με άλλα λόγια, τα μαθηματικά είναι θεμελιωδώς ένα ανθρώπινο εγχείρημα που προκύπτει από βασικές ανθρώπινες δραστηριότητες.

5. Η μαθηματική πτυχή αυτών των ενδιαφερόντων είναι η ακρίβεια – ακριβή αθροίσματα, μετρήσεις, γωνίες, εκτιμήσεις, ρυθμοί μεταβολής, κατηγοριοποιήσεις, πράξεις, κοκ. Η ακρίβεια καθίσταται εφικτή επειδή οι άνθρωποι μπορούν να πραγματοποιούν πολύ σαφείς και ακριβείς διακρίσεις μεταξύ αντικειμένων και κατηγοριών υπό συγκεκριμένες συνθήκες και μπορούν να σταθεροποιήσουν στο νου τους και να θυμηθούν με συνέπεια αφηρημένες οντότητες όπως οι αριθμοί και τα σχήματα.

6. Η ακρίβεια ενισχύεται σημαντικά από την ανθρώπινη ικανότητα του συμβολισμού. Μπορούν να επινοηθούν σύμβολα για την παράσταση μαθηματικών ιδεών, οντοτήτων, πράξεων και σχέσεων. Τα σύμβολα επιτρέπουν επίσης ακριβείς και με δυνατότητα επανάληψης υπολογισμούς.

7. Η εννοιολογική μεταφορά είναι ένας νευρικά ενσαρκωμένος θεμελιώδης γνωστικός μηχανισμός που μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τη συμπερασματολογική δομή μιας περιοχής ώστε να εκτελέσουμε συλλογισμούς για μια άλλη. Επιτρέπει στους μαθηματικούς να μεταφέρουν σε μια περιοχή των μαθηματικών τις ιδέες και τις μεθόδους ακριβούς υπολογισμού μιας άλλης περιοχής.

8. Μόλις εδραιωθούν μέσα σε μια κοινότητα μαθηματικών, τα μαθηματικά συμπεράσματα και οι υπολογισμοί για μια δεδομένη

θεματική περιοχή τείνουν να μη μεταβάλλονται ούτε χρονικά ούτε χωρικά ούτε πολιτισμικά. Η σταθερότητα των ενσαρκωμένων μαθηματικών είναι μια συνέπεια του γεγονότος ότι όλοι οι φυσιολογικοί άνθρωποι έχουν τις ίδιες σχετικές πτυχές εγκεφαλικής και σωματικής δομής και τις ίδιες σχετικές σχέσεις με το περιβάλλον που εισέρχονται στα μαθηματικά.

9. Τα μαθηματικά δεν είναι μονολιθικά στη γενική θεματική περιοχή τους. Δεν υπάρχει η γεωμετρία, η θεωρία συνόλων ή η τυπική λογική. Αντίθετα, υπάρχουν αμοιβαία ασυνεπείς εκδοχές γεωμετρίας, θεωρίας συνόλων, λογικής κοκ. Κάθε εκδοχή σχηματίζει μια διακεκριμένη και εσωτερικά συνεπή θεματική περιοχή.

10. Τα μαθηματικά είναι αποτελεσματικά στο χαρακτηρισμό και την πραγματοποίηση προβλέψεων για ορισμένες πτυχές του πραγματικού κόσμου όπως τον βιώνουμε. Έχουμε εξελιχθεί έτσι ώστε η καθημερινή γνωστική μας λειτουργία να μπορεί, γενικά, να εναρμονιστεί με τον κόσμο όπως τον βιώνουμε. Τα μαθηματικά είναι μια συστηματική επέκταση των μηχανισμών της καθημερινής γνωστικής λειτουργίας. Οποιαδήποτε εναρμόνιση των μαθηματικών με τον κόσμο διαμεσολαβείται και καθίσταται εφικτή από τις ανθρώπινες γνωστικές ικανότητες. Κάθε τέτοια «εναρμόνιση» εμφανίζεται στον ανθρώπινο νου, όπου γνωρίζουμε και τον κόσμο και τα μαθηματικά.

Η θεωρία των ενσαρκωμένων μαθηματικών σκοπεύει να αντιμετωπίσει το κύριο πρόβλημα της επιστημολογίας των μαθηματικών που αφορά το ζήτημα των πηγών της έγκυρης και καθολικής γνώσης, ένα πρόβλημα που ξεκινά από τον πλατωνισμό και ο Lakoff (1987, σελ. 364) προτείνει την απομυθοποίησή του. Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει και για τον Piaget J. (1972), *The principles of Genetic Epistemology*, Routledge, σελ. 69.

Η επιστημολογία των μαθηματικών έχει τρεις αρχικά και κλασσικά προβλήματα:

- 1) Γιατί τα μαθηματικά είναι τόσο αποδοτικά παρόλο που στηρίζονται σε ελάχιστες και σχετικά φτωχές έννοιες ή αξιώματα;
- 2) Γιατί έχουν αναγκαίο (και καθολικό) χαρακτήρα, και παραμένουν σταθερά αυστηρά σε αντίθεση με τον κατασκευαστικό τους χαρακτήρα που μπορεί να αποτελέσει και πηγή ανωμαλιών;
- 3) και γιατί συμφωνούν τόσο πολύ με πείρα μας ή την φυσική πραγματικότητα σε αντίθεση με τον απόλυτο παραγωγικό τους χαρακτήρα;

Οι Lakoff και Núñez, εκφράζοντας την παράδοση του ευρύτερου αναγωγισμού και της φαινομενολογικής παράδοσης (Merlau-Ponty 1955, DiSessa, 1983, Maturana-Varela 1987, κ.ά.), έχουν ως θέση τους ότι η

λεπτομερής φύση των σωμάτων μας, των εγκεφάλων και της καθημερινής μας λειτουργίας στον κόσμο δομεί τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη συλλογιστική.

Κατά μείζονα λόγο, οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται τις αφηρημένες έννοιες με απτό τρόπο, χρησιμοποιώντας ιδέες και τρόπους συλλογισμού θεμελιωμένους στο αισθησιο-κινητικό (sensory-motor) σύστημα.

Ο μηχανισμός με τον οποίο κατανοείται το αφηρημένο μέσω του απτού ονομάζεται εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor).

Ο όρος 'ενσωμάτωση' (embodiment) χρησιμοποιείται με πλήθος διαφορετικών τρόπων στη σύγχρονη γνωστική επιστήμη, κι αυτές οι ποικίλες χρήσεις αντανακλούν κατά περιόδους θεμελιώδεις θεωρητικές διαφορές.

Varelas F. & Thompson E. & Rosh E. (1999), *The Embodied Mind*, MIT, Cambridge, Massachusetts.

Seitz A. J. (2000), *The bodily Basis of Thought*, *New Ideas in Psychology*, 18 (1), 23-40.

### Λειτουργικός δυϊσμός

Είναι η θεωρία που πιστεύει ότι οι νοητικές λειτουργίες πρέπει να κατανοούνται μέσα σε ένα πλαίσιο που δεν συνδέει το νου με κάποιες υλικές διεργασίες.

Επίσης οι αναγωγικές θεωρίες (μη Καρτεσιανές και μονιστικές) παραδέχονται την ενότητα του σώματος και του πνεύματος, δηλαδή την αναγωγή των πνευματικών φαινομένων στις φυσικές λειτουργίες του πνεύματος.

Μια εκδοχή του αναγωγισμού είναι εκείνη του ανώμαλου μονισμού που έχει τις ρίζες του στον Kant ενώ σήμερα, στο πλαίσιο της φιλοσοφίας του νου, εκπροσωπείται κυρίως από τον Donald Davidson. Δηλαδή, ενώ είναι καταρχήν ένας μονισμός θεωρεί ότι «για τη φύση των πνευματικών φαινομένων ότι διαμορφώνονται σε ένα επίπεδο *a priori* και συνιστούν δεσμευτικές κανονικότητες που συνδέουν τα πνευματικά φαινόμενα με φυσικά συμβάντα του εγκεφάλου, και, δίχως τέτοιους νόμους, δεν υπάρχει ρεαλιστική ελπίδα εξήγησης του νοητού δια μέσου των φυσικών δομών του εγκεφάλου.»

(Σελ. 122, *Anomalous Monism*, Samuel Guttenplan (editor, 2000), *A Companion to the Philosophy of Mind*, Blackwell Companions to Philosophy).

Οι Lakoff και Núñez ξεκαθαρίζουν πρώτα ένα πεδίο συνθηκών που προηγούνται των μαθηματικών και είναι η βιωματική σταθεροποίηση των λογικών αρχών ως αποτέλεσμα γλωσσικών μεταφορών, σχέσεων που αφορούν σχέσεις χωρικές του περιέχειν, δράσεις στο φυσικό και κοινωνικό περιβάλλον και της Βασικής Μεταφοράς του Απείρου, ως μιας νοητικής προέκτασης των επαναλαμβανόμενων διαδικασιών.

Η αντίληψη αυτή δεν διαφέρει της Αριστοτελικής ή της Καντιανής για το δυνητικό άπειρο.

Lakoff G. & Johnson M. (1980), *Metaphors We live by*, The University of Chicago Press, Chicago. Rosh, E (1978). *Principles of categorization*, In E. Rosh & B. Loyd (Eds). *Cognition and categorization* (pp. 27-48). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

---

Οι λιθιές και τα κύματα χέρι με χέρι  
 μια πατούσα που σύναξε σοφία στην άμμο  
 ένας τζίτζικας που έπεισε χιλιάδες άλλους  
 η συνείδηση πάμφωτη σαν καλοκαίρι...

Ἀξιον Εστί



## Ποια είναι η προέλευση των Μαθηματικών;

Οι Lakoff και Núñez αναφέρουν:

Τα ανθρώπινα μαθηματικά δεν είναι το είδωλο κάποιων μαθηματικών που υπάρχουν εξωτερικά προς τους ανθρώπους.

Δεν είναι ούτε υπερβατικά ούτε μέρος του φυσικού σύμπαντος. Αλλά υπάρχουν εξαιρετικοί λόγοι για τους οποίους τόσοι άνθρωποι, συμπεριλαμβανομένων και επαγγελματιών μαθηματικών, θεωρούν ότι τα

μαθηματικά δεν έχουν ανεξάρτητη, αντικειμενική, εξωτερική ύπαρξη. Οι ιδιότητες των μαθηματικών είναι, κατά πολλούς τρόπους, ιδιότητες που κάποιος θα ανέμενε από τις λαϊκές μας θεωρίες για τα εξωτερικά αντικείμενα. Ο λόγος είναι ότι βασίζονται μεταφορικά στην εμπειρία που έχουμε από τα εξωτερικά αντικείμενα και στις εμπειρίες:

- ΔΟΧΕΙΩΝ: οι μορφές του συλλογισμού «από αυτό βγαίνει εκείνο»
- ΣΥΝΕΧΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ: μορφή συλλογισμού «από εδώ πάω εκεί»
- ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΟΙΚΟΔΟΜΗΣ: μορφή συλλογισμού «αυτό στηρίζεται σε αυτό»
- ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΜΑΧΗΣ: στρατηγικές συλλογισμού
- ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ
- ΥΠΕΡΑΣΠΙΣΗΣ ΣΕ ΔΙΚΑΣΤΗΡΙΟ: τεχνική υπεράσπισης, μαιευτική

Σαφής είναι η αντίκρουση της αντίληψης ότι τα μαθηματικά υπάρχουν εξωτερικά ως μέρος του φυσικού σύμπαντος, όπως αυτή εμφανίζεται από την άποψη ότι η διατύπωση των φυσικών νόμων μέσω των μαθηματικών υποδεικνύει ότι τα χρησιμοποιούμενα μαθηματικά προϋπάρχουν στο φυσικό σύμπαν.

Το αντεπιχείρημα των Lakoff και Núñez είναι ότι κανείς δεν παρατηρεί τους νόμους του σύμπαντος ως τέτοιους, αλλά εκείνο που παρατηρείται είναι οι κανονικότητες του σύμπαντος, οι οποίες υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς. Οι νόμοι είναι μαθηματικές προτάσεις κατασκευασμένες από ανθρώπους στην προσπάθεια χαρακτηρισμού των εν λόγω κανονικοτήτων που βιώνονται στο φυσικό σύμπαν.

Κεντρική θέση της θεωρίας των ενσαρκωμένων μαθηματικών είναι ότι η μόνη πρόσβαση που έχουμε στα μαθηματικά είναι μέσω εννοιών του νου μας οι οποίες μορφοποιούνται από τα σώματά μας και γίνονται φυσικά αντιληπτές από το νευρικό μας σύστημα. Τα μόνα μαθηματικά που μπορούμε να γνωρίζουμε είναι τα μαθηματικά που το σώμα μας και ο εγκέφαλός μας επιτρέπουν να γνωρίζουμε.

Κατά τον Lakoff η σκέψη είναι ενσωματωμένη, δηλαδή, οι δομές που χρησιμοποιούνται για τη συναρμολόγηση των εννοιολογικών μας συστημάτων αναφύονται από τη σωματική μας εμπειρία και αποκτούν νόημα μέσω αυτής. Επιπλέον, ο πυρήνας των εννοιολογικών μας συστημάτων είναι άμεσα θεμελιωμένος στην αντίληψη, τη σωματική κίνηση και την εμπειρία φυσικού και κοινωνικού χαρακτήρα.

Σύμφωνα με τους Lakoff και Núñez μερικές βασικές ιδιότητες εξωτερικών αντικειμένων όπως τα βιώνουμε στην καθημερινή μας ζωή και οι οποίες εφαρμόζονται και στα μαθηματικά είναι οι εξής:



- *Καθολικότητα*: ακριβώς όπως τα εξωτερικά αντικείμενα τείνουν να είναι ίδια για όλους, έτσι και τα βασικά μαθηματικά είναι, εν γένει, τα ίδια διαμέσου των πολιτισμών. Δύο συν δύο κάνει πάντα τέσσερα, ανεξάρτητα από τον πολιτισμό.
- *Ακρίβεια*: στον κόσμο των φυσικών άμεσα αναγνωρίσιμου πλήθους (subitizable) αντικειμένων, δύο αντικείμενα είναι δύο αντικείμενα, ούτε τρία ούτε ένα. Ως επέκταση αυτού, αν δοθεί ένα σακί με χρυσά νομίσματα υπάρχει ακριβής απάντηση στο ερώτημα του πόσα νομίσματα περιέχονται σ' αυτό.
- *Συνέπεια για κάθε δοθείσα θεματική περιοχή*: ο φυσικός κόσμος όπως τον βιώνουμε κανονικά είναι συνεπής. Ένα δεδομένο βιβλίο δε βρίσκεται ταυτόχρονα πάνω στο γραφείο και όχι πάνω στο γραφείο.
- *Σταθερότητα*: τα βασικά φυσικά γεγονότα, δηλαδή συγκεκριμένες εμφανίσεις σε δεδομένο χρόνο και τόπο – δε μεταβάλλονται. Είναι χρονικά σταθερά. Αν υπήρχε ένα βιβλίο πάνω στο τραπέζι στις 10:00 σήμερα το πρωί, ιστορικά θα ισχύει πάντα το ίδιο, ότι δηλαδή υπήρχε ένα βιβλίο πάνω στο γραφείο στις 10:00 το πρωί.
- *Γενικευσιμότητα*: υπάρχουν βασικές ιδιότητες των δέντρων που γενικεύονται σε νέα δέντρα τα οποία δεν έχουμε συναντήσει, ιδιότητες πουλιών που γενικεύονται σε πουλιά που δεν έχουν γεννηθεί ακόμη, κοκ.
- *Ανακαλυψιμότητα*: γεγονότα που αφορούν αντικείμενα του κόσμου μπορούν να ανακαλυφθούν. Αν υπάρχει ένα μήλο στη μηλιά της αυλής, μπορούμε να ανακαλύψουμε ότι το μήλο βρίσκεται εκεί.

## Η Χρυσή Τομή

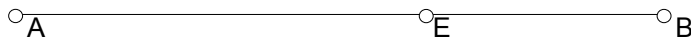
Τόσο εύλογο το Ακατανόητο

Αξιον εστί

Η αρχή γίνεται με τη διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο.

Δηλαδή,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} \quad (1)$$



Αυτή η διαίρεση του ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται χρυσή τομή. Το πηλίκο  $AB/AE$  ονομάζεται χρυσός λόγος, είναι άρρητος αριθμός με τιμή 1,618... και συμβολίζεται συχνά με το γράμμα  $\Phi$ . Κατά προσέγγιση, τα δύο τμήματα που προκύπτουν έχουν ποσοστιαία αναλογία 62% και 38% του μήκους του αρχικού τμήματος, αντίστοιχα.

Υπολογισμός του  $\Phi$   
Αλγεβρική αναπαράσταση

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AB - AE} \Leftrightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{1}{\frac{AB}{AE} - 1}.$$

Θέτοντας  $\frac{AB}{AE} = \Phi$ , η σχέση δίνει την αλγεβρική εξίσωση:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad (2)$$

η θετική ρίζα της οποίας είναι:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Η σχέση (2) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \quad (3)$$

ή

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \quad (4)$$

Η σχέση (4) δηλώνει ότι ο αντίστροφος του  $\Phi$  προκύπτει αν από το  $\Phi$  αφαιρεθεί η μονάδα. Ο χρυσός λόγος είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός που έχει αυτή την ιδιότητα.

Η χρυσή τομή και οι συσχετιζόμενοι με αυτήν αριθμοί Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) διέπουν την ιστορία της τέχνης. Παραδείγματα γνωστών έργων που παρουσιάζουν την εν λόγω αναλογία είναι οι Πυραμίδες της Αιγύπτου, ο Παρθενών, τα αρχαιοελληνικά γλυπτά, η Mona Lisa του Leonardo Da Vinci, πίνακες του Ραφαήλ, η μουσική του Beethoven και του Mozart κλπ..

Η χρυσή τομή είναι μαθηματική έννοια και ως τέτοια η ανάλυσή της αποτελεί επιστημονικό πρόβλημα. Αλλά αποτελεί και κριτήριο Αρμονίας και Ομορφιάς και τούτο την εντάσσει στο πεδίο της Τέχνης και της Αισθητικής. Ο Johannes Kepler είχε πει ότι η γεωμετρία έχει δύο θησαυρούς: το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τη Χρυσή Τομή. Το πρώτο μπορεί να συγκριθεί με μια ποσότητα χρυσού και το δεύτερο μπορεί να ονομαστεί πολύτιμο πετράδι.

Παράσταση του Χρυσού λόγου  
με τη μορφή συνεχούς κλάσματος

Αν στο δεξί μέλος της σχέσης (3) αντικαταστήσουμε το  $\Phi$  με το ίσο του, όπως δίνεται από την (3), έχουμε την παράσταση:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \quad (5)$$

και αν συνεχίσουμε την αντικατάσταση προκύπτει το συνεχές κλάσμα:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}} \quad (6)$$

Παράσταση του Χρυσού λόγου με ριζικά

Επειδή  $\Phi > 0$ , η σχέση (2) δίνει:

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi} \quad (7)$$

και αν αντικαταστήσουμε το  $\Phi$  στο δεξί μέλος με το ίσο του, όπως δίνεται από την (7), έχουμε τη μορφή:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} \quad (8)$$

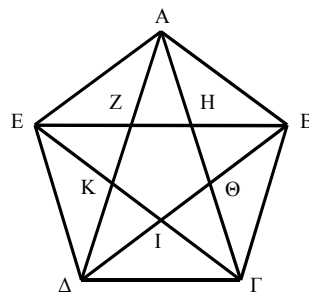
και με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (9)$$

### Το κανονικό πεντάγωνο και ο Χρυσός λόγος Γεωμετρική αναπαράσταση

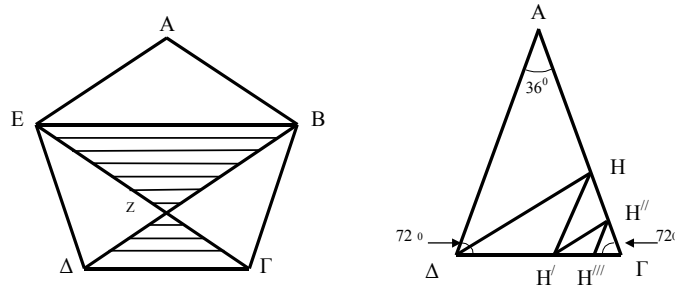
Η χρυσή τομή χρησιμοποιείται ευρύτατα στη γεωμετρία. Το κανονικό πεντάγωνο διέπεται από τη χρυσή τομή. Οι διαγωνιοί του διαιρούνται σε χρυσό λόγο δύο φορές.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση μπορούμε να αποδείξουμε ότι στο κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ τα σημεία Ζ, Η, Θ, Ι, Κ τομής των διαγωνίων τις διαιρούν σε χρυσή τομή και σχηματίζουν κανονικό πεντάγωνο, το ΖΗΘΙΚ.



Το κανονικό πεντάγωνο περικλείει ένα πλήθος όμορφων σχημάτων τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως σε έργα τέχνης. Στην αρχαία Ελλάδα και Αίγυπτο ήταν γνωστός ο νόμος του «χρυσού ποτηριού». Χρησιμοποιούνταν από αρχιτέκτονες και χρυσοχόους. Αν σχεδιάσουμε τις διαγωνίους ΒΕ, ΒΔ και ΕΓ στο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, το γραμμοσκιασμένο τμήμα παίρνει τη μορφή ενός ποτηριού, το οποίο μπορεί να εκφραστεί μέσω των ακόλουθων λόγων:

$$\frac{EZ}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{EZ} = \frac{EB}{\Delta\Gamma} = \Phi$$

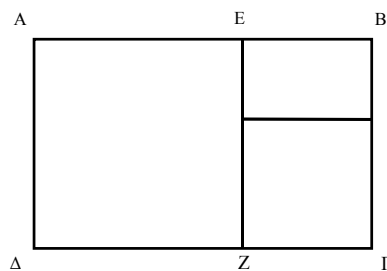


Το «χρυσό ποτήρι» και το «χρυσό τρίγωνο»

Υπάρχει και ένα άλλο κομψό σχήμα μέσα στο πεντάγωνο. Είναι το «χρυσό τρίγωνο», το  $\Delta\Gamma\Theta$  λόγω χάρη, του οποίου η βάση είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου. Το τρίγωνο έχει τη γωνία της κορυφής  $\Theta$  ίση με  $36^\circ$  και τις γωνίες της βάσης ίσες με  $72^\circ$  καθεμιά. Οι Πυθαγόρειοι είχαν ενθουσιαστεί έντονα από το γεγονός ότι η διχοτόμος  $\Delta\Theta$  της γωνίας  $\Delta$  συμπίπτει με τη διαγώνιο  $\Delta\Gamma$  του κανονικού πενταγώνου και το σημείο  $\Theta$  διαιρεί την πλευρά  $\Delta\Gamma$  σε χρυσή τομή. Οπότε εμφανίζεται το νέο μικρότερο χρυσό τρίγωνο  $\Delta\Theta\Gamma$ . Αν φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Theta$  που τέμνει την  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $\Theta'$ , κατόπιν τη διχοτόμο της γωνίας  $\Theta'$  που τέμνει την  $\Delta\Gamma$  στο  $\Theta''$  και συνεχίσουμε επ' άπειρον τη διαδικασία, παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία χρυσών τριγώνων.

Το «χρυσό ορθογώνιο»

Η ίδια ιδιότητα είναι εγγενής στο χρυσό ορθογώνιο  $\Delta\Gamma\Theta\Delta$  που έχει το λόγο των πλευρών του  $\Delta\Gamma : \Delta\Theta$  ίσο με το χρυσό λόγο.



Κατασκευάζοντας το τετράγωνο  $\Delta\Theta\Gamma\Delta$  μέσα στο ορθογώνιο  $\Delta\Gamma\Theta\Delta$  παίρνουμε το νέο χρυσό ορθογώνιο  $\Delta\Theta\Gamma\Delta$ , του οποίου ο λόγος των πλευρών

ΕΖ:ΕΒ ισούνται με το χρυσό λόγο. Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία επ' άπειρον παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία τετραγώνων και των αντίστοιχων χρυσών ορθογωνίων.

### Η «χρυσή έλικά»

Η έλικά είναι μια επίπεδη καμπύλη που προκύπτει από ένα σημείο που απομακρύνεται σύμφωνα με έναν ορισμένο κανόνα από την αρχή μιας ημιευθείας και περιστρέφεται ομαλά γύρω από την αρχή. Αν θεωρήσουμε ως αρχή τον πόλο του συστήματος πολικών συντεταγμένων, τότε μαθηματικά η έλικά μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια κάποιας πολικής εξίσωσης  $\rho=f(\phi)$ , όπου  $\rho$  είναι η διανυσματική ακτίνα της έλικας,  $\phi$  είναι η γωνία που διαγράφεται γύρω από τον πολικό άξονα και  $f(\phi)$  είναι μια μονότονη – αύξουσα ή φθίνουσα – θετική συνάρτηση. Όταν το σημείο απομακρύνεται από την αρχή ομαλά ( $\rho=\alpha\phi$ ,  $\alpha>0$ ) τότε έχουμε την έλικά του Αρχιμήδη. Αν το σημείο απομακρύνεται σύμφωνα με τον εκθετικό νόμο ( $\rho=a e^{k\phi}$   $\alpha>0$ ) τότε έχουμε την ισογώνια έλικά. Η ισογώνια έλικά έχει δύο ενδιαφέρουσες ιδιότητες:

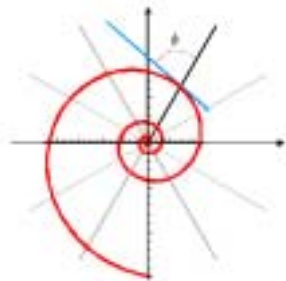
1. Η διανυσματική ακτίνα  $\rho$  και η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της έλικας σχηματίζουν μια σταθερή γωνία  $\phi$ . Δηλαδή η καμπύλη τέμνει όλες τις ημιευθείες που ξεκινούν από τον πόλο  $O$  σχηματίζοντας ίσες γωνίες.
2. Η ισογώνια έλικά αποσυντίθεται σε μια ευθεία και σε μια περιφέρεια για τις τιμές  $0^\circ$  και  $90^\circ$ , αντίστοιχα, της γωνίας  $\phi$ . Τούτο σημαίνει ότι η έλικά έχει και τις ιδιότητες της ευθείας και τις ιδιότητες της περιφέρειας.

Η σχέση της ισογώνιας έλικας με τη χρυσή τομή και τους αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci εξηγείται ως εξής: Ξεκινώντας από ένα χρυσό ορθογώνιο μήκους  $\Phi$  και ύψους 1, δημιουργείται μια φυσική ακολουθία εμπεριεχομένων χρυσών ορθογωνίων που προκύπτουν από την αφαίρεση του αριστερού τετραγώνου από το πρώτο ορθογώνιο, του άνω τετραγώνου από το δεύτερο ορθογώνιο κ.ο.κ. Το μήκος και το ύψος του  $n$ -οστού χρυσού ορθογωνίου μπορούν να γραφούν ως γραμμικές εκφράσεις  $\alpha+\beta\Phi$ , όπου οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  είναι πάντα αριθμοί Fibonacci, άρα συνδέονται με τη χρυσή τομή.



Αν ως αρχή της χρυσής έλικας επιλέξουμε το σημείο στο οποίο συγκλίνουν διαδοχικά τα χρυσά ορθογώνια, η χρυσή έλικα θα περάσει από τις τρεις από τις τέσσερις κορυφές καθενός από τα χρυσά ορθογώνια που κατασκευάζονται διαδοχικά. Δηλαδή, η χρυσή έλικα περιγράφεται στο χρυσό ορθογώνιο.

Κάθε ισογώνια έλικα παριστάνει το σχήμα της αύξησης ή της μείωσης και μπορεί να εκφραστεί μέσω γεωμετρικής προόδου. Εδώ βρίσκεται ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον σημείο της χρυσής ισογώνιας έλικας. Σ' αυτή την έλικα οι όροι της γεωμετρικής προόδου που αντιστοιχεί στην έλικα είναι οι δυνάμεις του χρυσού λόγου:  $\Phi^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ). Μια τέτοια έλικα έχει την ιδιότητα ότι η αντίστοιχέ της γεωμετρική πρόοδος είναι ταυτόχρονα και αριθμητική. Τούτο σημαίνει ότι η εκθετική της αύξηση δίνεται από απλή άθροιση δύο διαδοχικών όρων.



Η ισογώνια έλικα

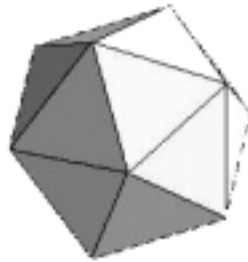
Κατά τη γνώμη πολλών ερευνητών, αυτή η αξιοσημείωτη ιδιότητα μας επιτρέπει να εξηγήσουμε πολλά φαινόμενα στη βοτανολογία και τη βιολογία.

#### Το κανονικό δωδεκάεδρο και το κανονικό εικοσάεδρο

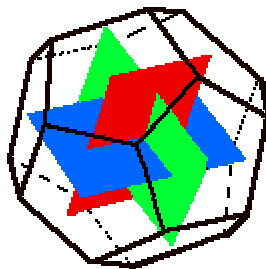
Η χρυσή τομή συνδέεται στενά με τα Πλατωνικά στερεά, και ιδιαίτερα με το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο. Το δωδεκάεδρο έχει 12 έδρες, 30 ακμές και 20 κορυφές. Κάθε έδρα του δωδεκάεδρου είναι κανονικό πεντάγωνο και έχει πέντε επίπεδες γωνίες. Οπότε το συνολικό πλήθος των επίπεδων γωνιών του δωδεκάεδρου είναι  $5 \times 12 = 60$ . Αφ' ετέρου,  $3 \times 20 = 60$ . Το τελευταίο σημαίνει ότι τρεις γειτονικές επίπεδες γωνίες συγκλίνουν σε κάθε κορυφή του εικοσαέδρου. Τέλος, το πλήθος των εδρών πολλαπλασιασμένο επί το πλήθος των ακμών δίνει 360.



Το εικοσάεδρο έχει 20 έδρες, καθεμιά από τις οποίες είναι ισόπλευρο τρίγωνο, 30 ακμές και 12 κορυφές. Το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο έχουν το ίδιο πλήθος ακμών, ενώ το πλήθος εδρών του εικοσαέδρου ισούται με το πλήθος κορυφών του δωδεκαέδρου και το πλήθος κορυφών του εικοσαέδρου ισούται με το πλήθος εδρών του δωδεκαέδρου. Καθώς σε κάθε κορυφή του εικοσαέδρου συγκλίνουν πέντε επίπεδες γωνίες, το συνολικό πλήθος επίπεδων γωνιών του είναι  $5 \times 12 = 60$  και το γινόμενο του πλήθους ακμών επί το πλήθος κορυφών ισούται με 360. Το εικοσάεδρο έχει επίσης σχέση με το κανονικό πεντάγωνο και, επομένως, με το χρυσό λόγο επειδή οι εξωτερικές ακμές των πέντε γειτονικών τριγώνων που συγκλίνουν σε κάθε κορυφή κατασκευάζουν ένα κανονικό πεντάγωνο.

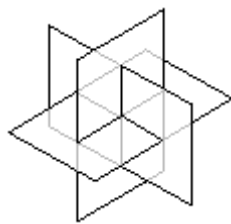


Υπάρχουν δύο σημαντικές σχέσεις μεταξύ του δωδεκαέδρου και του εικοσαέδρου. Η πρώτη είναι ότι τα κέντρα των εδρών του δωδεκαέδρου ορίζουν τις κορυφές εικοσαέδρου και τα κέντρα των εδρών του εικοσαέδρου ορίζουν τις κορυφές δωδεκαέδρου. Αν συνδέσουμε τα κέντρα των εδρών του δωδεκαέδρου μπορούμε να πάρουμε τρία ορθογώνια που τέμνονται στο χώρο κατά ορθές γωνίες.

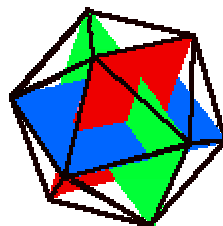


Το σημαντικό είναι ότι τα ορθογώνια αυτά έχουν λόγο πλευρών ίσο με  $\Phi$ .





Το ίδιο συμβαίνει αν ενώσουμε τις κορυφές του εικοσαέδρου.



## Η ΓΕΝΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

- Derrida J. (1962), "Introduction" à *Edmund Husserl*, L' Origin de la géométrie. Paris. Eng. Trans. J. P. Leavey. Stony Brook, NY, 1978.
- E. Husserl (1982), *Logical Investigations*, Routledge & Kegan Paul, London.
- E. Husserl (1998), *The Crisis of the European Sciences and Transcendental Phenomenology*, Northeastern University Press, Evanston.

Η Γεωμετρία και οι στενά με αυτή συνδεδεμένες επιστήμες έχουν να κάνουν με τις μορφές, τα σχήματα, μορφές κίνησης, εναλλαγές μεταμορφώσεων, κλπ., που είναι πιθανές σε χώρο και χρόνο, ιδιαίτερα ως μετρούμενα μεγέθη.

Είναι τώρα σαφές καθόσον δεν γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα για τον ιστορικό περιβάλλοντα κόσμο των πρώτων γεωμετρών, ότι αυτό σίγουρα είναι βέβαιο ως αναλλοίωτη, ουσιαστική δομή:

Ότι ο κόσμος ήταν ένας κόσμος 'πραγμάτων' (περιλαμβανομένων και των ανθρώπινων υπάρξεων καθ'αυτών ως υποκειμένων αυτού του κόσμου) και ότι όλα αυτά τα πράγματα αναγκαστικά έπρεπε να έχουν ένα σωματικό χαρακτήρα – αν και δεν μπορεί όλα τα πράγματα να είναι απλά σώματα, αφού η αναγκαστική συνύπαρξη των σκεπτόμενων ανθρώπινων υπάρξεων ως απλά σωμάτων, όπως ακόμη όλα τα πολιτιστικά αντικείμενα τα οποία ανήκουν δομικά με αυτά, δεν εξαντλούνται στην σωματική τους ύπαρξη.

E. Husserl (1999, p 375).

Grenander Ulf, (1997), P. Nation, Acad. Sci. USA, February, pp. 783-789.

Από τη ΓΕΝΕΣΗ του Οδυσσέα Ελύτη

Ακόμη χλωρός μες την φωτιά ο Αχειροποίητος  
με το δάκτυλο έσυρε τις μακρινές  
γραμμές  
ανεβαίνοντας κάποτε ψηλά με οξύτητα  
και φορές πιο χαμηλά οι καμπύλες απαλές  
μία μέσα στην άλλη...  
...  
Αρετή με τις τέσσερις ορθές γωνίες..  
...  
και πολλά μέλλει να μάθεις  
αν το Ασήμαντο εμβαθύνεις  
...  
Τι το καλό; τι το κακό;  
-Ένα σημείο Ένα σημείο  
και σ' αυτό μπορείς απέραντα να προχωρήσεις  
ή αλλιώς τίποτε άλλο δεν υπάρχει  
...  
που η σκέψη του Άλλου  
διαγώνια σαν ακμή γυαλιού  
και Ορθόν ως πέρα με χάραξε  
...  
ορμαθός και αριθμός των άκρων του σταυρού  
της Τετρακτίδος.  
...  
και πλατύς επάνου ο ουρανός  
για να διαβάξεις μόνος σου την απεραντοσύνη.

**Αντικειμενικοποίηση ή εξαντικειμενίκευση (objectification)**

*But to make an object of something, to make it a subject of a predication or attributions, merely differs in name from having a presentation of it, and having a presentation in a sense which, while not the only one, is none the less the standard one for logic.*

(Husserl, Logical Investigation II, p. 366)

(Πρόκειται για τον αριθμό τέσσερα,... ή κάποιο άλλο ιδεατό αντικείμενο...) Ωστόσο, το να εξαντικειμενικούμε κάτι, να του αποδίδουμε κατηγορήματα και να του προσγράψουμε γνωρίσματα είναι απλώς ένας άλλος τρόπος έκφρασης για το ότι έχουμε παράσταση' και μάλιστα 'παράσταση' υπό μια έννοια βασική (αν και όχι την μοναδική) για τη λογική.

*Οι μαθηματικές οντότητες δεν μπορούν να υπάρξουν υλικά, να υλοποιηθούν (materialized), αφού κάποιος δεν μπορεί να αγγίξει, ας πούμε μια άπειρη σειρά ή ένα σύνολο αρτίων...*

Lakoff & Núñez (Σελ 218)

---