

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
658. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με $2 + \frac{1}{2}$ μονάδες.

- I. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς την ευστάθεια το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^2, \\ y' = -y, \end{cases} \quad (1)$$

και να σχεδιάσετε το διάγραμμα διακλάδωσης για το σύστημα αυτό στο μx -επίπεδο.

- II. Θεωρούμε τον φυσικό νόμο της μορφής $f(Q, d, v, p, m) = 0$. Μια κατάλληλη επιλογή θεμελιωδών μεγεθών είναι οι ποσότητες μήκος (L), χρόνος (T) και μάζα (M), μέσω των οποίων έχουμε $[Q] = ML^{-1}T^2$, $[d] = L$, $[v] = LT^{-1}$, $[p] = ML^{-3}$, $[m] = M$. Να βρεθεί ένας ισοδύναμος φυσικός νόμος που συσχετίζει κατάλληλες αδιάστατες ποσότητες και να εκφραστεί η ποσότητα Q μέσω του νόμου αυτού.

- III. Επαληθεύστε την ακόλουθη προσέγγιση για μεγάλες τιμές του λ :

$$\int_0^\infty \ln(1+t^2) e^{-\lambda t} dt \sim \frac{2!}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^5}\right), \quad \lambda \gg 1.$$

- IV. Να βρεθεί μια προσέγγιση διαταραχών δύο όρων για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' + y = \varepsilon y(1 - y'^2), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

με χρήση της μεθόδου Poincaré-Lindstedt.

(Δίνεται η σχέση: $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.)