

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
658. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

- I. 4M Η θερμοκρασία $y(t)$ μιας χημικής ουσίας μέσα σε έναν κλίβανο κατά τη χρονική στιγμή t πληροί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = qe^{-b/y} - k(y - y_f), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

όπου y_0 είναι η αρχική θερμοκρασία της ουσίας, y_f η θερμοκρασία του κλιβάνου και q, k, b είναι θετικές σταθερές.

- i. Να προσδιορίσετε τις διαστάσεις των σταθερών q, k και b .
- ii. Θεωρούμε τον φυσικό νόμο της μορφής $f(q, k, b, y_f) = 0$. Να βρείτε έναν ισοδύναμο φυσικό νόμο που συσχετίζει κατάλληλες αδιάστατες ποσότητες (για τις οποίες να επαληθεύσετε ότι είναι αδιάστατες) και να εκφράσετε την ποσότητα y_f μέσω του νόμου αυτού.
- iii. Να γράψετε το πρόβλημα σε αδιάστατη μορφή. Ως θερμοκρασία αναφοράς χρησιμοποιήστε τον y_f και ως χρόνο αναφορά το y_f/q .
- iv. Να προσδιορίσετε τα σημεία ισορροπίας του αδιάστατου προβλήματος για $q = 12, k = 1, y_f = 2$ και $b = 0$ και επιχειρήσετε τον χαρακτηρισμό της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας του προβλήματος.

- II. 1.5M Θεωρούμε το μοντέλο

$$y'' + dy'^3 + ky = 0, \quad (2)$$

όπου $d > 0, k > 0$. Να αποδείξετε ότι

$$V(y, y') = \frac{1}{2}(ky^2 + y'^2) \quad (3)$$

είναι μια συνάρτηση *Lyapunov*. Είναι το μοντέλο τοπικά ευσταθές, τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές, και ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές;

- III. 2.5M Να βρείτε μια προσέγγιση διαταραχών δύο όρων για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' + 9y = 3\epsilon y^3, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases} \quad (4)$$

με χρήση της μεθόδου Poincaré-Lindstedt.

Υπόδειξη: Επιλέξτε $\omega_0 = 3$ και χρησιμοποιήστε τη σχέση $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

- IV. 2M Να επαληθεύσετε την ακόλουθη προσέγγιση για μεγάλες τιμές του λ :

$$\int_0^\infty \frac{\ln(t+1)}{t} e^{-\lambda t} dt \sim \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad \lambda \gg 1.$$