

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.**  
**658. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**

Όλα τα θέματα βαθμολογούνται ισόποσα με  $2 + \frac{1}{2}$  μονάδες.

- I. Να βρεθεί ομοιόμορφη ασυμπτωτική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - (2t+1)y' + 2y = 0, & t \in (0, 1), & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ y(0) = \alpha, & y(1) = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

- II. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$x'' = -9x + 2x^3 + 2(x')^2 x$$

έχει περιοδική λύση, η οποία να βρεθεί.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πολικές συντεταγμένες.

- III. Σε δοκιμές εξοικονόμησης καυσίμων, τα αυτοκίνητα κινούνται με σταθερή ταχύτητα,  $u$ , σε έναν επίπεδο αυτοκινητόδρομο. Χωρίς επιτάχυνση, η δύναμη πρόωσης,  $F$ , πρέπει να είναι σε ισορροπία με άλλες δυνάμεις, όπως η αντίσταση του αέρα κ.ο.κ. Υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές που επηρεάζουν την  $F$  είναι η ταχύτητα  $u$ , Ο ρυθμός καύσης  $c$ , και η ποσότητα ενέργειας  $E$  σε ένα γαλόνι καυσίμου. Μπορούμε έτσι να υποθέσουμε έναν φυσικό νόμο της μορφής  $f(F, u, c, E) = 0$ . Μια κατάλληλη επιλογή θεμελιωδών μεγεθών είναι οι ποσότητες μάζα ( $M$ ), μήκος ( $L$ ) και χρόνος ( $T$ ), μέσω των οποίων έχουμε  $[F] = MLT^{-2}$ ,  $[u] = LT^{-1}$ ,  $[c] = L^3T^{-1}$  και  $[E] = ML^{-1}T^{-2}$ . Να βρεθεί ένας ισοδύναμος νόμος που συσχετίζει κατάλληλες αδιάστατες ποσότητες.

- IV. Για τις διάφορες τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \mu y, \\ y' = x + \lambda y, \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$