Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκουσα: Β. Μπιτσούνη
Εαρινό εξάμηνο 2021

Πρόχειρες Σημειώσεις: Προβλήματα Sturm-Liouville και Ποιοτική Θεωρία Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Μάριος Βώβος - Βάσιλική Μπιτσούνη

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Αθήνα, 2021

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το αντικείμενο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είναι η κατανόηση και η μελέτη των φυσικών προβλημάτων του πραγματικού κόσμου. Μέσα από αυτή τη σκοπιά διαφαίνεται έντονα η χρησιμότητα των μαθηματικών σε ένα ευρύτερο κλάδο επιστημών. Μερικές από αυτές είναι οι:

- θετικές επιστήμες
- τεχνολογικές επιστήμες
- βιοϊατρικές επιστήμες

Έτσι, λοιπόν, πρέπει να κάνουμε κάποιες απόπειρες κατανόησης των προβλημάτων της φύσης. Τα βήματα ώστε να πετύχουμε κάτι τέτοιο είναι:

i. Παρατήρηση.

ii. Κατασκευή μαθηματικού μοντέλου.

iii. Μελέτη μοντέλου με μαθηματικές μεθόδους και αν είναι δυνατόν επίλυση του ακριβώς ή προσεγγιστικά με χρήση αναλυτικών τεχνικών για ειδικές τιμές των παραμέτρων του ή σε περιοχές των μεταβλητών του, για τις οποίες το πρόβλημα απλουστεύεται.

iv. Διακριτοποιήση μοντέλου και αριθμητική επίλυση (με χρήση αριθμητικών μεθόδων με ευστάθεια και ακρίβεια).

v. Πιστοποίηση μοντέλου. Δηλαδή, σύγκριση αναλυτικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων του με πειραματικές μετρήσεις (επικύρωση ή απόρριψη και επανασχεδιασμό).

vi. Πρόβλεψη.

Έχουμε διάφορα μοντέλα τα οποία μας βοηθούν σε αυτή την κατανόηση των φυσικών προβλημάτων. Κάποια από αυτά είναι τα εξής:

- Ντετερμινιστικά (αιτιοκρατικά) ή Στοχαστικά
- Γραμμικά ή μη γραμμικά
- Στατικά ή δυναμικά (αναφέρονται κυριώς στον χρόνο). Τα δυναμικά μπορούν να είναι διακριτά ή συνεχή.

Κεφάλαιο 1

Προβλήματα Sturm-Liouville

1.1 Ανασκόπηση των προβλημάτων ιδιοτιμών από τη γραμμική άλγεβρα

Πριν μιλήσουμε για τα προβλήματα Sturm-Liouville θα θυμίσουμε ένα γνωστό σε όλους πρόβλημα ιδιοτιμών από τη γραμμική άλγεβρα. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας, που είναι το απλούστερο παράδειγμα γραμμικού τελεστή. Αναζητούμε αριθμούς λ για τους οποίους η εξίσωση

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

έχει μια μη τετριμμένη λύση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Όπως είναι γνωστό οι τιμές του λ, με $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda \in \mathbb{C}$, για τις οποίες υπάρχει μια τέτοια λύση $\mathbf{u}$ λέγονται *ιδιοτιμές* και οι αντίστοιχες λύσεις $\mathbf{u}$ λέγονται *ιδιοδιανύσματα.*

Υποθέτουμε ότι ο A είναι συμμετρικός και έχει n πραγματικές και διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Σε κάθε ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{e}_i$, και το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Επιπλέον, αφού A συμμετρικός τα ιδιοδιανύσματα είναι κάθετα ανά δύο μεταξύ τους, δηλαδή $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, $i \neq j$, και κανονικοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα (διαιρώντας το ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του) παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, οπότε κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_i$, δηλαδή

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i, \tag{1.1}$$

όπου c_i οι συντεταγμένες του $\mathbf{u}$ ως προς αυτή την ορθοκανομική βάση, με $c_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i$ (δηλαδή το c_i είναι η προβολή του $\mathbf{u}$ στο $i-$οστό διάνυσμα).

Επομένως, αν έχουμε ένα γραμμικό σύστημα

$$A\mathbf{u} = \mu\mathbf{u} + \mathbf{f} \tag{1.2}$$

όπου $\mathbf{f}$ δεδομένο διάνυσμα και μ γνωστή σταθερά διαφορετική από όλες τις ιδιοτιμές του A. Αν υπάρχει κάποια λύση $\mathbf{u}$ του προβλήματος (1.2) θα γράφεται στη μορφή (1.1), όπου οι σταθερές c_i θα πρέπει να προσδιοριστούν. Αφού $\mathbf{f}$ γνωστό διάνυσμα γράφεται κι αυτό στη μορφή

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} f_i\mathbf{e}_i,$$

όπου οι συντελεστές $f_i = \mathbf{f} \cdot e_i$ είναι γνωστοί. Επομένως, το πρόβλημα γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} c_i A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (\mu c_i + f_i)\,\mathbf{e}_i.$$

Όμως $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, αφού το $\mathbf{e}_i$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδοτιμή λ_i. Άρα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (\mu c_i + f_i)\,\mathbf{e}_i \Rightarrow c_i \lambda_i = \mu c_i + f_i, \quad i = 1, \ldots, n \Rightarrow c_i = \frac{f_i}{\lambda_i - \mu}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Άρα η λύση του προβλήματος (1.2) δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\lambda_i - \mu} \mathbf{e}_i.$$

Βλέπουμε επομένως ότι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα βοηθούν στην επίλυση άλλων προβλημάτων που σχετίζονται με τον πίνακα αυτόν. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και για τις ΜΔΕ, όπου οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις ενός διαφορικού τελεστή βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με αυτόν τον τελεστή.

1.2 Προβλήματα ιδιοτιμών για διαφορικούς τελεστές

Εδώ, αντικαθιστούμε το χώρο $\mathbb{R}^n$ της προηγούμενης ενότητας με έναν χώρο συναρτήσεων, και τον πίνακα A με έναν διαφορικό τελεστή. Αυτός ο διαφορικός τελεστής μπορεί να είναι ο τελεστής δευτέρας παραγώγου $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$, οπότε να έχουμε το *πρόβλημα ιδιοτιμών διαφορικού τελεστή*:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\phi = \lambda\phi, \quad a < x < b,\\
&\phi(a) = \phi(b) = 0.
\end{aligned}$$

Επομένως, ανάλογα με πριν εδώ αναζητούμε τις ιδιοσυναρτήσεις ϕ του προβλήματος που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ. Επειδή είναι δύσκολο να βρει κανείς γενικές ιδιότητες των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων ενός τυχαίου διαφορικού τελεστή, θα εξετάσουμε συγκεκριμένους διαφορικούς τελεστές, όπως είναι ο τελεστής Sturm-Liouville που θα δούμε παρακάτω.

1.2.1 Πρόβλημα Sturm-Liouville

Έστω $p \in C^1([a,b])$ με $p(x) > 0$ για $x \in [a,b]$ και $q \in C([a,b])$, όπου (a,b) φραγμένο διάστημα στον $\mathbb{R}$.

Ο γραμμικός συνήθης διαφορικός τελεστής 2ης τάξης

$$L := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + q(x), \tag{1.3}$$

ονομάζεται *τελεστής Sturm-Liouville*.

Έστω $w \in C([a,b])$ με $w(x) > 0$ για $x \in [a,b]$ *συνάρτηση βάρους*, και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Θεωρούμε τη ΣΔΕ

$$Lu = -\lambda w(x)\, u, \quad x \in (a, b)\,, \tag{1.4}$$

και τις χωριζόμενες ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases} A_1 u(a) + A_2 u'(a) = 0, & A_1, A_2 \quad \text{σταθ.}: \quad |A_1| + |A_2| > 0 \\ B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0, & B_1, B_2 \quad \text{σταθ.}: \quad |B_1| + |B_2| > 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών (ΠΣΤ) (1.4)-(1.5) με τις παραπάνω υποθέσεις λέγεται *κανονικό ή ομαλό πρόβλημα Sturm-Liouville.*

Είναι προφανές ότι η $u = 0$ είναι λύση για κάθε τιμή του λ.

Εκείνες οι τιμές του λ για τι οποίες υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις ονομάζονται *ιδιοτιμές* και οι αντίστοιχες λύσεις ονομάζονται *ιδιοσυναρτήσεις* του ΠΣΤ (1.4)-(1.5).

Το εσωτερικό γινόμενο με βάρος w είναι

$$(f, g)_w := \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x,$$

και η επαγόμενη νόρμα με βάρος w είναι

$$\|f\|_w := \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Παρατήρηση 1. *Η γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης*

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0, \tag{1.6}$$

μέσω του μετασχηματισμού

$$y(x) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int p(x)\, \mathrm{d}x \right\} u(x)\,,$$

γράφεται στην κανονική (normal) μορφή

$$u'' + \Theta(x)\, u = 0,$$

όπου

$$\Theta(x) = q(x) - \frac{1}{4} p^2(x) - \frac{1}{2} p'(x)\,.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτα τα σημεία μηδενισμού των λύσεων.

Επίσης, μέσω του μετασχηματισμού

$$P(x) = \exp\left\{ \int p(x)\, \mathrm{d}x \right\}, \qquad Q(x) = q(x) \exp\left\{ \int p(x)\, \mathrm{d}x \right\},$$

γράφεται στην αυτοσυζυγή μορφή της (1.6)

$$(P(x)\, y')' + Q(x)\, y = 0. \tag{1.7}$$

Αν οι p, q είναι συνεχείς, τότε $P \in C^1$, $Q \in C$ και $P > 0$.

Θεμελιώδες αποτέλεσμα:

Το φασματικό θεώρημα (spectral theorem) που γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα, ισχύει για αυτοσυζυγείς και συμπαγείς τελεστές σε συναρτησιακούς χώρους.

Παράδειγμα 1. *Έστω το ΠΣΤ*

$$\begin{cases} u'' = \lambda u, & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση των πραγματικών ιδιοτιμών. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) *Αν $\lambda = 0$, τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι $u(x) = ax + b$ και από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε τελικά $u(x) = 0$ και αφού δεν υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή.*

(ii) *Αν $\lambda > 0$, τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι*[1]

$$u(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

και από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} a + b &= 0, \\ ae^{\sqrt{\lambda}l} + be^{-\sqrt{\lambda}l} &= 0, \end{aligned}$$

απ'όπου έχουμε $a = b = 0$, οπότε $u(x) = 0$ και αφού δεν υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις δεν έχουμε θετικές ιδιοτιμές.

(iii) *Αν $\lambda < 0$, τότε η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως $u'' + \mu^2 u = 0$, όπου $\lambda = -\mu^2$ με μ θετικό. Η γενική λύση της εξίσωσης είναι*

$$u(x) = a\sin\mu x + b\cos\mu x$$

και από τις συνοριακές συνθήκες στο $x = 0$ παίρνουμε ότι $b = 0$, άρα

$$u(x) = a\sin\mu x,$$

με $a\sin\mu l = 0$. Για $a = 0$ έχουμε πάλι την τετριμμένη λύση. Άρα το $\mu = n\pi/l$, $n = 1, 2, \ldots$. Βρήκαμε επομένως άπειρο πλήθος αρνητικών ιδιοτιμών

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις[2]*:*

$$u = u_n(x) = a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

1.2.2 Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων

Θεώρημα 1. *Για το κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville (1.4)-(1.5) ισχύουν τα εξής:*

(i) *Οι ιδιοτιμές του προβλήματος είναι πραγματικές, απλές, αριθμήσιμες, διατεταγμένες και υπάρχει ελάχιστη ιδιοτιμή, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots.$$

Επιπλέον,

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

[1] Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε τη λύση ως $u(x) = C_1 \sinh\sqrt{\lambda}x + C_2\cosh\sqrt{\lambda}x$ για κατάλληλες σταθερές C_1, C_2.

[2] Το γινόμενο μιας ιδιοσυνάρτησης επί οποιαδήποτε μη μηδενική σταθερά είναι επίσης ιδιοσυνάρτηση

(ii) *Έστω λ_n ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $\phi_n(x)$. Η ϕ_n έχει ακριβώς $n-1$ σημεία μηδενισμού στο (a,b).*

(iii) *Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες.*

(iv) *Το σύνολο των ορθοκανονικών ιδιοσυναρτήσεων $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ είναι πλήρες υπό την έννοια ότι κάθε συνάρτηση $f \in L^2_w(a,b)$[3] (δηλ. τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση) μπορεί να αναπαρασταθεί ως γενικευμένη σειρά Fourier*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

όπου

$$c_n = \frac{(f, \phi_n)_w}{(\phi_n, \phi_n)_w}$$

είναι οι γενικευμένοι συντελεστές Fourier.

[3]Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε $f \in L^2_w(a,b)$ ανν $\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Κεφάλαιο 2

Ποιοτική θεωρία

Η ποιοτική θεωρία μελετά το σύνολο των λύσεων μίας διαφορικής εξίσωσης. Η ποιοτική θεωρία είναι έντονα γεωμετρική. Αναπτύχθηκε όταν έγινε σαφές ότι εν γένει δεν είναι δυνατό να γραφούν οι λύσεις σε κλειστή μορφή. Κυρίως θα μας απασχολήσουν η εύρεση σημείων ισορροπίας (σ.ι.) και μελέτη της ευστάθειας τους.

2.1 Πληθυσμιακά μοντέλα

2.1.1 Εκθετικό μοντέλο - Μοντέλο του Malthus

Έστω $N(t)$ πληθυσμός ενός είδους (π.χ. ζώα, κύτταρα, μολυσμένοι άνθρωποι κ.τ.λ.) κατά τη χρονική στιγμή t. Η υπόθεση ότι ο ρυθμός μεταβολής του N είναι ανάλογος του N, σημαίνει ότι

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN$$

όπου r είναι η σταθερά αναλογίας μεταξύ του ρυθμού μεταβολής και του μεγέθους του πληθυσμού. Το **πρόβλημα Cauchy ή πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN, \\ N(t_0) = N_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

έχει λύση $N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Λαμβάνουμε τρεις περιπτώσεις:

i) $r > 0$: εκθετική αύξηση (π.χ. κρούσματα COVID-19)

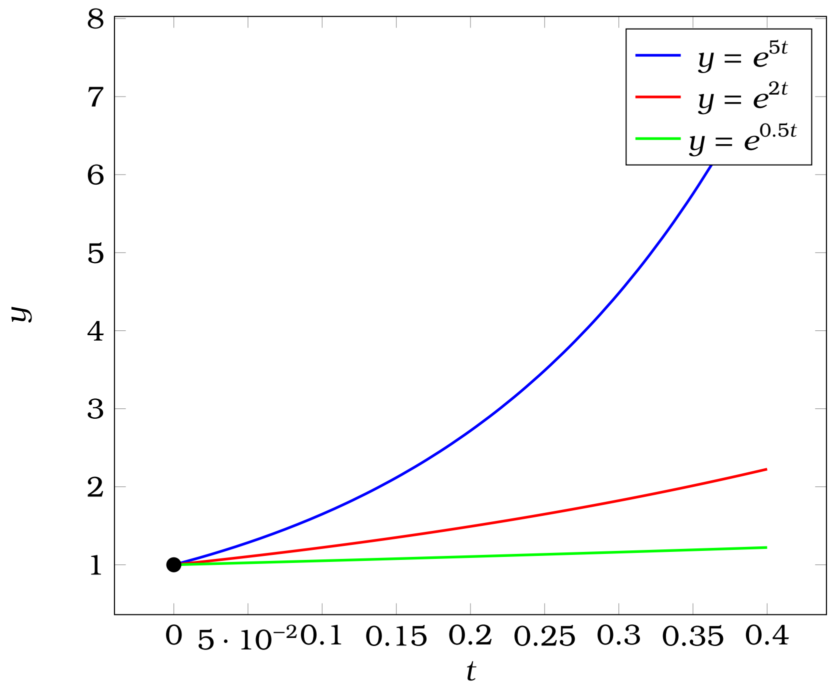
ii) $r < 0$: εκθετική μείωση (π.χ. ραδιενεργή διάσπαση)

iii) $r = 0$: λύση σταθερή ίση με N_0.

Το εκθετικό μοντέλο είναι αξιόπιστο για περιορισμένες χρονικές περιόδους.

2.1.2 Λογιστικό μοντέλο - Μοντέλο Verhulst

Η πρόγνωση για μεγάλα χρονικά διαστήματα βάσει του μοντέλου Malthus, που αναφέραμε πριν, δίνει πληθυσμούς οι οποίοι αυξάνουν απεριόριστα αν το $r > 0$. Το λογιστικό μοντέλο "θεραπεύει" αυτό το ελάττωμα και τροποποιεί το μοντέλο Malthus έτσι ώστε:



Σχήμα 2.1: Η λύση του εκθετικού μοντέλου (2.1) για $N_0 = 1$ και $t_0 = 0$, δηλαδή $N(t) = e^{rt}$, με σταθερά αναλογίας (α) $r = 5$ (μπλέ καμπύλη), (β) $r = 2$ (κόκκινη καμπύλη) και (γ) $r = 0.5$ (πράσινη καμπύλη).

- Αν ο πληθυσμός είναι μικρός, ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού είναι ανάλογος με το μέγεθος του.
- Αν ο πληθυσμός είναι δυσανάλογα μεγάλος για τα περιβαλλοντικά δεδομένα, ο ρυθμός αύξησης είναι αρνητικός και ο πληθυσμός ελαττώνεται.

Για το μοντέλο αυτό χρησιμοποιούμε, όπως και πριν, τις ακόλουθες μεταβλητές και παραμέτρους:

t = χρόνος (ανεξάρτητη μεταβλητή)
N = πληθυσμός (εξαρτημένη μεταβλητή)
r = συντελεστής ρυθμού μεταβολής για μικρούς πληθυσμούς

Η γενικότερη σχέση που περιγράφει το συγκεκριμένο μοντέλο δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r(N)\,N.$$

Έχουμε ότι, $r(N) \approx r$ για "μικρό" N, φθίνει για "σχετικά μεγάλα" N και είναι αρνητική για "αρκετά μεγάλα" N (σε σχέση με τα περιβαλλοντικά δεδομένα).
Η απλούστερη μορφή του λογιστικού μοντέλου είναι όταν $r(N) = r - \rho N$, όπου ρ θετική σταθερά και έτσι έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (r - \rho N)\,N$$

ή όπως συνήθως γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) \tag{2.2}$$

όπου $k := \frac{r}{\rho}$ η φέρουσα ικανότητα (ή επίπεδο κορεσμού ή χωρητικότητα) (carrying capacity) του περιβάλλοντος και είναι το μέγιστο μέγεθος του βιώσιμου πληθυσμού τού υπό μελέτη είδους που το περιβάλλον μπορεί να υποστηρίξει. Ακόμη, θα είναι rN ο ρυθμός ανάπτυξης και $-\frac{r}{k}N^2$ ο ρυθμός θανάτων.

Παράδειγμα 2. *(Δυναμική πληθυσμού καρκινικών κυττάρων) Έστω u η πυκνότητα των καρκινικών κυττάρων, τότε ο πολλαπλασιασμός τους περιγράφεται από την εξίσωση*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = ru\left(1 - \frac{u}{k}\right).$$

Η (2.2) είναι μια ΣΔΕ χωριζομένων μεταβλητών (είναι επίσης και διαφορική εξίσωση Bernoulli). Έτσι, το ΠΑΤ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \dfrac{N}{k}\right), \\ N(t_0) = N_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

έχει λύση $N(t) = \dfrac{kN_0}{N_0 + (k - N_0)e^{-rt}}$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Η λύση αυτή είναι μοναδική για το ΠΑΤ (2.3) από το θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας. Συνεχίζουμε βρίσκοντας τα σημεία ισορροπίας της (2.2).

Έστω $f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$, τότε τα σημεία ισορροπίας της (2.2) είναι $N_1 = 0$ και $N_2 = k$.

- Αν $0 < N_0 < k$, τότε λόγω του μονοσήμαντου θα είναι $0 < N(t) < k$, για κάθε t άρα $f(N) > 0$ και $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} > 0$, για κάθε t συνεπώς ο πληθυσμός αυξάνει.

- Καθώς το $N(t)$ πλησιάζει το k, η $f(N)$ πλησιάζει το μηδέν και $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} < 0$ για κάθε t και ο $N(t)$ τείνει στο k από τιμές μικρότερες του k.

- Αν $N_0 > k$ τότε $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} < 0$ για κάθε t και ο πληθυσμός ελαττώνεται και τείνει στο k από τιμές μεγαλύτερες του k.

N	$f(N)$	$N'(t)$	N ως προς t
$(0, k/2)$	> 0	> 0	αύξουσα και κυρτή
$(k/2, k)$	> 0	< 0	αύξουσα και κοίλη
(k, ∞)	< 0	< 0	φθίνουσα και κυρτή

- Αν $N_0 = 0$, τότε $N = 0$.

- Αν $N_0 > 0$, τότε $\lim_{t\to\infty} N(t) = k$.

Επομένως, το k είναι ασυμπτωτικά ευσταθής λύση.

Έστω το ΠΑΤ:

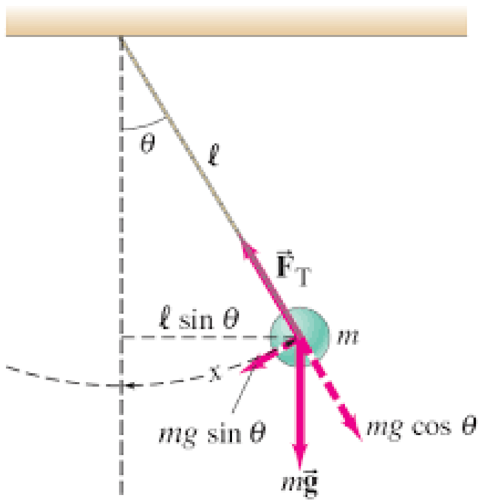
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad t > t_0$$

Η παραπάνω ΣΔΕ είναι αυτόνομη μιας και η f δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή t. Εάν η f είναι Lipschitz[1] στο $[a, b]$ και $y_0 \in (a, b)$ τότε υπάρχει μοναδική λύση για κάθε $t \in (c, d)$ με $t_0 \in (c, d)$.

Ορισμός 1. *Χώρος φάσης της εξίσωσης* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$ *είναι ο άξονας των* y. *Το* $\overline{y}$ *λέγεται σημείο ισορροπίας (ή λύση ισορροπίας), αν* $f(\overline{y}) = 0$. *Το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$ *είναι ο άξονας των* y *μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που καταδεικνύουν το πρόσημο κλίσης της λύσης.*

Το διάγραμμα φάσης είναι μια γεωμετρική έννοια που μας δίνει πληροφορίες για ισορροπία, περιοδικότητα, απεριόριστη αύξηση, ευστάθεια, κλπ.

Παράδειγμα 3. *(Κίνηση εκκρεμούς) Παρακάτω φαίνεται η κίνηση ενός εκκρεμούς μήκους* ℓ *και μάζας* m, *που σχηματίζει με τον κατακόρυφο άξονα γωνία* ϑ.



Σχήμα 2.2: Κίνηση απλού εκκρεμούς.

Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Newton καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς που δίνεται από την σχέση:

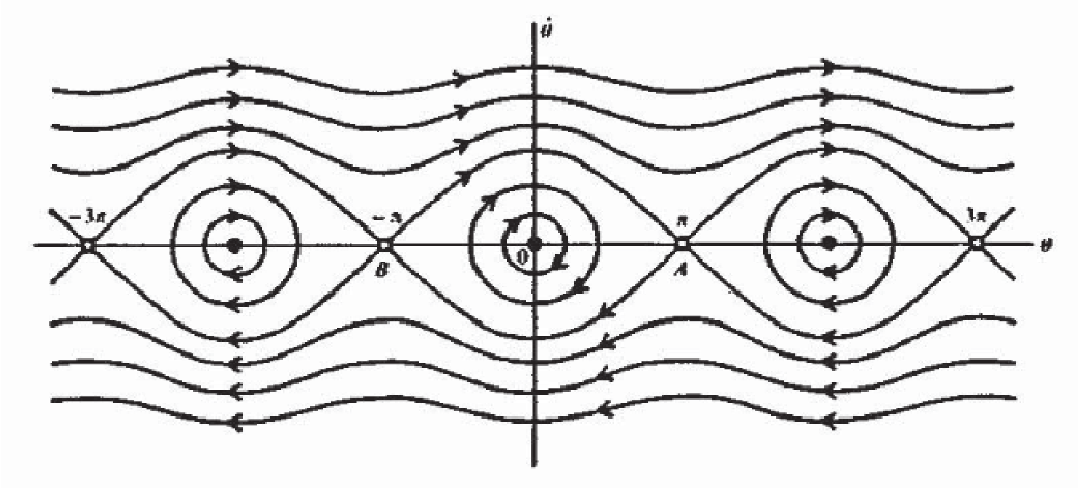
$$m\ell^2 \vartheta' \vartheta'' + mg\ell \sin\vartheta = 0$$

Η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα στην μορφή:

$$\frac{1}{2} m\ell^2 (\vartheta')^2 - mg\ell\cos\vartheta = c, \tag{2.4}$$

όπου c σταθερά, λόγω της διατήρησης της ενέργειας (εμφανίζονται δηλαδή η κινητική και η δυναμική ενέργεια, αντίστοιχα).

[1] Μια συνάρτηση f ονομάζεται Lipschitz σ' ένα διάστημα $[a, b]$ αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο, ώστε $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, για κάθε $x_1, x_2 \in [a, b]$.



Σχήμα 2.3: Επίπεδο φάσεων, με άξονες ϑ και ϑ' και μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών που δίνονται από την (2.4) για διάφορες τιμές του c [5].

Ορισμός 2. *Ένα δεδομένο ζεύγος (Θ, Θ') λέγεται* ***κατάσταση*** *του συστήματος (στην περίπτωση μας, του εκκρεμούς) και το παραπάνω διάγραμμα δείχνει πως εξελίσσεται, με την πάροδο του χρόνου, οποιαδήποτε κατάσταση. Γνωρίζουμε ότι μια δεδομένη κατάσταση προσδιορίζει όλες τις επόμενες, αφού μπορεί να θεωρηθεί ως αρχική συνθήκη για την επόμενη κατάσταση.*

Παρατηρήσεις 1. *1. Μια κατάσταση είναι ευσταθής αν μικρές διαταραχές ή μεταβολές του συστήματος δεν επηρεάζουν δραστικά την κατάσταση. Για παράδειγμα η τρέχουσα κατάσταση του ηλιακού συστήματος είναι μια χρονοεξαρτώμενη κατάσταση, στην οποία οι πλανήτες κινούνται περί τον ήλιο με τάξη. Είναι γνωστό ότι αν ένα πολύ μικρό ουράνιο σώμα εισέλθει στο σύστημα, ή αν υπάρξει μια πολύ μικρή μεταβολή στην τροχιά ενός πλανήτη, τότε το αρχικό σύστημα δεν διαταράσσεται σημαντική. Λέμε ότι η αρχική κατάσταση είναι ευσταθής ως προς μικρές διαταραχές. Το ερώτημα της ευστάθειας τίθεται για κάθε φυσικό σύστημα.*

2. Μια συναφής έννοια είναι εκείνη της διακλάδωσης. Ένα σύστημα υφίσταται διακλάδωση όταν η κατάσταση του εξαρτάται από κάποια παράμετρο και καθώς η παράμετρος μεταβάλλεται, το σύστημα μεταπίπτει σε μια άλλη κατάσταση για μια κρίσιμη τιμή της παραμέτρου. Η διαδικασία αυτή συνήθως συνοδεύεται από μεταβολή της ευστάθειας.

Ορισμός 3. *Το σημείο ισορροπίας $\overline{y}$ του ΠΑΤ*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \quad t > t_0$$

λέγεται:

i) ***Ευσταθές*** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|y_0 - \overline{y}| < \delta$ τότε $|y(t) - \overline{y}| < \varepsilon$, για κάθε $t \geq 0$.*

ii) ***Ασυμπτωτικά ευσταθές*** *αν είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και επιπλέον για το y_0 με $|y_0 - \overline{y}| < \delta$ ισχύει ότι $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \overline{y}$.*

(Κατάσταση ισορροπίας ασυμπτωτικά ευσταθής ως προς μικρές διαταραχές: οι διαταραχές τείνουν στο μηδέν, καθώς αυξάνεται το t)

iii) *Το $\overline{y}$ λέγεται* ***ασταθές*** *αν δεν είναι ευσταθές.*

Παρατήρηση 2. *Υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ συνεχούς εξάρτησης και ευστάθειας. Ευστάθεια σημαίνει ότι οι λύσεις με αρχικές συνθήκες κοντά στα σημεία ισορροπίας παραμένουν κοντά σε αυτό για αυθαίρετα μεγάλο χρόνο.*

Παράδειγμα 4. *Έστω το ΠΑΤ:*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Το συγκεκριμένο ΠΑΤ έχει λύση $y(t) = y_0 e^{-t}$, για $t \geq 0$. Επίσης, αφού $f(y) = -y$ και άρα $f(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ το 0 είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Έστω $\varepsilon > 0$, θέλουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|y_0 - 0| < \delta$ τότε $|y(t) - 0| < \varepsilon$, για κάθε $t \geq 0$. Έχουμε

$$|y(t)| = |y_0|\, e^{-t} \leq |y(0)| < \delta.$$

Για $\delta := \varepsilon$ λαμβάνουμε τελικά ότι το 0 είναι ευσταθές.
Επίσης, έχουμε:

$$\left|\lim_{t\to\infty} y(t)\right| = \lim_{t\to\infty} |y(t)| = |y_0| \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το 0 είναι και ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 5. *Έστω το ΠΑΤ:*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y \\ y(0) = y_0 \neq 0. \end{cases}$$

Η γενική λύση είναι $y(t) = y_0 e^t$, $t \geq 0$ και πάλι αφού $f(y) = y$ το σημείο ισορροπίας είναι το 0. Εν αντίθεση με πριν έχουμε:

$$|y(t)| = |y_0|\, e^t \xrightarrow{t\to\infty} +\infty$$

Οπότε αν $|y_0| < \delta$ δεν συνεπάγεται ότι $|y(t)| < \varepsilon$, για κάθε $t \geq 0$. Άρα, το 0 είναι ασταθές.

Παράδειγμα 6. *Έστω η διαφορική εξίσωση $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$.*

Τότε, τετριμμένα το 0 είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές. [2]

Γραμμικότητα

Λήμμα 1. *Ένα σ.ι. $\bar{y}$ της αυτόνομης δ.ε.*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$$

είναι

[2] Ισχύει ότι αν ένα σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε είναι και ευσταθές. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

1. *ευσταθές αν υπάρχει* $\Delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* y *με* $|y - \bar{y}| < \Delta$ *ισχύει ότι*
$$(y - \bar{y})f(y) \le 0.$$

2. *ασυμπτωτικά ευσταθές αν υπάρχει* $\Delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* y *με* $0 < |y - \bar{y}| < \Delta$ *ισχύει ότι*
$$(y - \bar{y})f(y) < 0.$$

3. *ασταθές αν υπάρχει* $\Delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* y *με* $0 < y - \bar{y} < \Delta(-\Delta < y - \bar{y} < 0)$ *ισχύει ότι*
$$(y - \bar{y})f(y) > 0.$$

Πόρισμα 1. *Έστω* f *μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο σε μια περιοχή ενός σημείου ισορροπίας* $\overline{y}$ $(f(\overline{y}) = 0)$. *Έστω, επίσης, ότι* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\overline{y}) \neq 0$. *Αν:*

- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\overline{y}) < 0$, *τότε το* $\overline{y}$ *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\overline{y}) > 0$, *τότε το* $\overline{y}$ *είναι ασταθές.*

Στην περίπτωση που $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\overline{y}) = 0$, *τότε δεν λαμβάνουμε κάποιο συμπέρασμα.*

Ορισμός 4. *Το σημείο ισορροπίας* $\overline{y}$ *της διαφορικής εξίσωσης* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$ *λέγεται υπερβολικό αν* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\overline{y}) \neq 0$.

Ορισμός 5. *Η γραμμικοποίηση της εξίσωσης* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$ *στο σ.ι.* $y = \bar{y}$, *είναι εξ ορισμού η γραμμική εξίσωση* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'(\bar{y})y$.

Διακλαδώσεις

Ορισμός 6. *Μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων της μορφής*
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(\mu, y)$$
ονομάζεται μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμός 7. *Έστω η διαφορική εξίσωση* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(\mu, y)$. *Η τιμή* $\overline{\mu}$ *της παραμέτρου* μ *για την οποία έχουμε αλλαγή του αριθμού των σημείων ισορροπίας ή αλλαγή ευστάθειας των σημείων ισορροπίας λέγεται τιμή διακλάδωσης.*

Παράδειγμα 7. *Έστω η διαφορική εξίσωση* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(1 - y) - \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ *(σταθερή παράμετρος).*

Τότε $f(\mu, y) = y(1-y) - \mu$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(\mu, y) = 0 \Leftrightarrow y(1-y) - \mu = 0 \Leftrightarrow y^2 - y + \mu = 0 \Leftrightarrow y_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu}}{2} \quad (\sigma.\iota.)$$

Για να είναι $y \in \mathbb{R}$ πρέπει $\mu \leq \frac{1}{4}$. Επίσης, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y_{\pm}) = 1 - 2y_{\pm} = \mp\sqrt{1-4\mu}$$

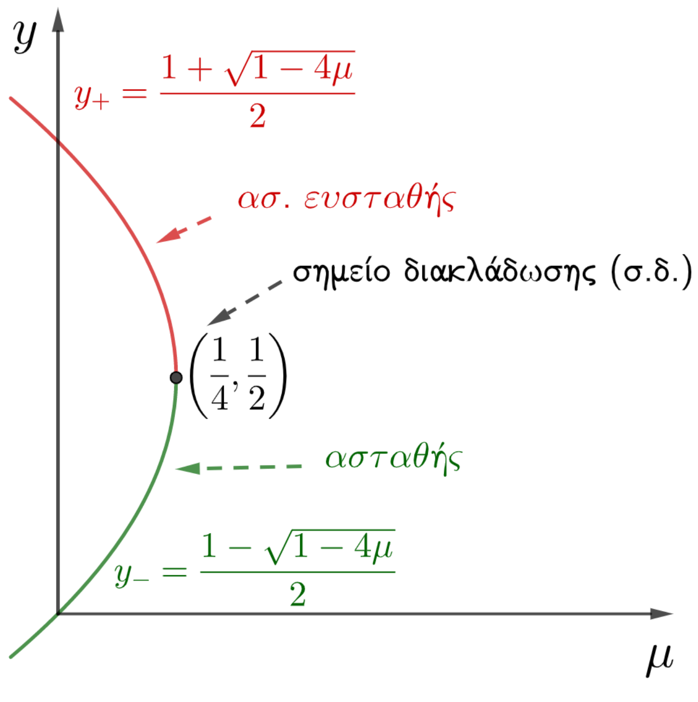
Ειδικότερα:

i) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y_{+}) = -\sqrt{1-4\mu}$

- για $\mu < \frac{1}{4}$ είναι $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y_{+}) < 0$, άρα y_{+} ασυμπτωτικά ευσταθές.
- για $\mu = \frac{1}{4}$ είναι $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y_{+}) = 0$, δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.

ii) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y_{-}) = \sqrt{1-4\mu}$

- για $\mu < \frac{1}{4}$ είναι $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y_{-}) > 0$, άρα y_{-} ασταθές.
- για $\mu = \frac{1}{4}$ είναι $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y_{-}) = 0$, δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.



Σχήμα 2.4: Το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης του **Παραδείγματος 7** στο επίπεδο μ, y.

Παράδειγμα 8. *Έστω η διαφορική εξίσωση* $\frac{dy}{dt} = \mu y - y^2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$f(\mu, y) = \mu y - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad y = \mu \quad (\sigma.\iota.)$$

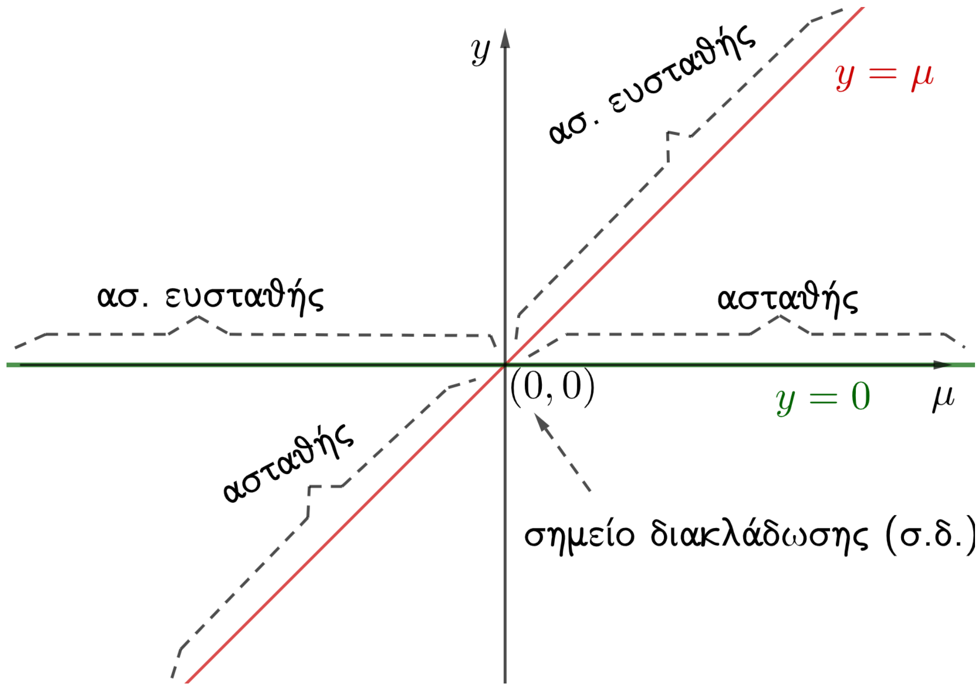
Επίσης, $\frac{df}{dy}(\mu, y) = \mu - 2y$. Επομένως:

i) $\frac{df}{dy}(\mu, 0) = \mu$

- Αν $\mu < 0$ το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Αν $\mu > 0$ το 0 είναι ασταθές.
- Αν $\mu = 0$ δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.

ii) $\frac{df}{dy}(\mu, \mu) = \mu - 2\mu = -\mu$

- Αν $\mu < 0$ το μ είναι ασταθές.
- Αν $\mu > 0$ το μ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Αν $\mu = 0$ δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.



Σχήμα 2.5: Το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης του **Παραδείγματος 8** στο επίπεδο μ, y.

Πόρισμα 2. *Έστω η ΣΔΕ* $\frac{dy}{dt} = f(\mu, y)$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. *Τα σημεία ισορροπίας της είναι λύσεις της εξίσωσης* $f(\mu, y) = 0$. *Το διάγραμμα των* (μ, y) *όπου* $f(\mu, y) = 0$ *ονομάζεται διάγραμμα διακλάδωσης. Έστω* (μ_0, y_0) *τέτοιο ώστε* $f(\mu_0, y_0) = 0$, *τότε αν:*

- $\frac{df}{dy}(\mu_0, y_0) < 0$, *τότε το* y_0 *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu_0, y_0) > 0$, *τότε το* y_0 *είναι ασταθές.*
- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu_0, y_0) = 0$, *τότε δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.*

Παράδειγμα 9. *Έστω η διαφορική εξίσωση* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (1-y)(y^2-\mu)$ *με* $\mu \geq 0$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$f(\mu, y) = 0 \Leftrightarrow (1-y)\left(y^2-\mu\right) = 0 \Leftrightarrow y = 1, \quad y = -\sqrt{\mu}, \quad y = \sqrt{\mu}$$

Επίσης, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, y) = -3y^2 + 2y + \mu$.

i) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, 1) = \mu - 1$

- Αν $\mu > 1$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, 1) > 0$ και άρα το 1 είναι ασταθές.
- Αν $\mu < 1$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, 1) < 0$ και άρα το 1 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Αν $\mu = 1$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\mu, 1) = 0$ και άρα δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.

ii) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(\mu, -\sqrt{\mu}\right) = -2\sqrt{\mu}\left(1 + \sqrt{\mu}\right)$

- Αν $\mu > 0$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(\mu, -\sqrt{\mu}\right) < 0$ και άρα το $-\sqrt{\mu}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Αν $\mu = 0$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(\mu, -\sqrt{\mu}\right) = 0$ και άρα δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.

iii) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(\mu, \sqrt{\mu}\right) = 2\sqrt{\mu}\left(1 - \sqrt{\mu}\right)$

- Αν $\mu > 1$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(\mu, \sqrt{\mu}\right) < 0$ και άρα το $\sqrt{\mu}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Αν $\mu < 1$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(\mu, \sqrt{\mu}\right) > 0$ και άρα το $\sqrt{\mu}$ είναι ασταθές.
- Αν $\mu = 1$ τότε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\left(\mu, \sqrt{\mu}\right) = 0$ και άρα δεν λαμβάνουμε συμπέρασμα.

Ορισμός 8. *Τα σημεία που αλλάζει η ευστάθεια ονομάζονται σημεία καμπής.*

Θεώρημα 2. *(πεπλεγμένης συνάρτησης ΘΠΣ) Έστω* $f(\mu, y)$ *συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάποιο ανοιχτό χωρίο* $\mathcal{U}$, *δηλαδή* $f \in C^1(\mathcal{U})$[3] *του επιπέδου* μ, y *που περιέχει το σημείο* (μ_0, y_0). *Αν* $f(\mu_0, y_0) = 0$ *και* $f_y(\mu_0, y_0) \neq 0$[4], *τότε υπάρχει ορθογώνιο*

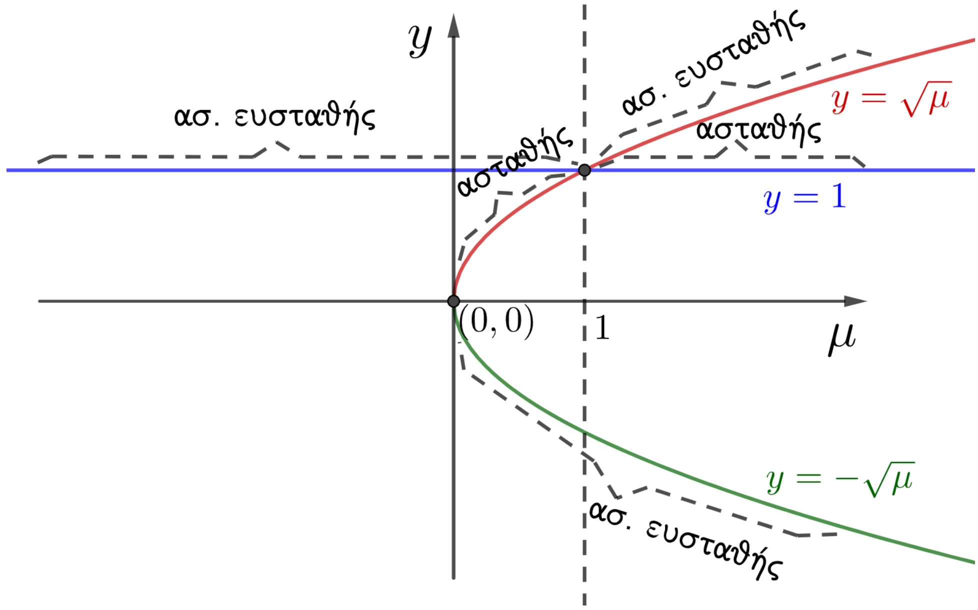
$$S : |y - y_0| < a, \; |\mu - \mu_0| < b$$

που περιέχεται στο $\mathcal{U}$ *τέτοιο ώστε:*

---

[3]Συμβολίζουμε με $f \in C(\mathcal{U})$ την συνεχή συνάρτηση f στο $\mathcal{U}$, με $f \in C^1(\mathcal{U})$ τη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathcal{U}$ και γενικά με $f \in C^k(\mathcal{U})$ την $k-$φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathcal{U}$.

[4]Συμβολίζουμε $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = f_y$.



Σχήμα 2.6: Το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξίσωσης του **Παραδείγματος 9** στο επίπεδο μ, y.

i) *Η εξίσωση $f(\mu, y) = 0$ έχει μοναδική λύση $y = y(\mu)$ στο S.*

ii) *Η συνάρτηση $y = y(\mu)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη για $|\mu - \mu_0| < b$ και η παράγωγος της δίνεται από τον τύπο:*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mu} = -\frac{f_\mu(\mu, y(\mu))}{f_y(\mu, y(\mu))} \tag{2.5}$$

Παράδειγμα 10. *Έστω $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.*
Έχουμε $f_y = 2y$, οπότε το ΘΠΣ εφαρμόζεται σε κάθε σημείο (x_0, y_0) που ικανοποιεί

$$f(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1$$

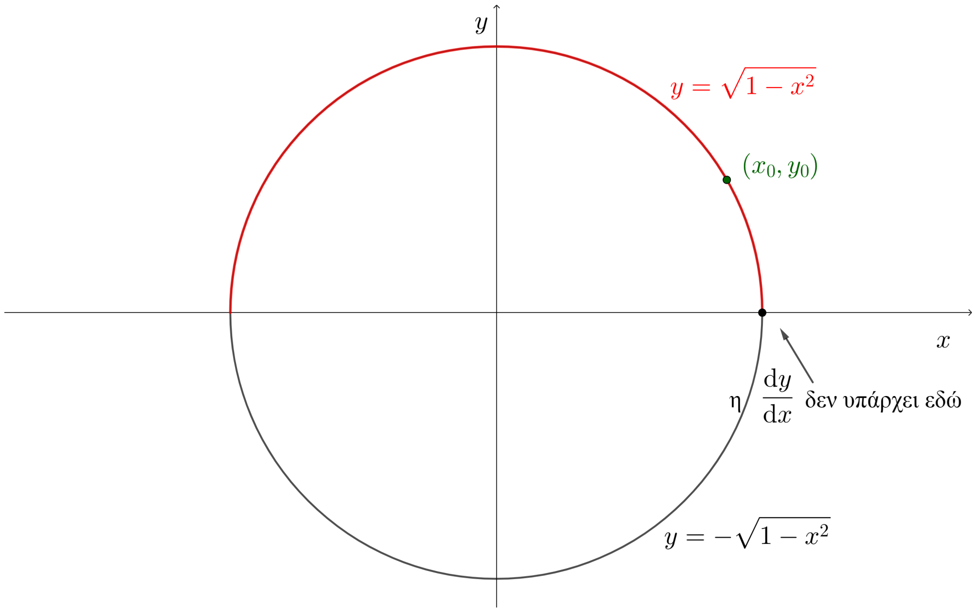
και $f_y(x_0, y_0) \neq 0 \Leftrightarrow y_0 \neq 0$, άρα κοντά σε τέτοια σημεία το y ορίζεται μονοσήμαντα σαν συνάρτηση του x. Αυτή η συνάρτηση είναι η $y = \sqrt{1 - x^2}$ αν $y_0 > 0$ και $y = -\sqrt{1 - x^2}$ αν $y_0 < 0$. Η y ορίζεται μόνο για $|x| < 1$ (η περιοχή δεν πρέπει να είναι πολύ μεγάλη) και το y είναι μοναδικό μόνο αν βρίσκεται κοντά στο y_0. Αυτά τα στοιχεία καθώς και η μη-ύπαρξη της $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ στο $y_0 = 0$ είναι φανερά από το γεγονός ότι η $x^2 + y^2 = 1$ ορίζει μια περιφέρεια στο επίπεδο xy.

Παρατήρηση 3. *Το ΘΠΣ είναι "συμμετρικό" με την έννοια ότι αν $f_\mu(\mu_0, y_0) \neq 0$ τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς μ και να πάρουμε $\mu = \mu(y)$. Σε αυτή την περίπτωση:*

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_\mu(\mu(y), y)}{f_\mu(\mu(y), y)}. \tag{2.6}$$

Ορισμός 9. *Έστω ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τρίτης τάξης σε μια περιοχή ενός σημείου $P_0 = (\mu_0, y_0)$ τότε:*

- *Αν $f(P_0) = 0$ και $f_y(P_0) \neq 0$ ή $f_\mu(P_0) \neq 0$, τότε το σημείο P_0 ονομάζεται* ***κανονικό*** *σημείο του γεωμετρικού τόπου $f(\mu, y) = 0$. Στην περίπτωση αυτή το ΘΠΣ εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας μοναδικής καμπύλης $y = y(\mu)$ ή $\mu = \mu(y)$, που διέρχεται από το P_0.*



Σχήμα 2.7: Λύση εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή σε μικρές περιοχές.

- *Αν το P_0 δεν είναι κανονικό σημείο, τότε ονομάζεται* ***ιδιόμορφο***[5] *σημείο και χαρακτηρίζεται από τη σχέση:*
$$f(P_0) = f_y(P_0) = f_\mu(P_0) = 0.$$

2.1.3 Χαρακτηρισμός ιδιόμορφων σημείων γεωμετρικού τόπου

Έστω ότι οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της $f(\mu, y)$ δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα. Θέτοντας $P = (\mu, y)$ παίρνουμε από το θεώρημα Taylor:

$$f(P) = f(P_0) + f_y(P_0)\Delta y + f_\mu(P_0)\Delta\mu + \frac{1}{2}\left(f_{yy}(P_0)\Delta y^2 + 2f_{y\mu}(P_0)\Delta y\Delta\mu + f_{\mu\mu}(P_0)\Delta\mu^2\right) + o\left(\Delta y^2 + \Delta\mu^2\right),$$

όπου $\Delta y = y - y_0$ και $\Delta\mu = \mu - \mu_0$. Αν $P_0 = (\mu_0, y_0)$ ιδιόμορφο σημείο και P επί του γεωμετρικού τόπου που έχουμε τότε:

$$f_{yy}(P_0)\Delta y^2 + 2f_{y\mu}(P_0)\Delta y\Delta\mu + f_{\mu\mu}(P_0)\Delta\mu^2 + o\left(\Delta y^2 + \Delta\mu^2\right) = 0,$$

που καθώς $\Delta y \to 0$ και $\Delta\mu \to 0$ έχουμε

$$f_{yy}(P_0)\,\mathrm{d}y^2 + 2f_{y\mu}(P_0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu + f_{\mu\mu}(P_0)\,\mathrm{d}\mu^2 = 0. \tag{2.7}$$

Ορίζουμε τη διακρίνουσα $D \equiv f_{y\mu}^2(P_0) - f_{yy}(P_0)f_{\mu\mu}(P_0)$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

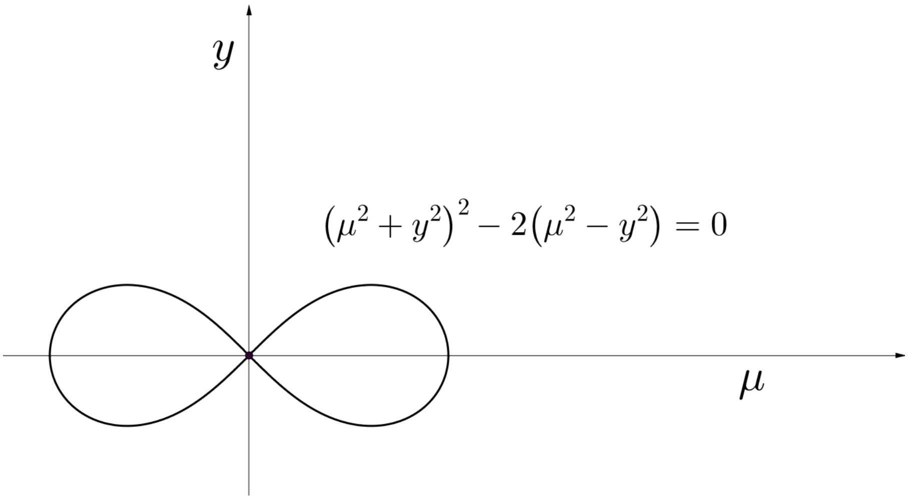
- Αν $D > 0$ τότε το P_0 λέγεται **διπλό** σημείο. Λύνοντας την (2.7) έχουμε:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mu} = -\frac{f_{y\mu}}{f_{yy}} \pm \sqrt{\frac{D}{f_{yy}^2}} \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_{y\mu}}{f_{\mu\mu}} \pm \sqrt{\frac{D}{f_{\mu\mu}^2}}.$$
Αυτοί οι τύποι δίνουν τις κλίσεις των εφαπτομένων των διακλαδώσεων στο διπλό σημείο P_0.

[5] Σε ένα ιδιόμορφο σημείο αναμένεται ιδιάζουσα συμπεριφορά αφού οι λόγοι (2.5) και (2.6) είναι της απροσδιόριστης μορφής $\frac{0}{0}$.

- Αν $D = 0$ τουλάχιστον δύο καμπύλες που διέρχονται από το P_0 έχουν εφαπτόμενες που ταυτίζονται.

- Αν $D < 0$ δεν υπάρχουν πραγματικές εφαπτόμενες και το P_0 ονομάζεται **μεμονωμένο** σημείο.

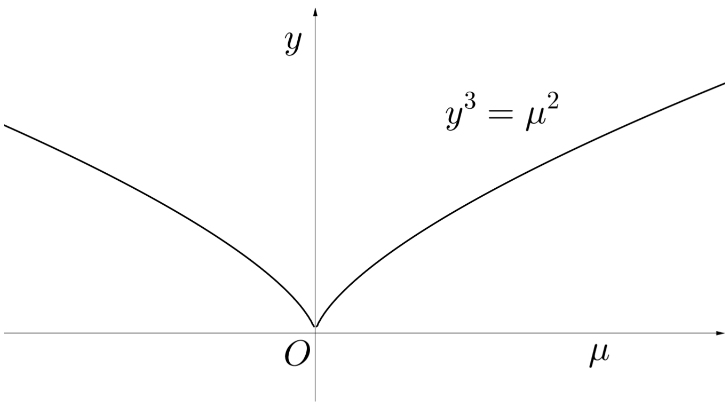
Παράδειγμα 11. *(Λημνίσκος) Έστω* $f(\mu, y) = \left(\mu^2 + y^2\right)^2 - 2\left(\mu^2 - y^2\right) = 0$. *Διαπιστώνουμε ότι:* $f(0,0) = f_\mu(0,0) = f_y(0,0) = 0$ *και* $D > 0$.



Σχήμα 2.8: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης του **Παραδείγματος 11**.

Άρα, το $P_0 = (0, 0)$ είναι διπλό σημείο από το οποίο διέρχονται δύο κλάδη με διαφορετικές εφαπτόμενες.

Παράδειγμα 12. *Έστω* $f(\mu, y) = y^3 - \mu^2 = 0$. *Εδώ, το ιδιόμορφο σημείο είναι το* $(0, 0)$ *και* $D = 0$. *Δηλαδή, δύο κλάδη έχουν την ίδια κατακόρυφη εφαπτομένη στο* $(0, 0)$. *Ένα τέτοιο σημείο λέγεται* ***αιχμή***.



Σχήμα 2.9: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης του **Παραδείγματος 12**.

Παράδειγμα 13. *Ο γεωμετρικός τόπος* $f(\mu, y) = y^2 + \mu^2 = 0$ *αποτελείται από ένα μόνο σημείο το* $(0, 0)$ *που είναι μεμονωμένο, αφού* $D < 0$.

Ορισμός 10. *Ένα ιδιόμορφο σημείο P_0 λέγεται ιδιόμορφο σημείο υψηλότερης τάξης αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης f_{yy}, $f_{y\mu}$ και $f_{\mu\mu}$ μηδενίζονται στο P_0.*

Λήμμα 2. *Έστω P_0 διπλό σημείο της $f(\mu, y) = 0$, τότε ισχύει ένα από τα εξής ενδεχόμενα:*

i) $f_{\mu\mu}(P_0) \neq 0$ *και οι δύο εφαπτόμενες έχουν τις κλίσεις:*

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_{y\mu}}{f_{\mu\mu}} \pm \sqrt{\frac{D}{f_{\mu\mu}^2}}$$

ii) $f_{\mu\mu}(P_0) = 0$ *και οι δύο εφαπτόμενες έχουν κλίσεις*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mu} = 0 \quad \textit{και} \quad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_{yy}}{2f_{y\mu}} \ \textit{στο}\ P_0.$$

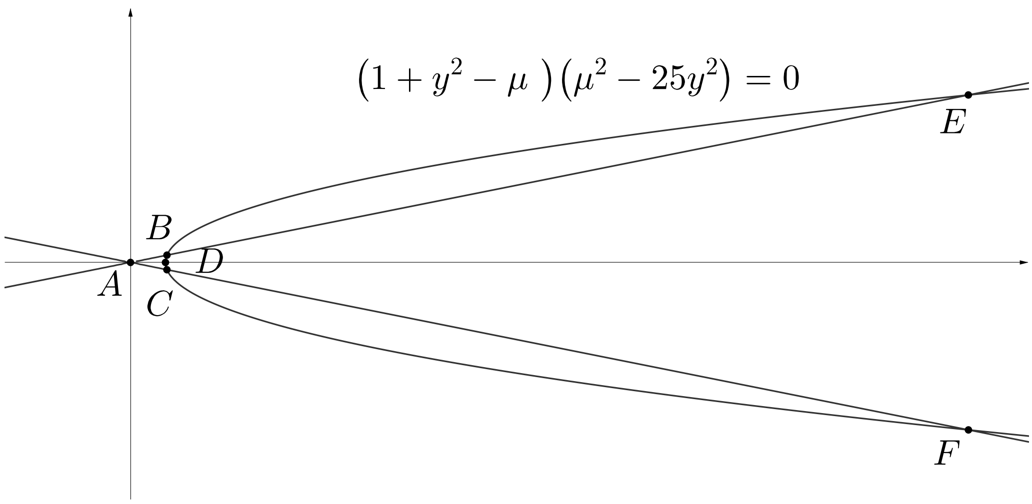
2.1.4 Ανταλλαγή ευστάθειας

Σε διπλό σημείο τέμνονται δύο κλάδοι. Έτσι στα διπλά σημεία μπορεί να παρουσιαστεί το φαινόμενο της ανταλλαγής ευστάθειας. (Η ευστάθεια μπορεί να αλλάξει φύση και σε ένα κανονικό σημείο)

Ορισμός 11. *Ένα κανονικό σημείο λέγεται σημείο καμπής (ως προς το μ) αν $f_\mu(P_0) \neq 0$ και η $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}$ αλλάζει και πρόσημο στο P_0.*

Παράδειγμα 14. *Έστω $f(\mu, y) = \left(1 + y^2 - \mu\right)\left(\mu^2 - 25y^2\right)$ έχει λύση ισορροπίας:*

$$\mu_1 = 1 + y^2,\ \mu_2 = 5y,\ \mu_3 = -5y$$



Σχήμα 2.10: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης του **Παραδείγματος 14**. Όλα τα σημεία επί των κλάδων είναι κανονικά εκτός από τα A, B, C, D, E, F. Το D είναι κανονικό σημείο καμπής, γιατί η $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}$ αλλάζει πρόσημο στο D. Τα A, B, C, D, E, F είναι διπλά σημεία επειδή είναι ιδιόμορφα στα οποία υπάρχουν δύο διαφορετικές εφαπτομένες.

Θεώρημα 3. *(ευστάθεια σημείου καμπής) Έστω P_0 κανονικό σημείο καμπής της $f(\mu, y) = 0$. Τότε τα σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή από τη μία πλευρά του P_0 και ασταθή από την άλλη.*

2.2 Ποιοτική θεωρία συστημάτων δ.ε. πρώτης τάξης

Το γενικό πρόβλημα είναι η επίλυση του $n \times n$ συστήματος πρωτοβάθμιων δ.ε. σε λυμένη μορφή

$$\begin{cases} x_1' = f_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ x_2' = f_2\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ \qquad\vdots \\ x_n' = f_n\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \end{cases} \tag{2.8}$$

όπου t η ανεξάρτητη μεταβλητή, τα $x_i = x_i(t)$ είναι οι άγνωστες συναρτήσεις και f_i είναι συνεχείς συναρτήσεις $n+1$ μεταβλητών συναρτήσεις. Αν, επιπλέον, έχουμε και αρχική συθνήκη της μορφής

$$\begin{cases} x_1\left(t_0\right) = x_{1_0} \\ x_2\left(t_0\right) = x_{2_0} \\ \qquad\vdots \\ x_n\left(t_0\right) = x_{n_0} \end{cases} \quad (t \in I)$$

τότε θα λέμε ότι έχουμε ένα ΠΑΤ.

Θέτοντας $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ και $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ το (2.8) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \underline{x}' = \underline{f}\left(t, x\right) \\ \underline{x}'\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$$

Παρατήρηση: Το (2.8) περιέχει τη γενική δ.ε. τάξης n σε λυμένη μορφή:

$$x^{(n)} = g\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right) \tag{2.9}$$

Πράγματι θεωρούμε το $n \times n$ σύστημα:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \end{cases} \tag{2.10}$$

Έστω $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ μία λύση του (2.10) τότε η $x(t) = x_1(t)$ είναι η λύση του (2.9). Πράγματι:

$$x^{(n)} = x_1^{(n)} = x_2^{(n-1)} = x_3^{(n-2)} = \cdots = x_{n-1}'' = x_n' = g\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = g\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$$

Ορισμός 12. *Το $n \times n$ σύστημα (2.8) λέγεται αυτόνομο αν έχει τη μορφή*

$$\underline{x}' = \underline{f}\left(\underline{x}\right) \tag{2.11}$$

Παρατηρήσεις:

1. Αν $\underline{x}(t)$, $t \in I$ λύση του (2.11), τότε η καμπύλη/τροχιά $\underline{x}(t)$ είναι εφαπτόμενη στο διανυσματικό επίπεδο $\underline{f}\left(\underline{x}\right)$.

2. Αν $\underline{x}(t)$, $t \in I$ λύση του (2.11) τότε και η $\underline{x}(t+c)$, $t \in I - c$ είναι λύση της (2.11). Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει γενικά για μη αυτόνομα συστήματα. Για παράδειγμα, έστω

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = te^t - e^t \end{cases}$$

λύση του ΠΑΤ

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = tx \end{cases}$$

Έχουμε $y'(t+c) = (t+c)\, e^{t+c} \neq t\,(x\,(t+c)) = te^{t+c}$ εκτός αν $c = 0$.

Θεώρημα 4. *(Picard-Lindelöf) Για $\left(t_0, \underline{x}_0\right)$ έστω ότι οι συναρτήσεις*

$$f_i\,(t, x)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(t, \underline{x}\right) \tag{2.12}$$

είναι συνεχείς σε ένα σύνολο της μορφής

$$[t_0, t_0 + a) \times \left[x_{1_0} - b_1, x_{1_0} + b_1\right] \times \cdots \times \left[x_{n_0} - b_n, x_{n_0} + b_n\right],$$

τότε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} \underline{x}' = \underline{f}\left(t, \underline{x}\right), \\ \underline{x}\,(t_0) = \underline{x}, \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση, ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[t_0, t_0 + \varepsilon)$.

Παρατήρηση: Η υπόθεση (4) του Θεωρήματος 4 μπορεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση η f να είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχής στο $\underline{x}$ (εννοώντας ότι η σταθερά Lipschitz μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητη του t) και συνεχής στο t. Το θεώρημα Picard-Lindelöf είναι επίσης γνωστό ως θεώρημα Cauchy-Lipschitz ή θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

Πόρισμα 3. *Αν οι f_i, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ είναι συνεχείς, τότε από κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n$ διέρχεται ακριβώς μία τροχιά.*

2.2.1 Σημείο ισορροπίας - ευστάθεια

Θεωρούμε το $n \times n$ αυτόνομο σύστημα:

$$\underline{x}' = f\left(\underline{x}\right) \tag{2.13}$$

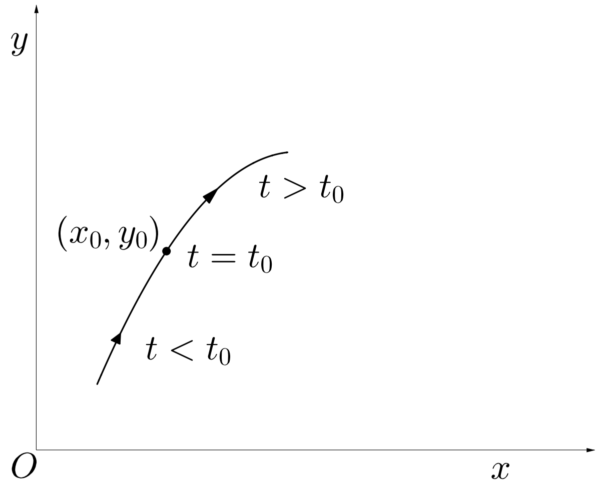
Ορισμός 13. *Το $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο σημείο για το (2.13) αν $\underline{f}\left(\underline{x}_0\right) = 0$. (Η λύση $\underline{x}(t) = \underline{x}_0$ λέγεται λύση ισορροπίας ή λύση μόνιμης κατάστασης.)*

Παράδειγμα 15. *(Φυσική ερμηνεία κρίσιμων σημείων) Έστω σωματίδιο μάζας m που κινείται σε μια διάσταση x από την επίδραση μιας δύναμης $f\,(x, x')$. Από τον δεύτερο νόμο του Newton η εξίσωση κίνησης θα είναι $mx'' = f\,(x, x')$. Η εξίσωση γράφεται ως σύστημα πρώτης τάξης*

$$x' = y,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m} f\,(x, y)\,,$$

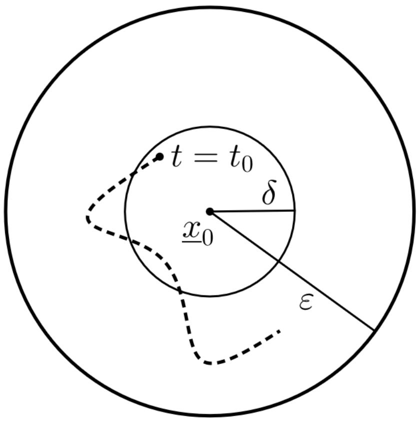
με κρίσιμα σημεία $(x_0, 0)$ αφού $f\,(x_0, 0) = 0$. Ένα κρίσιμο σημείο αντιστοιχεί σε ένα σημείο όπου η ταχύτητα και η επιτάχυνση μηδενίζονται. Έτσι το σωματίδιο είναι ακίνητο και δεν δρα καμία δύναμη σε αυτό.



Σχήμα 2.11: Αναπαράσταση λύσης στον χώρο φάσεων πεδίο διανυσμάτων $f(x, y)$. Τα (x, y) περιγράφουν κίνηση σωματιδίων με ταχύτητα $f(x, y)$ σε κάθε σημείο του χώρου φάσεων.

Ορισμός 14. *Έστω $\underline{x}_0$ μεμονωμένο σημείο ισορροπίας (δηλαδή υπάρχει περιοχή του $\underline{x}_0$ που δεν έχει άλλο σημείο ισορροπίας) του (2.13) τότε:*

*i) Το $\underline{x}_0$ λέγεται **ευσταθές** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε λύση $\underline{\psi}(t)$ του (2.13) τέτοια ώστε $\left|\underline{\psi}(t_0) - \underline{x}_0\right| < \delta$ να ισχύει ότι η $\underline{\psi}(t)$ ορίζεται στο $[t_0, +\infty)$ και $\left|\underline{\psi}(t) - \underline{x}_0\right| < \varepsilon$ για κάθε $t \geq t_0$.*



Σχήμα 2.12: Ευστάθεια $\underline{x}_0$

*ii) Το $\underline{x}_0$ λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν είναι ευσταθές και ισχύει:*

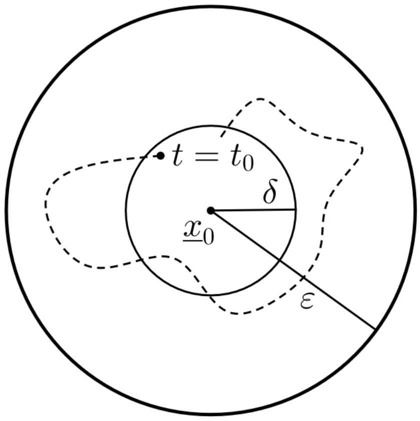
$$\lim_{t\to\infty} \underline{\psi}(t) = \underline{x}_0$$

*iii) Το $\underline{x}_0$ λέγεται **ασταθές** αν δεν είναι ευσταθές.*

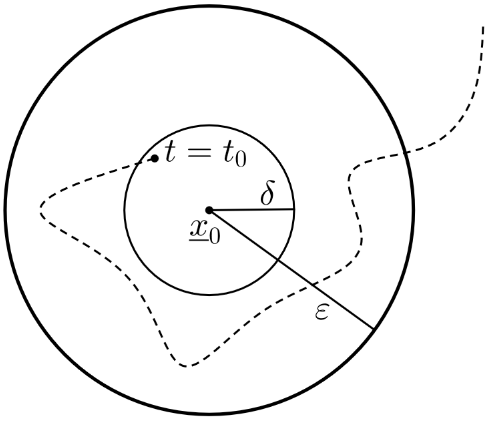
2.2.2 Γραμμικά συστήματα

Το γενικό πρόβλημα:

$$\underline{x}' = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t), \quad t \in I \tag{2.14}$$



Σχήμα 2.13: Αυμπτωτική ευστάθεια $\underline{x}_0$



Σχήμα 2.14: Αστάθεια $\underline{x}_0$

όπου $A : I \to \mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ και $\underline{b} : I \to \mathbb{R}^n$, συνεχείς.
Στην περίπτωση μας έχουμε:

$$\underline{f}\left(t, \underline{x}\right) = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t).$$

Άρα η

$$g(t, y) = A(t)\left(\underline{\varphi}(t) + y\right) + \underline{b}(t) - \underline{\varphi}'(t) = A(t)\underline{y}$$

αφού $\underline{\varphi}(t)$ λύση του (2.14). Άρα, η λύση $\underline{\varphi}(t)$ του (2.14) έχει την ίδια ευστάθεια με το σημείο $\underline{0}$ ως σημείο ισορροπίας του:

$$\underline{y}' = A(t)\underline{y}$$

Πρόταση 1. *Κάθε λύση $\underline{\varphi}(t)$ του προβλήματος*

$$\underline{x}' = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$$

έχει την ίδια ιδιότητα ευστάθειας με το $\underline{0}$ ως σημείο του ομογενούς

$$\underline{x}' = A(t)\underline{x}. \tag{2.15}$$

Πρόταση 2. *i) Η μηδενική λύση του συστήματος $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$ είναι ευσταθής αν και μόνο αν κάθε λύση του είναι φραγμένη.*

ii) Η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν κάθε λύση τείνει στο 0 *καθώς* $t \to \infty$.

iii) Η μηδενική λύση είναι ασταθής αν και μόνο αν το (2.15) *έχει μη-φραγμένες λύσεις σε κάποιο* $[t_0, +\infty)$.

Ορισμός 15. *Έστω* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$. *Η νόρμα* $\|A\|$ *του* A *ορίζεται ως:*

$$\|A\| = \min\{c > 0 : \|Ax\| \leq c\,\|x\|\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

Ιδιότητες:

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$.

ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\|Ax\| > (\|A\| - \varepsilon)\,\|x\|$.

iii) Για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ ισχύει $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Μία άλλη νόρμα στο $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ είναι η ευκλείδεια νόρμα:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)^2}$$

Παράδειγμα 16. *Να εξετάσετε την ευστάθεια των λύσεων του συστήματος* $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}$, *όπου:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2e^t \\ -1 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, πρέπει να ελέγξουμε τις ιδιότητες (για "μεγάλα" t) των λύσεων του $\underline{x}' = A\underline{x}$. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* A *είναι:*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\left[(\lambda+1)^2 + 4\right]$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα A *είναι οι* $-1,\ -1-2i,\ -1+2i$.

- *Στην ιδιοτιμή* -1 *αντιστοιχεί μία λύση* $\underline{\varphi_1}(t) = e^{-t}\underline{w}$, $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ *όπου* $\underline{w}$ *το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.*

- *Έστω* $\underline{u} + i\underline{v}$ *ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής* $-1+2i$. *Τότε παίρνουμε τη μιγαδική λύση:*

$$e^{(-1+2i)t}\left(\underline{u} + i\underline{v}\right) = e^{-t}\left[\cos(2t) + i\sin(2t)\right]\left(\underline{u} + i\underline{v}\right)$$

$$= e^{-t}\left[\left(\cos(2t)\underline{u} - \sin(2t)\underline{v}\right) + i\left(\cos(2t)\underline{v} + \sin(2t)\underline{u}\right)\right]$$

Άρα, στις ιδιοτιμές $-1-2i,\ -1+2i$ *αντιστοιχούν δύο λύσεις* $\underline{\varphi_2}(t)$ *και* $\underline{\varphi_3}(t)$, *κάθε μια εκ των οποίων έχει την εξής μορφή*

$$e^{-t}\left[\cos(2t)\underline{u} + \sin(2t)\underline{v}\right]$$

για κάποιο $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$.

Είναι προφανές ότι $\lim\limits_{t\to+\infty} \underline{\varphi_i}(t) = 0$, *για κάθε* $i = 1, 2, 3$. *Άρα, σύμφωνα με τα θεωρήματα κάθε λύση του* $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}$ *είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.*

Θεώρημα 5. *Έστω το* $n \times n$ *αυτόνομο σύστημα* $\underline{x}' = A\underline{x}$.

i) Αν όλες οι ιδιοτιμές λ_i *του* A *έχουν* $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ *για* $i = 1, 2, \ldots, n$, *τότε η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.*

ii) Αν υπάρχει ιδιοτιμή λ_i *του* A *με* $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ *για* $i = 1, 2, \ldots, n$, *τότε η μηδενική λύση είναι ασταθής.*

iii) Αν για όλες τις ιδιοτιμές λ_i *του* A *ισχύει* $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ *για* $i = 1, 2, \ldots, n$ *και υπάρχει ιδιοτιμή με* $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$, *τότε:*

I) Η μηδενική λύση δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

II) Η μηδενική λύση είναι ευσταθής αν και μόνο αν για τις ιδιοτιμές με $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ *ισχύει ότι η γεωμετρική και αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ίσες.*

Παράδειγμα 17. *Δίνεται το* $\underline{x}' = A\underline{x}$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Έχουμε ότι:*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 < 0,\ \lambda_2 = -2 < 0$$

Επομένως, η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 18. *Έστω* $x'' + 2\mu x' + x = 0,\ \ \mu \in \mathbb{R}$. *Έχουμε ότι:*

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -2\mu y - x \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{pmatrix}$. *Ο* A *έχει ιδιοτιμές* $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$.

i) Αν $\mu \geq 1$ *τότε* $\lambda_{1,2} < 0$ *και άρα το* $(0,0)$ *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.*

ii) Αν $0 < \mu < 1$ *τότε* $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ *με* $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ *άρα το* $(0,0)$ *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.*

iii) Αν $\mu = 0$ *τότε* $\lambda_{1,2} = \pm i$ *και* $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ *άρα το* $(0,0)$ *είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.*

iv) Αν $\mu < 0$ *τότε* $\lambda_{1,2} > 0$ *ή* $\lambda_{1,2} = a + i\beta,\ \ a > 0$ *άρα το* $(0,0)$ *είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.*

Ασκήσεις: Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα.

1. $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$
2. $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}(t)$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ και $\underline{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{cases} x' = x + \mu y \\ y' = x - y \end{cases},\ \ \mu \in \mathbb{R}$.

Αυτόνομα συστήματα στο επίπεδο

Δίνεται το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \tag{2.16}$$

όπου $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Ένα σημείο (x_0, y_0) είναι σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν:

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

Ταξινόμηση σημείων ισορροπίας στο επίπεδο

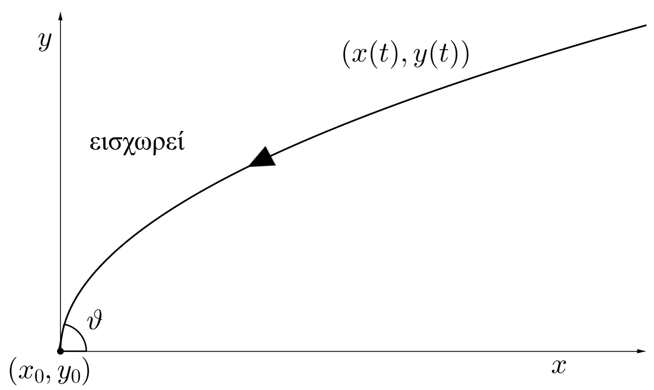
Ορισμός 16. *Έστω (x_0, y_0) απομονωμένο σημείο ισορροπίας του* (2.16). *Λέμε ότι η τροχιά $(x(t), y(t))$ προσεγγίζει το (x_0, y_0) καθώς $t \to \pm\infty$* [6] *αν:*

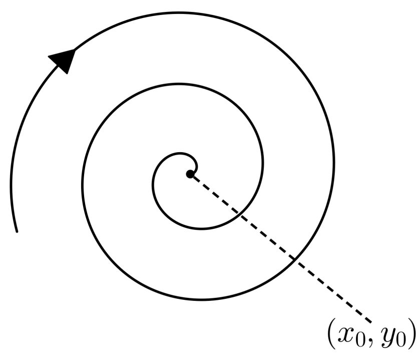
$$\lim_{t\to\pm\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$$

Αν επιπλέον υπάρχει το όριο

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \}$$

τότε λέμε ότι η τροχιά $(x(t), y(t))$ εισχωρεί στο (x_0, y_0) με γωνία $\vartheta = \arctan \ell$.





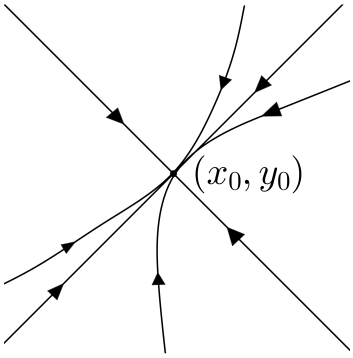
Σχήμα 2.15: Παραδείγματα τροχιών. Η πρώτη εισχωρεί ενώ η δεύτερη όχι.

Ορισμός 17. *Έστω (x_0, y_0) απομονωμένο σημείο ισορροπίας του* (2.16). *Το (x_0, y_0) λέγεται:*

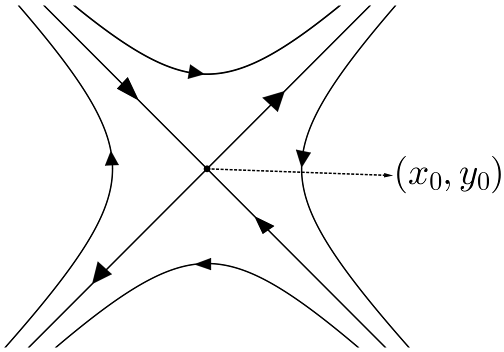
i) Κόμβος: αν κάθε τροχιά εισχωρεί καθώς $t \to \pm\infty$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- *καταβόθρες όταν $t \to +\infty$*
- *πηγή όταν $t \to -\infty$*

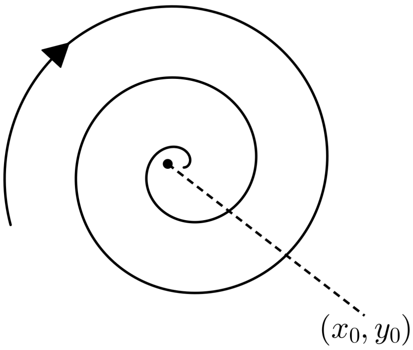
[6] Μια τροχιά δεν μπορεί να προσεγγίζει ένα σημείο ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο.



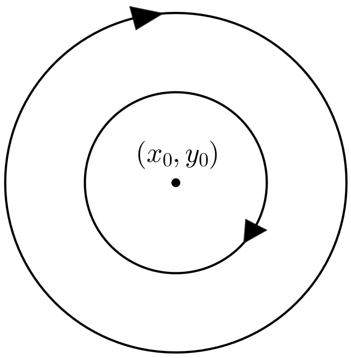
ii) Σαγματικό σημείο: αν υπάρχουν τροχιές που εισχωρούν και τροχιές οι οποίες δεν προσεγγίζουν, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



iii) Εστία: αν όλες οι τροχιές προσεγγίζουν το (x_0, y_0) καθώς $t \to +\infty$ ή όλες προσεγγίζουν το (x_0, y_0) καθώς $t \to -\infty$, αλλά δεν εισχωρούν, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



iv) Κέντρο: αν περιβάλλεται από μία άπειρη οικογένεια κλειστών καμπυλών. Τότε δεν προσεγγίζεται από καμία τροχιά καθώς $t \to +\infty$ ή $t \to -\infty$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παράδειγμα 19. *Έστω το σύστημα:*

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -x + 2y. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Θέτοντας $\underline{w} = (x, y)$ *έχουμε* $\underline{w}' = A\underline{w}$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Θα δείξουμε τι είδους σημείο ισορροπίας είναι το* $(0, 0)$. *Βρίσκουμε τη γενική λύση του συστήματος* (2.17). *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Οπότε οι ιδιοτιμές του A *είναι οι* $\lambda_1 = 1$ *και* $\lambda_2 = 2$. *Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα.*

- *Για* $\lambda = 1$ *έχουμε:*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Για* $\lambda = 2$ *έχουμε:*
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Επομένως, η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\underline{w}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  ή ισοδύναμα $x(t) = c_1 e^t, \quad y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Ζωγραφίζουμε τις τροχιές.

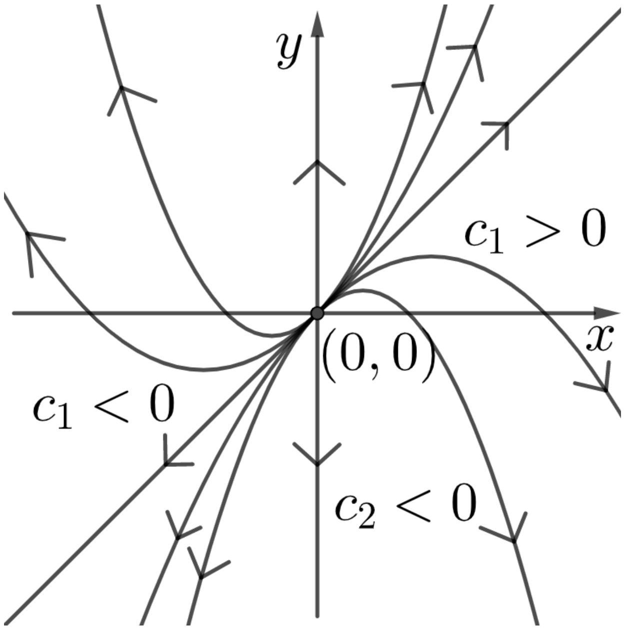
- *Αν* $c_1 = 0$, *τότε* $x(t) = 0, \quad y(t) = c_2 e^t$.
- *Αν* $c_2 = 0$, *τότε* $x(t) = c_1 e^t, \quad y(t) = c_1 e^t$.
- *Αν* $c_1 \neq 0$ *και* $c_2 \neq 0$ *τότε* $y = x + \frac{c_2}{c_1^2} x^2$, *δηλαδή οικογένεια παραβολών που διέρχονται από το* $(0, 0)$ *και εφάπτονται στην διαγώνιο* $y = x$, *όπως φαίνεται στο σχήμα 1.16.*

Παράδειγμα 20. *Έστω το σύστημα:*

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

Θέτοντας $\underline{w} = (x, y)$ *έχουμε* $\underline{w}' = A\underline{w}$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. *Εύκολα, βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι* $\lambda_1 = 2$ *και* $\lambda_2 = -3$ *με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα* $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *και* $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Επομένως, η γενική λύση του συστήματος είναι:*

$$\underline{w}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \\ y(t) = c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-3t} \end{cases}$$



Σχήμα 2.16: Οικογένεια παραβολών εφαπτομενικά της ευθείας $y = x$.

- *Αν* $c_1 = 0$ *τότε:*

$$\begin{cases} x(t) = c_2 e^{-3t} \\ y(t) = -2c_2 e^{-3t} \end{cases}$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) του είναι η ευθεία $y = -2x$.

- *Αν* $c_2 = 0$ *τότε:*

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{2t} \end{cases}$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) του είναι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Τελικά, το $(0,0)$ *είναι σαγματικό (ασταθές) σημείο (δες σχήμα στον ορισμό σαγματικού σημείου).*

Παράδειγμα 21. *Έστω το σύστημα:*

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}, \quad b \neq 0$$

Θέτοντας $\underline{w} = (x, y)$ *έχουμε* $\underline{w}' = A\underline{w}$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. *Εύκολα, βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι* $\lambda_1 = a + ib$ *και* $\lambda_2 = a - ib$. *Εισάγουμε πολικές συντεταγμένες* (r, ϑ):

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

όπου $r = r(t)$ *και* $\vartheta = \vartheta(t)$. *Το αρχικό μας σύστημα γράφεται, λοιπόν, στην ισοδύναμη μορφή:*

$$\begin{cases} r'\cos\vartheta - r\sin\vartheta\vartheta' = r\,(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta) & \text{(I)} \\ r'\sin\vartheta + r\cos\vartheta\vartheta' = r\,(b\cos\vartheta + a\sin\vartheta) & \text{(II)} \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε και προσθέτουμε τις δύο σχέσεις ως $\sin\vartheta \cdot (\mathrm{I}) + \cos\vartheta \cdot (\mathrm{II})$ *και προκύπτει η σχέση:*

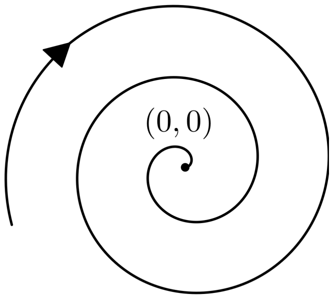
$$r\vartheta' = r\left(b\cos^2\vartheta + a\sin\vartheta\cos\vartheta - a\sin\vartheta\cos\vartheta + b\sin^2\vartheta\right) = rb \Leftrightarrow \vartheta' = b.$$

Δηλαδή, $\vartheta(t) = \vartheta(0) + bt$.
Πολλαπλασιάζουμε και προσθέτουμε τις δύο σχέσεις ως $\cos\vartheta \cdot (\mathrm{I}) + \sin\vartheta \cdot (\mathrm{II})$ *και προκύπτει, με ανάλογο τρόπο, η σχέση* $r' = ar$. *Δηλαδή,* $r(t) = r(0)e^{at}$.
Απαλοίφουμε τον χρόνο $t = \dfrac{\vartheta(t) - \vartheta(0)}{b}$ *και παίρνουμε:*

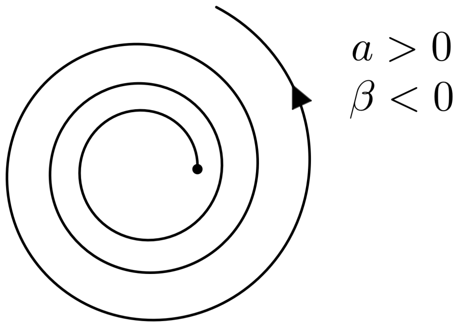
$$r = r(0)e^{\frac{a}{b}(\vartheta - \vartheta(t))} \Rightarrow r = ce^{\frac{a}{b}\vartheta}.$$

Η παραπάνω σχέση δίνει σε πολικές συντεταγμένες την εξίσωση της σπίρας. Άρα:

- *Αν* $a \neq 0$ *έχουμε εστία και ειδικότερα αν* $a < 0$ *η εστία είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και αν* $a > 0$ *είναι ασταθής.*
- *Αν* $a = 0$ *έχουμε κέντρο.*



Σχήμα 2.17: Σπείρα της μορφής $r = ce^{\frac{a}{\beta}\vartheta}$ όπου $a, \beta < 0$.



Σχήμα 2.18: Σπείρα της μορφής $r = ce^{\frac{a}{\beta}\vartheta}$ όπου $a > 0, \beta < 0$.

2.2.3 Γενική θεωρία 2×2 αυτόνομων γραμμικών συστημάτων

Έστω $\underline{x}' = A\underline{x}$ με $\det A \neq 0$. Άρα, το $(0,0)$ είναι απομονωμένο σημείο. Έστω ιδιοτιμές λ_1, λ_2. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 < \lambda_2$. Η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{u_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{u_2}$$

- Αν $c_1 = 0$ τότε $\underline{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{u_2}$.
- Αν $c_2 = 0$ τότε $\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{u_1}$.

Άρα οι ευθείες $\{\lambda u_i : \lambda \in \mathbb{R}\}$ είναι αναλλοίωτες. Πάνω στις ευθείες ελκόμαστε ή απομακρυνόμαστε από το $(0,0)$ ανάλογα με το πρόσημο των λ_i. Έστω $c_1, c_2 \neq 0$ τότε:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{x}'(t)}{\left\|\underline{x}'(t)\right\|} &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{u_1} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{u_2}}{\left\|\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{u_1} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{u_2}\right\|} \\ &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\underline{u_1} + \lambda_2 c_2\underline{u_2}}{\left\|\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\underline{u_1} + \lambda_2 c_2\underline{u_2}\right\|}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Τότε έχουμε $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x'(t)}{\|x'(t)\|} = \dfrac{\lambda_2 c_2\underline{u_2}}{\left\|\lambda_2 c_2\underline{u_2}\right\|}$. Άρα, καθώς το $t \to +\infty$ το $\underline{x}'(t)$ τείνει να γίνει παράλληλο με το $\underline{u_2}$.
Όμοια, καθώς το $t \to -\infty$ το $\underline{x}'(t)$ τείνει να γίνει παράλληλο με το $\underline{u_1}$.

(α) Αν $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, τότε $\lim\limits_{t\to\infty}\underline{x}(t) = 0$. Σύμφωνα με τα παραπάνω κάθε τροχιά εισχωρεί στο $(0,0)$ καθώς $t \to +\infty$ με γωνία $\underline{u_2}$, εκτός αν η τροχιά βρίσκεται στην ευθεία $\{\lambda u_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(β) Αν $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, τότε $\lim\limits_{t\to\infty}\underline{x}(t) = 0$ και εισχωρεί καθώς $t \to -\infty$, οπότε έχουμε ασταθή κόμβο.

(γ) Αν $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, τότε κατά μήκος της ευθείας $\{\lambda u_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ προσεγγίζουμε το $(0,0)$, κατά μήκος της ευθείας $\{\lambda u_2 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ απομακρυνόμαστε από το $(0,0)$. Στην γενική περίπτωση η λύση
$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{u_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{u_2}, \quad c_1, c_2 \neq 0$$
τείνει στο άπειρο και όταν $t \to +\infty$ και όταν $t \to -\infty$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση έχουμε σαγματικό σημείο.

Περίπτωση 2: Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ της μορφής $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ και $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{x}(t) = e^{\alpha t}\left[c_1\left(\cos(\beta t)\underline{u} + \sin(\beta t)\underline{v}\right) + c_2\left(\sin(\beta t)\underline{u} - \cos(\beta t)\underline{v}\right)\right]$$

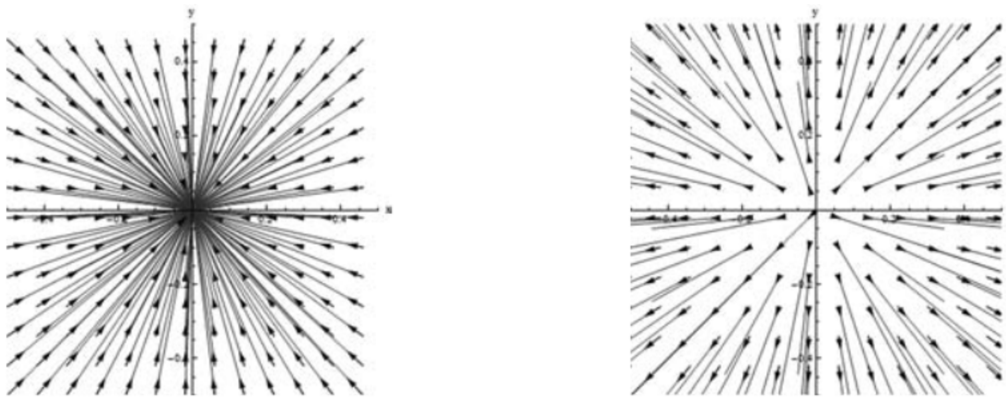
Ισοδύναμα:
$$\underline{x}(t) = ce^{\alpha t}\left[\cos\left(\beta t + \varphi_0\right)\underline{u} + \sin\left(\beta t + \varphi_0\right)\underline{v}\right].$$

- Για $\alpha = 0$, η παραπάνω καμπύλη είναι έλλειψη με κέντρο το $(0,0)$ (άσκηση).
- Για $\alpha \neq 0$ είναι μια ελλειψοειδής σπείρα.

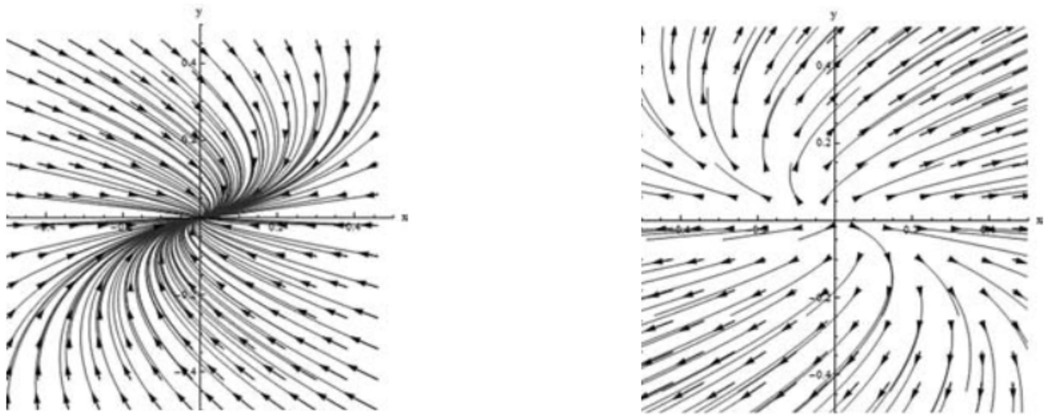
Περίπτωση 3: Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}^*$.

i. Αν η γεωμετρική πολλαπλότητα τους είναι 2, δηλαδή ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος, τότε $A = \lambda\mathbb{I}$. Άρα, η λύση του συστήματος γράφεται στην μορφή:

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{x}(0).$$



Σχήμα 2.19: Αριστερά ασυμπτωματικά ευσταθές άστρο $\lambda < 0$ και δεξιά ασταθές άστρο $\lambda > 0$. [6]



Σχήμα 2.20: Αριστερά ασυμπτωματικά ευσταθής νόθος κόμβος $\lambda < 0$ και δεξιά ασταθής νόθος κόμβος $\lambda > 0$ [6].

ii. Αν η γεωμετρική πολλαπλότητα τους είναι 1 (μη απλής δομής), τότε $A\underline{u} = \lambda\underline{u}$. Η γενική λύση είναι

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\left[c_1\underline{u} + c_2\left(\underline{v} + t\left(A - \lambda\right)\underline{v}\right)\right],$$

όπου $\underline{v} \neq 0$, γραμμικά ανεξάρτητο του $\underline{u}$.

Παράδειγμα 22. *Δίνεται το σύστημα:*

$$x' = 3x - 2y,$$

$$y' = 2x - 2y.$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ *και οι ιδιοτιμές του είναι* $\lambda_1 = -1$ *και* $\lambda_2 = 2$. *Η γενική λύση, μέσω της εύρεσης και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων, είναι η:*

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ας δώσουμε τώρα μια άλλη οπτική μέσω της κανονικής μορφής Jordan. Έστω το σύστημα:

$$\underline{x}' = A\underline{x}. \tag{2.19}$$

Για τον A υπάρχει 2×2 αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας $J = P^{-1}AP$ να έχει μία από τις εξής μορφές:

i. $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ με $\lambda_1 < \lambda_2$.

ii. $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ με $a, b \in \mathbb{R}$.

iii. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Το σύστημα (2.19) γράφεται έτσι ισοδύναμα στη μορφή:

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= PJP^{-1}\underline{x} \Leftrightarrow \\ P^{-1}\underline{x}' &= JP^{-1}\underline{x} \Leftrightarrow \\ \left(P^{-1}\underline{x}\right)' &= JP^{-1}\underline{x}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $\underline{y} = P^{-1}\underline{x}$ και άρα ισοδύναμα έχουμε:

$$\underline{y}' = J\underline{y} \tag{2.20}$$

Το διάγραμμα φάσης του (2.19) είναι μια "παραμορφωμένη" εκδοχή του διαγράμματος φάσης του (2.20).

i. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 y_1 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Θέλουμε να το φέρουμε στην μορφή $\underline{y}' = J\underline{y}$ και ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών. Άρα:

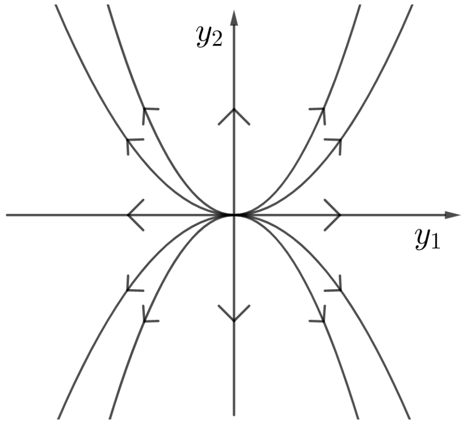
$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{y_2}{y_1} \Rightarrow |y_2| = c\,|y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

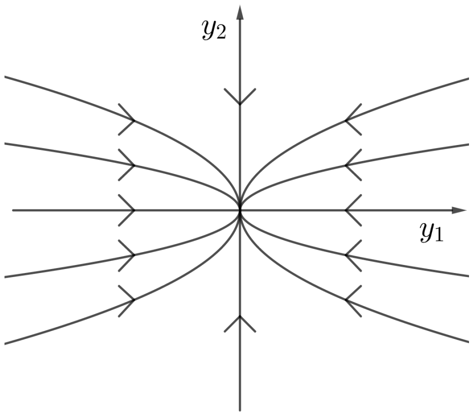
1) Αν $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, τότε $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ και έχουμε κόμβο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.21.

2) Αν $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, τότε $0 < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ και έχουμε κόμβο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.22.

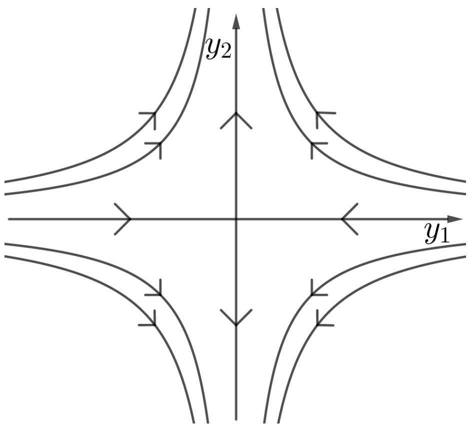
3) Αν $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, τότε $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ και έχουμε σαγματικό σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.23.



Σχήμα 2.21: Ασταθής κόμβος



Σχήμα 2.22: Ευσταθής κόμβος



Σχήμα 2.23: Σάγμα

ii. Ας θυμηθούμε τώρα το παρακάτω σύστημα σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{cases} r' = ar \\ \vartheta' = \beta \end{cases}$$

Τότε αν το $a = 0$ έχουμε κέντρο και αν $a \neq 0$ έχουμε εστία.

iii. Αν έχουμε πίνακα συστήματος της μορφής $A = \lambda\mathbb{I}$ όπου λ μοναδική ιδιοτιμή, τότε η γενική λύση, όπως είχαμε πει παραπάνω, είναι η:

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda t}\underline{y}(0)$$

Αυτή μας δίνει αστεροειδής κόμβους, για $\lambda < 0$ και $\lambda > 0$, αντίστοιχα (βλέπε Σχήμα 2.19).

iv. Τέλος, αν έχουμε ένα σύστημα της μορφής $\underline{y}' = J\underline{y}$, όπου $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, τότε η γενική λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda t}\left[c_1\underline{u} + c_2\left(\underline{v} + t\,(J - \lambda\mathbb{I})\,\underline{v}\right)\right]$$

Για να βρω το $\underline{u}$ κάνω το εξής:

$$J\underline{u} = \lambda\underline{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επίσης, επιλέγουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα για το $\underline{v}$, όπως για παράδειγμα $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Άρα:

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda t}\left[c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \underline{y}(t) = e^{\lambda t}\left[c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right] = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή:

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t}\,(c_1 + c_2 t) \\ \quad y(t) = c_2 e^{\lambda} t \end{cases}$$

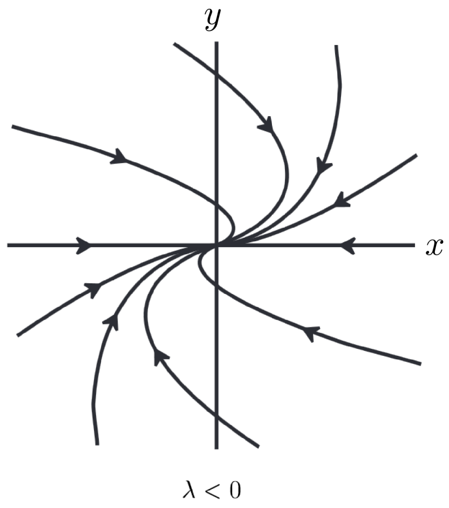
Έστω $\lambda < 0$. Προφανώς $(x(t), y(t)) \xrightarrow{t\to+\infty} (0, 0)$. Θα βρούμε τώρα την γωνία με την οποία γίνεται αυτή η σύγκλιση. Έχουμε:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_2 e^{\lambda t}}{(c_1 + c_2 t)\,e^{\lambda t}} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 t}$$

Αν $c_2 = 0$, τότε $y(t) = 0$. Αν $c_2 \neq 0$, τότε:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\frac{c_1}{c_2 t} + 1}$$

Επομένως, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, δηλαδή η κλίση τείνει στο 0 καθώς το t μεγαλώνει απεριόριστα και επίσης, για μεγάλα t έχουμε $\dfrac{y(t)}{x(t)} > 0$ άρα τα $x(t)$, $y(t)$ είναι ομόσημα.



Σχήμα 2.24: Ευσταθής κόμβος [6]

.

2.2.4 Γραμμικοποίηση

Έστω το σύστημα:

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \tag{2.21}$$

με σημείο ισορροπία του (x_0, y_0) τέτοιο, ώστε $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$. Ο σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $(x_0, y_0) = (0, 0)$, αλλιώς θέτουμε $X = x - x_0$ και $Y = y - y_0$. Η βασική ιδέα είναι η εξής. Για (x, y) κοντά στο $(0, 0)$ προσεγγίζουμε τις $F(x, y)$ και $G(x, y)$ από τις $F_x(0, 0)\,x + F_y(0, 0)\,y$ και $G_x(0, 0)\,x + G_y(0, 0)\,y$. Αυτό προκύπτει από τον εξής συλλογισμό (βέλτιστη αφινική προσέγγιση Taylor)

$$F(x, y) = F(0, 0) + F_x(0, 0) + F_y(0, 0) + h(x, y) = F_x(0, 0)\,x + F_y(0, 0)\,y + h(x, y)\,,$$

όπου $h(x, y)$ πολύ "μικρό" όταν (x, y) κοντά στο $(0, 0)$, διότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Ορισμός 18. *Το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{cases} x' = F_x(0, 0)\,x + F_y(0, 0)\,y \\ y' = G_x(0, 0)\,x + G_y(0, 0)\,y \end{cases} \tag{2.22}$$

ονομάζεται γραμμικοποίηση του συστήματος (2.21) *στο σημείο ισορροπίας* $(0, 0)$.

Θεώρημα 6. ***(Αρχή γραμμικοποίησης)*** *Έστω ότι το* $(0, 0)$ *είναι σημείο ισορροπίας του συστήματός* (2.21) *και έστω ότι*

$$\det\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}_{(0,0)} \neq 0,$$

τότε οι ιδιότητες του $(0, 0)$ *ως σημείο ισορροπίας του* (2.21) *είναι ακριβώς οι ίδιες με τις ιδιότητες του ως σημείο ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος* (2.22).

Σχόλιο: Από την αρχή της γραμμικοποίησης έπεται ότι τα συστήματα (2.21) και (2.22) διατηρούν τις ίδιες ιδιότητες και ειδικότερα:

- ευστάθεια/ασυμπτωτική ευστάθεια/αστάθεια
- κόμβος/σαγματικό σημείο/εστία
- κέντρο (νόθος κόμβος), κ.τ.λ.

Παράδειγμα 23. *Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος:*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \dfrac{1 - x^2}{2} \end{cases}$$

Να γίνει το διάγραμμα φάσης.
Έχουμε δύο σημεία ισορροπίας τα $(-1, 0)$ και $(1, 0)$. Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι ο

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα $J(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Η γραμμικοποίηση είναι:

i) Στο $(-1, 0)$ λαμβάνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x' = F_x(-1, 0)(x + 1) + F_y(-1, 0)y \\ y' = G_x(-1, 0)(x + 1) + G_y(-1, 0)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x + 1 \end{cases}.$$

Άρα κοιτάμε το σύστημα

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = X \end{cases}$$

όπου $X = x + 1$ και $Y = y$. Ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ο A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

και άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 1$. Άρα, το $(-1, 0)$ είναι σαγματικό, ασταθές σημείο ισορροπίας.

ii) Για το $(1, 0)$ λαμβάνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 1 \end{cases}.$$

Ο πίνακας του συστήματος είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$. Άρα, το $(1, 0)$ είναι κέντρο και μάλιστα ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θα σχεδιάσουμε τώρα το διάγραμμα φάσης του συστήματος. Βρίσκουμε πρώτα τα ιδιοδιανύσματα του A που θα μας δώσουν τις κατευθύνσεις των "αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων". Έχουμε

- *Για* $\lambda = -1$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u + v = 0.$$

Άρα, το ιδιοδιάνυσμα σε αυτήν την περίπτωση είναι το:

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

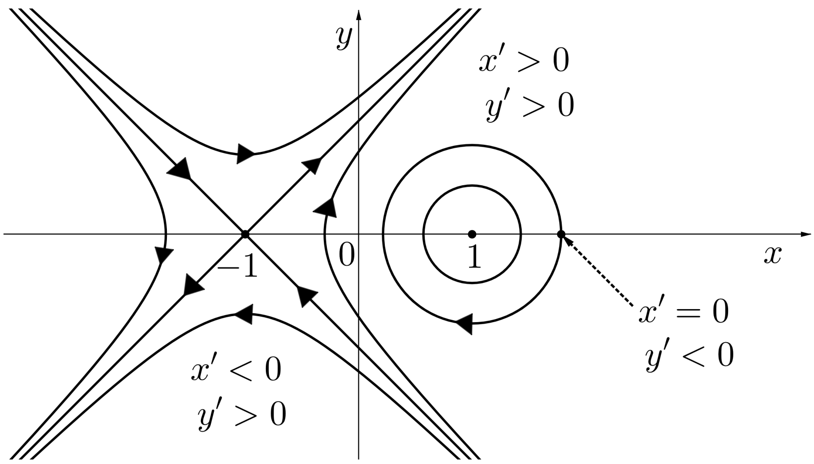
- *Για* $\lambda = 1$*:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και επομένως το εν λόγω ιδιοδιάνυσμα είναι το:

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, το διάγραμμα φάσης είναι το παρακάτω:



Παρατήρηση 4. *Η αρχή της γραμμικοποίησης ισχύει γενικότερα για* $n \times n$ *αυτόνομα συστήματα:*

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Παράδειγμα 24. *Έστω η διαφορική εξίσωση:*

$$u'' + u + (u')^3 = 0. \tag{2.23}$$

Να μετασχηματίσετε την (2.23) *σε σύστημα και να εξετάσετε την ευστάθεια του συστήματος στο* $(0, 0)$.

Θέτουμε:

$$x = u,$$
$$y = u'.$$

Τότε η (2.23) *γράφεται ως:*

$$\begin{aligned} u'' &= y' \\ u'' &= -u - (u')^3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - y^3 \end{aligned} \tag{2.24}$$

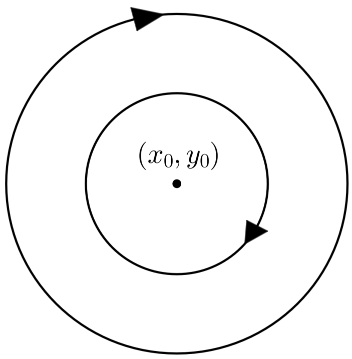
Έπεται ότι το μοναδικό σημείο ισορροπίας του (2.24) *είναι το* $(0, 0)$. *Επίσης, έχουμε:*

$$F(x, y) = y,$$
$$G(x, y) = x - y^3.$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι:

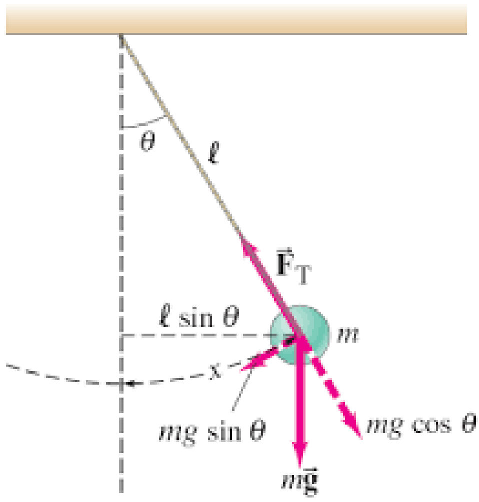
$$J(x, y) = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

Επομένως, $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Οι ιδιοτιμές του* $J(0, 0)$ *είναι οι* $\pm i$ *και είναι μιγαδικές, άρα το* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *είναι κέντρο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.*



Από τα παραπάνω προκύπτει η εξής πληροφορία για τις λύσεις $u(t)$ *του* (2.23). *Αν τα* $|u(0)|$ *και* $|u'(0)|$ *είναι "αρκετά μικρά", τότε η* $u(t)$ *είναι περιοδική (ταλαντώνεται γύρω από το* $u = 0$*).*

Παράδειγμα 25. *(Κίνηση εκκρεμούς) Παρακάτω φαίνεται η κίνηση ενός εκκρεμούς μήκους* ℓ *και μάζας* m*, που σχηματίζει με τον κατακόρυφο άξονα γωνία* ϑ.



Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς που δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned} m\ell^2\vartheta'' + mg\ell\sin\vartheta = 0 &\Leftrightarrow \\ \vartheta'' + k\sin\vartheta = 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

όπου $k := \dfrac{g}{\ell}$ *θετική σταθερά. Θέτουμε* $x = \vartheta$ *και* $y = \vartheta'$ *και άρα η* (2.25) *γράφεται ισοδύναμα ως:*

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -k\sin x. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Σημείο ισορροπίας του (2.26) *είναι κάθε σημείο της μορφής* $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. *Μελετάμε τώρα την ευστάθεια του εν λόγω σημείου ισορροπίας, σταθεροποιώντας το n και γραμμικοποιώντας το πρόβλημα. Το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα έχει πίνακα συντελεστών:*

$$A = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}_{(n\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos x & 0 \end{pmatrix}_{(n\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos(n\pi) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k(-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) *Αν ο n είναι περιττός τότε* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ *και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το* $p(\lambda) = \lambda^2 - k$ *απ' όπου παίρνουμε τις ιδιοτιμές του A, που είναι οι* $\pm\sqrt{k}$. *Επομένως, το σημείο ισορροπίας μας είναι σαγματικό.*

ii) *Αν ο n είναι άρτιος τότε* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$ *και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το* $p(\lambda) = \lambda^2 + k$ *απ' όπου παίρνουμε τις ιδιοτιμές του A, που είναι οι* $\pm i\sqrt{k}$. *Επομένως, το σημείο ισορροπίας μας είναι κέντρο.*

Για να βρούμε το διάγραμμα φάσης του συστήματος (για $k = 1$*) (βλ. Σχήμα 2.25) βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *τα οποία με εύκολους υπολογισμούς είναι τα* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(για* $\lambda = -1$*) και* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(για* $\lambda = 1$*).*

2.2.5 Άμεση ή δεύτερη μέθοδος Lyapunov

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g(0) = 0$, $g' \geq 0$ και η διαφορική εξίσωση:

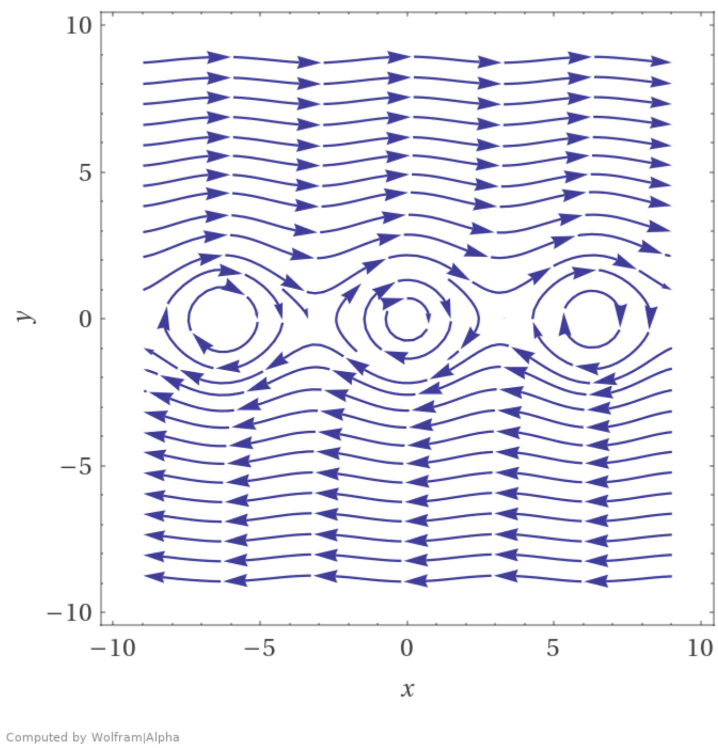
$$u'' + u + g(u') = 0.$$

Έστω $x = u$ και $y = u'$, άρα η διαφορική εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x - g(y). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Κάνουμε γραμμικοποίηση στο σημείο ισορροπίας $(0, 0)$. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -g'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Σχήμα 2.25: Διάγραμμα φάσης εκκρεμούς (βλ. επίσης Σχήμα 2.3)

Άρα, ο πίνακας του συστήματος είναι ο $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -g'(0) \end{pmatrix}$ και έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-g'(0) \pm \sqrt{(g'(0))^2 - 4}}{2}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $0 < g'(0) < 2$ έχουμε ευσταθή εστία.
- Αν $g'(0) > 2$ έχουμε ευσταθή κόμβο.
- Αν $g'(0) = 2$ έχουμε ευσταθή νόθο κόμβο.
- Αν $g'(0) = 0$ έχουμε κέντρο.

Θα μπορούσαμε να εξάγουμε την ευστάθεια του $(0,0)$ και με έναν διαφορετικό τρόπο. Γυρίζουμε στην σχέση (2.27) και πολλαπλασιάζουμε την άνω ισότητα με x και την κάτω με y και παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} xx' &= xy, \\ yy' &= -xy - yg(y). \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις έχουμε $xx' + yy' = -yg(y)$. Άρα:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = -yg(y) \leq 0,$$

αφού g αύξουσα, άρα $g(y) \geq g(0) = 0$ για κάθε $y \geq 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση $(x^2 + y^2)(t)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του t, κι έτσι :

$$|(x, y)(t)| \leq |(x, y)(0)|.$$

Τελικά, έχουμε ευστάθεια του $(0, 0)$ για το μη γραμμικό πρόβλημα.

Ορισμός 19. *Έστω $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Η V λέγεται θετικά (αρνητικά) ορισμένη σε μια περιοχή Ω του $\underline{0}$ αν $V(\underline{x}) > 0$ ($V(\underline{x}) < 0$) στην περιοχή αυτή για $\underline{x} \neq 0$ και $V(\underline{0}) = 0$.

Η V λέγεται θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη σε μια περιοχή Ω του $\underline{0}$ αν το "$>$" ("$<$") του προηγούμενου ορισμού αντικατασταθεί με το "$\geq$" ("$\leq$").

Ορισμός 20. *Έστω το σύστημα $\underline{x}' = \underline{f}\left(\underline{x}\right)$, $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, τότε ορίζουμε την παράγωγο της V ως προς t να είναι το εσωτερικό γινόμενο:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\left(\underline{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j = \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}, \underline{f}\right).$$

Γενικά, θα ασχοληθούμε κυρίως με V θετικά ορισμένη.

Θεώρημα 7. *Έστω το σύστημα $\underline{x}' = \underline{f}\left(\underline{x}\right)$ με $\underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$ και $\underline{\widetilde{x}}(t) = 0$ λύση ισορροπίας. Αν υπάρχει μια συνάρτηση $V\left(\underline{x}\right)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες σε μια περιοχή του Ω του $\underline{0}$:*

(1) Οι συναρτήσεις V και $\dfrac{\partial V}{\partial x_j}$ είναι συνεχείς, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$

(2) V θετικά ορισμένη

(3) V' αρνητικά ημιορισμένη

τότε η $\underline{\widetilde{x}}(t)$ είναι ευσταθής. Αν η ιδιότητα (3) αντικατασταθεί από την ιδιότητα

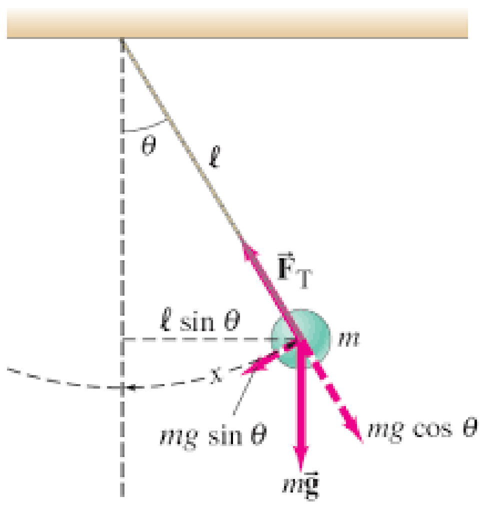
(3′) V' αρνητικά ορισμένη

τότε η $\underline{\widetilde{x}}(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Ορισμός 21. *Αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες (1), (2) και (3) του Θεωρήματος 7, τότε η συνάρτηση V λέγεται **ασθενής συνάρτηση Lyapunov**.*

*Αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες (1), (2) και (3′). του Θεωρήματος 7, τότε η συνάρτηση V λέγεται **ισχυρή συνάρτηση Lyapunov**.*

Παράδειγμα 26. *(Απλό εκκρεμές χωρίς τριβή) Έστω το απλό εκκρεμές της παρακάτω εικόνας.*



Όπως είχαμε προαναφέρει στο Παράδειγμα 25 η διαφορική κίνηση του εκκρεμούς δίνεται από το σύστημα (2.26). Αν V η ολική ενέργεια, τότε

$$V(\vartheta, y) = m\ell\left(\frac{1}{2}\ell y^2 + g(1-\cos\vartheta)\right),$$

όπου $K = \frac{1}{2}\ell y^2$ και $U = g(1-\cos\vartheta)$ η κινητική και δυναμική ενέργεια, αντίστοιχα.

Αν η V είναι θετικά ορισμένη και η V' αρνητικά ορισμένη, τότε το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι ευσταθές (όπως είχαμε δει και στο Παράδειγμα 25).

Παράδειγμα 27. *Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:*

$$u'' + u + u' + (u')^3 = 0$$

Θέτουμε $u = x^2$ και $u' = y$. Τότε παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - y - y^3 \end{aligned}$$

Το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι το $(0,0)$. Επιλέγουμε την συνάρτηση

$$V_1(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Οι συναρτήσεις V_1 και $\frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial y}$ είναι συνεχείς. Επίσης, η V_1 είναι θετικά ορισμένη και

$$V_1'(x,y) = -y^2 - y^4 \leq 0,$$

άρα η V_1' είναι αρνητικά ημιορισμένη. Επομένως, η V_1 είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov και συνεπάγεται ότι το $(0,0)$ είναι ευσταθές.
Τι θα γινόταν αν επιλέγαμε μια άλλη συνάρτηση; Επιλέγουμε την συνάρτηση

$$V_2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + axy.$$

Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$V_2'(x,y) = -ax^2 - (1-a)y^2 - y^4 - (1+y^2)axy \leq -b\left(\frac{x^2+y^2}{2} + axy\right) - y^4$$

Για να είναι $V_2' < 0$ αρκεί

$$\frac{b}{2} \leq \min\left\{\frac{1}{a}, a, 1-a\right\},$$

όποτε αν $b > 0$, τότε $0 < a < 1$. Συμπεραίνουμε ότι για κατάλληλη επιλογή σταθερών a, b η V_2 είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov και συνεπάγεται ότι το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα 8. *Έστω το σύστημα $\underline{x}' = f\left(\underline{x}\right)$ με $\underline{0}$ μεμονωμένο σημείο ισορροπίας και υπάρχει ασθενής συνάρτηση Lyapunov V σε μια περιοχή Ω του $\underline{0}$. Έστω, επιπλέον, ότι η V' δεν μηδενίζεται ταυτοτικά πάνω σε καμία τροχιά του συστήματος (εκτός από το ίδιο το σημείο ισορροπίας), τότε το $\underline{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Παράδειγμα 28. *Έστω το σύστημα:*

$$x' = y,$$
$$y' = -x - \left(1 - x^2\right) y.$$

Η συνάρτηση $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ *είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov στο δίσκο* $x^2 + y^2 < 1$, *αφού οι* V *και* $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ *είναι συνεχείς, και* $V'(x, y) = -2y^2(1 - x^2) \leq 0$. *Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι η* V' *μηδενίζεται μόνο επί των ευθειών* $y = 0$ *και* $x = \pm 1$. *Όμως δεν υπάρχουν τροχιές του συστήματος που να βρίσκονται πάνω σε αυτές τις ευθείες, αφού επί της* $y = 0$ *ισχύει* $y' = -x \neq 0$ *και επί των* $x = \pm 1$ *ισχύει* $x' = y \neq 0$. *Συνεπώς, από το Θεώρημα 8 το* $(0, 0)$ *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Παράδειγμα 29. *Έστω το σύστημα*

$$x' = -x,$$
$$y' = x^2 y - y.$$

Θα δείξουμε ότι η $V(x, y) = x^2 + y^2$ *είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov στο* $(0, 0)$.
Οι ιδιότητες (1) και (2) ικανοποιούνται, γιατί η V *είναι συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους και θετικά ορισμένη. Επίσης, για κάθε* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *έχουμε*

$$V' = V_x x' + V_y y' = 2x(-x) + 2y\left(x^2 y - y\right) = -2x^2 + 2x^2 y^2 - 2y^2 \leq 0$$

και $V'(0, 0) = 0$. *Για να δείξουμε ότι η* V *είναι αρνητικά ορισμένη αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *ισχύει*

$$2\left(-x^2 + x^2 y^2 - y^2\right) \leq c_0\left(-x^2 - y^2\right),$$

όπου c_0 *θετική σταθερά. Έστω ότι* $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < \frac{1}{2}\right\}$. *Τότε για κάθε* $(x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ *έχουμε*

$$V'(x, y) = 2\left(-x^2 + x^2 y^2 - y^2\right) \leq 2\left(-x^2 + \frac{y^2}{2} - y^2\right) = 2\left(-x^2 - \frac{y^2}{2}\right) \leq -x^2 - y^2 < 0$$

και αφού $V'(0, 0) = 0$, *ικανοποιούνται οι συνθήκες (1) έως (3΄). Συνεπώς, η* V *είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov.*

2.2.6 Κλειστές τροχιές

Κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας των μη γραμμικών συστημάτων είναι ο έλεγχος για τον αν το σύστημα έχει κλειστές τροχιές. Τέτοιες τροχιές σχετίζονται με περιοδικές λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y), \\ y' &= G(x, y). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Μια λύση $(x(t), y(t))$ του προβλήματος (2.28) είναι *περιοδική* αν καμία από τις $x(t), y(t)$ δεν είναι σταθερή και υπάρχει $T > 0$ τέτοιο, ώστε $x(t + T) = x(t)$ και $y(t + T) = y(t)$, για κάθε $t \geq 0$. Το μικρότερο τέτοιο T ονομάζεται *περίοδος*.

Παράδειγμα 30. *Θωρούμε το σύστημα:*

$$x' = y,$$
$$y' = -x.$$

Για να βρούμε τις τροχιές παρατηρούμε ότι

$$x'' + x = 0$$

οπότε το σύστημα έχει $2\pi-$*περιοδικές λύσεις*

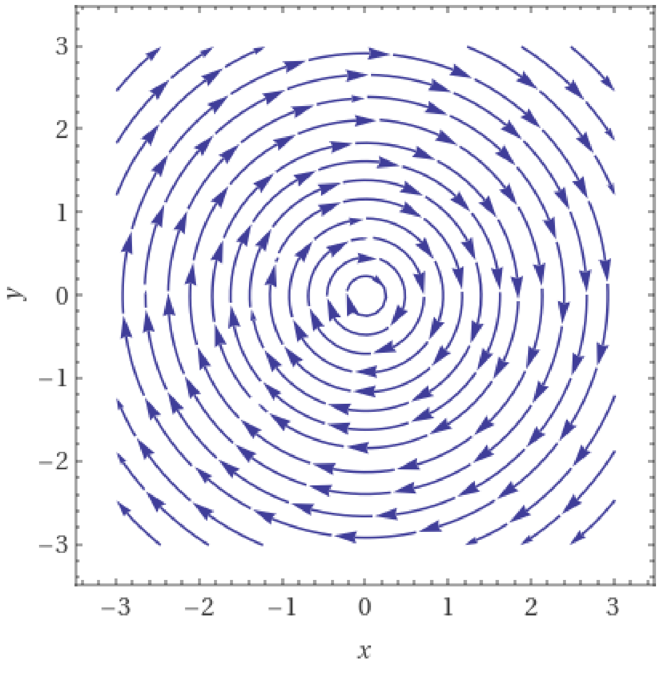
$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$
$$y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Η λύση αυτή αντιστοιχεί στις κλειστές τροχιές (κύκλους)

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2 = r^2$$

Εναλλακτικά λύνουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \Rightarrow x^2 + y^2 = c = r^2.$$



Σχήμα 2.26: Κλειστές τροχιές κύκλου.

Θεώρημα 9. ***(Bendixson - Dulac)*** *Αν η συνάρτηση* $F_x + G_y$ *έχει σταθερό πρόσημο σε ένα χωρίο του επιπέδου φάσεων, τότε το σύστημα (2.28) δεν μπορεί να έχει κλειστή τροχιά σε αυτό το χωρίο.*

Απόδειξη: *Έστω ότι περιέχει μια κλειστή τροχιά* $C: \ x = x(t), \ y = y(t), \ 0 \leq t \leq T$ *και* R *το εσωτερικό της. Από το θεώρημα Green στο επίπεδο έχουμε:*

$$\int_C F\mathrm{d}y - G\mathrm{d}x = \iint_R \left(F_x + G_y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq 0$$

Όμως, ισχύει:

$$\int_C F\mathrm{d}y - G\mathrm{d}x = \int_0^T (FG - GF)\,\mathrm{d}t = 0$$

Άρα, έχουμε άτοπο.

Παράδειγμα 31. *Έστω το σύστημα:*

$$x' = y = F(x, y),$$
$$y' = \left(x^2 + 1\right) y - x^3 = G(x, y).$$

Είναι $F_x + G_y = x^2 + 1 > 0$*, άρα από το θεώρημα Bendixson - Dulac το σύστημα δεν έχει κλειστές τροχιές.*

Θεώρημα 10. ***(Poincaré)*** *Μια κλειστή τροχιά του* (2.28) *περικλείει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο του συστήματος.*

Παράδειγμα 32. *Έστω το σύστημα:*

$$x' = y = F(x, y),$$
$$y' = y^2 + x^2 + 1 = G(x, y).$$

Έχουμε διαδοχικά, $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ *και* $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^2 + x^2 + 1 = 0$*. Όμως,* $G(x, y) \geq 1 > 0$ *και άρα το σύστημα μας δεν παρουσιάζει κρίσιμο σημείο. Συνεπώς, από το θεώρημα Poincare έπεται ότι το σύστημα δεν περιέχει κλειστή τροχιά.*

Θεώρημα 11. ***(Poincare - Bendixson)*** *Έστω* R *κλειστό και φραγμένο χωρίο του επιπέδου, που δεν περιέχει κρίσιμα σημεία του* (2.28)*. Αν* C *είναι μια τροχιά του* (2.28)*, που βρίσκεται στο* R *για κάποιο* t_0 *και παραμένει στο* R *για κάθε* $t > t_0$*, τότε η* C *είτε είναι κλειστή τροχιά ή τείνει σπειροειδώς προς μια κλειστή τροχιά καθώς* $t \to \infty$*.*

Ορισμός 22. *Μια κλειστή τροχιά* C *σε ένα διάγραμμα φάσεων λέγεται οριακός κύκλος αν είναι απομονωμένη από όλες τις άλλες κλειστές τροχιές.*

Παράδειγμα 33. *Θεωρούμε το σύστημα*

$$x' = 4x + 4y - x\left(x^2 + y^2\right),$$
$$y' = -4x + 4y - y\left(x^2 + y^2\right),$$

και $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}$*. Για το σύστημα αυτό μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια κλειστή τροχιά στο* R*, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 11.*

Για να βρούμε τη λύση του συστήματος κάνουμε αλλαγή μεταβλητής μέσω πολικών συντεταγμένων και έχουμε $x = r\cos\vartheta$*,* $y = r\sin\vartheta$*. Από τις γνωστές σχέσεις*

$$r^2 = x^2 + y^2,$$
$$\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

έχουμε παραγωγίζοντας ως προς t*:*

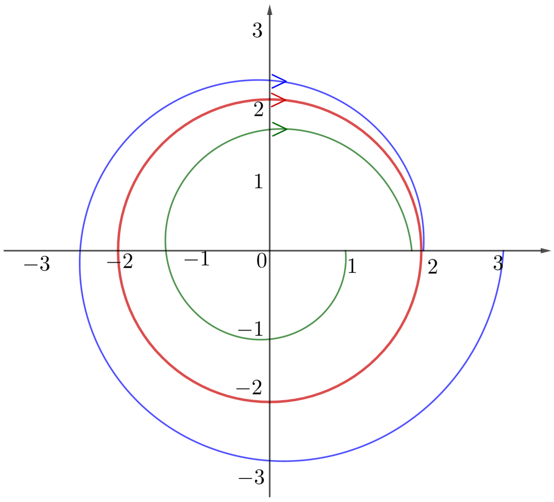
$$\begin{aligned} rr' = xx' + yy' &= 4x^2 + 4yx - x^2\left(x^2 + y^2\right) - 4xy + 4y^2 - y^2\left(x^2 + y^2\right) \\ &= 4\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 + y^2\right)^2 \\ &= 4r^2 - r^4 \\ &= r^2\left(4 - r^2\right) \end{aligned}$$

Συνεπώς, $r' = r(4 - r^2)$ *και* $r' = 0 \Leftrightarrow r = 2$. *Οπότε το* $(0,0)$ *είναι ευσταθές. Για* $r < 2 \Rightarrow r' > 0$ *οπότε το* $(0,0)$ *είναι ασταθές, και για* $r > 2 \Rightarrow r' < 0$ *οπότε το* $(0,0)$ *είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Επίσης:

$$\vartheta' = \frac{y'x - x'y}{r^2} = -\frac{4(x^2 + y^2)}{r^2} = -4.$$

Άρα $\vartheta(t) = -4t + c_0$. *Συνεπώς, η περιοδική τροχιά είναι* $x(t) = 2\cos(-4t + c_0)$ *και* $y(t) = 2\sin(-4t + c_0)$.



Σχήμα 2.27: Ο οριακός κύκλος (κόκκινο) είναι η μόνη κλειστή τροχιά μέσα στο R. Για $r < 2 \Rightarrow r' > 0$ (πράσινο) και για $r > 2 \Rightarrow r' < 0$ (μπλε). Η φορά είναι αυτή που απεικονίζεται, όπως προκύπτει από την παραμέτρηση (πολικές συντεταγμένες) και το γεγονός ότι η $\vartheta(t)$ είναι φθίνουσα.

Βιβλιογραφία

[1] Αλικάκος Ν. Δ. & Καλογερόπουλος Γ.(2007) *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική.

[2] Logan J.D. (2013) *Applied Mathematics*, 4th Edition, WILEY.
(Ελληνική μετάφραση με τίτλο *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2016)

[3] Logan J.D. (2015) *Applied Partial Differential Equations*, 3rd Edition, Springer International Publishing.

[4] Logan J.D. (2008) *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition, WILEY.

[5] Στρατής Ι. Γ. (1992) *Σημειώσεις Ποιοτικής Θεωρίας Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.*

[6] Ιωάννης Μυριτζής (2015) *Δυναμικά Συστήματα*, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.