

1. Στο πρώτο εξάμηνο στο μάθημα Απειροστικός Λογισμός I ένας φοιτητής (Φ) ρωτήθηκε σχετικά με τον ορισμό του ορίου μιας συνάρτησης :

Φ. (φοιτητής):

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $A$  και  $x_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ .

Ορίζουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \text{ αν } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Κ. (καθηγητής) :

Ισχύει ο ορισμός αν αντικαταστήσουμε το  $\varepsilon > 0$  με τη συνθήκη  $\varepsilon > 0$  και  $\varepsilon \in \mathcal{Q}$  ;

Δηλαδή ισχύει το ακόλουθο :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ με } \varepsilon \in \mathcal{Q}, \exists \delta > 0 : x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Φ.: Προφανώς όχι γιατί ο ορισμός απαιτεί να ισχύει για κάθε  $\varepsilon$  θετικό πραγματικό και όχι μόνο για κάθε ρητό.

Εξετάστε αν η απάντηση του φοιτητή είναι σωστή. Αιτιολογήστε τον ισχυρισμό σας

2. Ένας μαθητής απάντησε στην ερώτηση :

«Να βρεθεί, αν υπάρχει, το  $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$  όπου  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ,  $g(x) = \sqrt{3 - x}$ »

ως εξής :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0 + 0 = 0$$

Πως θα αντιμετωπίζατε στη τάξη την παραπάνω απάντηση.

3. Ένας μαθητής σας κάνει στη τάξη την παρακάτω ερώτηση :

Για να υπολογίσουμε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(x)$  κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$x = y + \pi$  και επειδή  $\eta\mu(y + \pi) = -\eta\mu(y)$  παίρνουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(x) = \lim_{y + \pi \rightarrow +\infty} \eta\mu(y + \pi) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-\eta\mu(y)) = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \eta\mu(y) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(x) \text{ από}$$

όπου προκύπτει :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(x) = 0$ .

Στην συνέχεια κάνοντας πάλι την αλλαγή  $x = \pi/2 - z$  και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $\eta\mu(\pi/2 - z) = \sigma\upsilon\nu(z)$  προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu(x) = \lim_{\pi \rightarrow +\infty} \eta\mu(\pi/2 - x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} (\eta\mu(-z)) = - \lim_{z \rightarrow +\infty} \eta\mu(z) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sigma\upsilon\nu^2(x) + \eta\mu^2(x)) = 0^2 + 0^2 = 0.$$

$$\text{Από την άλλη όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sigma\upsilon\nu^2(x) + \eta\mu^2(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1.$$

Που υπάρχει λάθος;

- i. Τι νομίζετε ότι αγνοεί ή δεν έχει καταλάβει ο μαθητής ;
  - ii. Πόσο συνηθισμένο θεωρείτε ότι είναι το παραπάνω λάθος και σε τι οφείλεται ;
  - iii. Πως θα αντιμετωπίζατε στη τάξη την παραπάνω ερώτηση του μαθητή;
4. Σχεδιάζετε να εισάγετε στην τάξη σας την έννοια του ορίου  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ , όπου  $x_0, \alpha$  πραγματικοί αριθμοί.
- α) Περιγράψτε μια εισαγωγική δραστηριότητα που θα μπορούσε να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών για την έννοια.
  - β) Πως θα δημιουργούσατε στους μαθητές μια σωστή διαισθητική αντίληψη για την έννοια;
  - γ) Ποιες παρανοήσεις θεωρείτε ότι αναπτύσσουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου;
  - δ) Ποια παραδείγματα θα χρησιμοποιούσατε για να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα της έννοιας. Αναφέρατε το στόχο του κάθε παραδείγματος;