

Μαθηματικά στην Οικονομία και τη Διοίκηση Εξετάσεις Περιόδου Φεβρουαρίου 2006

Θέμα 1. Θεωρούμε το μοντέλο παραγγελιών ΕΟQ με το κριτήριο της παρούσας αξίας, στο οποίο επιτρέπονται ελλείψεις. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι ακολουθούμε πολιτική παραγγελιών (q, ν) αντίστοιχη με το μοντέλο μέσου κόστους και ελεγχόμενες ελλείψεις, όπου q η ποσότητα παραγγελίας και ν το μέγιστο επίπεδο ελλείψεων, με $-q < \nu < 0$. Η τιμή πώλησης ανά μονάδα προϊόντος είναι ίση με p και το κόστος αγοράς ανά μονάδα ίσο με c . Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι ίσο με K . Πωλήσεις γίνονται με ρυθμό λ ανά μονάδα χρόνου (και επομένως λαμβάνονται και έσοδα με ρυθμό $p\lambda$ ανά μονάδα χρόνου) μόνο κατά τα χρονικά διαστήματα στα οποία υπάρχει θετικό απόθεμα. Το μοναδιαίο κόστος διατήρησης αποθεμάτων h όπως και το μοναδιαίο κόστος ελλείψεων b είναι μηδενικά. Το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι ίσο με α .

(α) Να βρεθεί η έκφραση $R(u, y)$ για την παρούσα αξία του συνολικού καθαρού κέρδους άπειρου ορίζοντα ως συνάρτηση των u και y όπου u το διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών παραγγελιών και $y = \nu/\lambda$.

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις που εκφράζουν τις αναγκαίες συνθήκες μεγιστοποίησης της συνάρτησης κέρδους R .

(γ) Στην περίπτωση που δεν επιτρέπονται ελλείψεις έχουμε δείξει ότι αν α και $k\lambda/c$ τείνουν στο μηδέν, τότε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας τείνει ασυμπτωτικά στη βέλτιστη λύση του μέσου κόστους. Να βρεθούν οι αντίστοιχες συνθήκες για την περίπτωση των ελλείψεων.

Θέμα 2. Θεωρήστε το πρόβλημα DEL με μηδενικό σταθερό κόστος παραγγελίας ($K = 0$). Δείξτε ότι μπορεί να εκφραστεί ως πρόβλημα μεταφοράς και γράψτε το αντίστοιχο μοντέλο.

Θέμα 3. Για ένα προϊόν η ζήτηση φθάνει ακολουθώντας διαδικασία Poisson με ρυθμό λ αφιξεις την ημέρα. Κάθε άφιξη αντιπροσωπεύει ζήτηση για μία μονάδα προϊόντος. Αν τη στιγμή της άφιξης μιας ζήτησης δεν υπάρχει διαθέσιμο προϊόν αυτή μπαίνει σε εκκρεμότητα για να ικανοποιηθεί όταν έρθει νέα παραλαβή. Ο πωλητής μπορεί να δώσει παραγγελία οποτεδήποτε, και ο χρόνος από τη στιγμή της παραγγελίας μέχρι την παραλαβή είναι ίσος με L . Το κόστος ελλείψεων είναι ίσο με b ανά μονάδα προϊόντος και ανά ημέρα. Το κόστος αποθήκευσης είναι ίσο με h_1 ανά ημέρα και ανά μονάδα προϊόντος για τις πρώτες M μονάδες που διατηρούνται σε απόθεμα, και h_2 ανά ημέρα και ανά μονάδα προϊόντος για κάθε μονάδα επιπλέον των πρώτων M .

(α) Έστω ότι το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι ίσο με μηδέν και ότι περιοριζόμαστε σε πολιτικές αποθέματος βάσης. Να υπολογιστεί το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε στάσιμη κατάσταση ως συνάρτηση του αποθέματος βάσης s .

(β) Να επαναληφθεί το (α) όταν το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι ίσο με K και θεωρούμε την κλάση των πολιτικών (r, q) όπου r το επίπεδο επαναπαραγγελίας (reorder point) και q η ποσότητα παραγγελίας.

Θέμα 4. Ένας λιανοπωλητής αγοράζει στην αρχή της περιόδου ένα προϊόν από τον προμηθευτή σε τιμή c ανά μονάδα και το πωλεί σε τιμή r ανά μονάδα. Το προϊόν μπορεί να πωληθεί μόνο στη διάρκεια της τρέχουσας περιόδου (δεν διατηρείται σε απόθεμα). Η ζήτηση στη διάρκεια της περιόδου είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ , δηλαδή η πυκνότητα πιθανότητας της ζήτησης είναι ίση με $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

(α) Να βρεθεί η βέλτιστη ποσότητα παραγγελιών που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος ανά περίοδο και η βέλτιστη τιμή του κέρδους.

(β) Έστω ότι ο λιανοπωλητής μπορεί να αγοράσει το προϊόν από ένα διαφορετικό προμηθευτή που έχει τη δυνατότητα να του το προμηθεύσει σε όση ποσότητα χρειάζεται την τελευταία στιγμή σε κάθε περίοδο, δηλαδή αφού έχει παρατηρήσει τη ζήτηση. Το κόστος αγοράς από αυτόν τον προμηθευτή είναι ίσο με d ανά μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή d_0 που μπορεί να χρεώσει ο δεύτερος προμηθευτής ώστε να τον προτιμήσει ο λιανοπωλητής.

(γ) Να δειχθεί ότι $d_0 > c$. Είναι αυτό διαισθητικά αναμενόμενο; Γιατί;