ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Απόστολος Μπουρνέτας
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

2007

Κεφάλαιο 1

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά προβλήματα βελτιστοποίησης που μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού. Καθένα από τα προβλήματα που θα αναπτυχθούν αποτελεί εκπρόσωπο μιας ευρύτερης κατηγορίας εφαρμογών.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των συγκεκριμένων μοντέλων θα παρουσιάσουμε τη γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.). Στη γενική περίπτωση ένα π.γ.π. είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης της διανυσματικής μεταβλητής $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, κάτω από ένα σύνολο περιορισμών που εκφράζονται από γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις. Γενικά γράφεται ώς εξής

$$
\begin{array}{rrcll}
\max(\min) & \sum_{j=1}^n c_j x_j & & & \\
\text{υ.π.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & = & b_i, & i = 1, \ldots, m_1 \\
& \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq & b_i, & i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\
& \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \geq & b_i, & i = m_2 + 1, \ldots, m \\
& x_j & \geq & 0, & j = 1, \ldots, n_1 \\
& x_j & \leq & 0, & j = n_1 + 1, \ldots, n_2 \\
& x_j & \in & \mathbb{R}, & j = n_2 + 1, \ldots, n,
\end{array}
\tag{1.1}
$$

όπου $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$ και $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq n$ ακέραιες διαστάσεις και $b_i, c_j, a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ δοσμένες σταθερές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας στην (1.1) έχουμε υποθέσει ότι οι περιορισμοί έχουν διαταχθεί έτσι ώστε οι πρώτοι m_1 περιορισμοί είναι εξισώσεις οι επόμενοι $m_2 - m_1$ ανισώσεις της μορφής $\leq$ και οι τελευταίοι $m - m_2$ ανισώσεις της μορφής $\geq$. Επίσης οι μεταβλητές απόφασης έχουν διαταχθεί έτσι ώστε οι πρώτες n_1 παίρνουν μη αρνητικές τιμές, οι επόμενες $n_2 - n_1$ μη θετικές και οι τελευταίες $n - n_2$ δεν έχουν κανένα περιορισμό ως προς το πρόσημο.

Στο παραπάνω πρόβλημα η συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ ονομάζεται *αντικειμενική συνάρτηση*. Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *εφικτή λύση* αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Η *εφικτή περιοχή* F είναι το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων. Μια εφικτή λύση $\mathbf{x}^*$ είναι *βέλτιστη ή άριστη* αν πετυχαίνει τη μέγιστη (αντ. ελάχιστη) τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ για $\mathbf{x} \in F$, για προβλήματα τύπου max (αντ. min).

Η (1.1) είναι η γενικότερη μορφή ενός π.γ.π.. Γνωρίζουμε όμως ότι με κατάλληλους μετασχηματισμούς ένα π.γ.π. μπορεί να γραφεί σε διάφορες ισοδύναμες μορφές που είναι χρήσιμες για τη μαθηματική του ανάλυση. Δύο τέτοιες μορφές είναι η κανονική μορφή που χρησιμοποιείται στη μελέτη των ιδιοτήτων της βέλτιστης λύσης και η ημικανονική μορφή που είναι χρήσιμη στην ανάπτυξη της θεωρίας της δυϊκότητας.

Ένα π.γ.π. είναι σε *κανονική μορφή* αν το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι max και επίσης $m_1 = m_2 = m$ και $n_1 = n_2 = n$, δηλαδή όλοι οι περιορισμοί είναι ισότητες και όλες οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές.

Ένα π.γ.π. είναι σε *ημικανονική μορφή* αν το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι max και επίσης $m_1 = 0,\ m_2 = m$ και $n_1 = n_2 = n$, δηλαδή όλοι οι περιορισμοί είναι ανισότητες της μορφής $\leq$ και όλες οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές.

Φυσικά κατά τη διαδικασία μετασχηματισμού ενός γενικού π.γ.π. σε κανονική ή ημικανονική μορφή ο αριθμός των περιορισμών και των μεταβλητών δε διατηρείται ο ίδιος όπως στο αρχικό πρόβλημα.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό για ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή:

$$\begin{array}{rrrcl} z = & \max & \mathbf{c}'\mathbf{x} & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array}$$

όπου $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ είναι διάνυσμα στήλης, $\mathbf{c}'$ το ανάστροφο του $\mathbf{c}$, $\mathbf{0}$ το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ πίνακας διαστάσεων $m \times n$, και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

1.2 Προγραμματισμός Παραγωγής

Τα προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής αποτελούν μια από τις κυριότερες εφαρμογές γραμμικού προγραμματισμού. Θα εξετάσουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα παρακάτω.

1.2.1 Παραγωγή Πολλών Προϊόντων σε Μία Περίοδο

Θεωρούμε το πρόβλημα παραγωγής μιας εταιρίας που παράγει n προϊόντα χρησιμοποιώντας m κοινούς πόρους (π.χ. πρώτες ύλες, εργασία, κεφάλαιο, χρόνος μηχανημάτων κλπ.). Όλα τα προϊόντα παράγονται και πωλούνται μέσα στην ίδια περίοδο, χωρίς να διατηρείται απόθεμα για επόμενες περιόδους. Η υπόθεση αυτή είναι λογική για προϊόντα άμεσης κατανάλωσης όπως π.χ. εφημερίδες, ψωμί κλπ.. Τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα εξής:

- c_j = κέρδος ανά μονάδα προϊόντος $j, j = 1, \ldots, n$
- b_i = διαθέσιμη ποσότητα πόρου $i, i = 1, \ldots, m$
- a_{ij} = απαιτούμενη ποσότητα πόρου i ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος j
- d_j =ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα προϊόντος j

Ζητείται το σχέδιο παραγωγής που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.

Για τη μοντελοποίηση ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης ως εξής:

$$x_j = \text{ποσότητα παραγόμενου προϊόντος } j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι το συνολικό κέρδος:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Υπάρχουν επίσης δύο ομάδες περιορισμών. Η πρώτη αναφέρεται στη διαθεσιμότητα των πόρων. Για κάθε πόρο η απαιτούμενη ποσότητα για την παραγωγή των προϊόντων δεν μπορεί να υπερβαίνει τη διαθέσιμη ποσότητα b_i:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Η δεύτερη ομάδα αναφέρεται στις απαιτούμενες ποσότητες:

$$x_j \geq d_j, j = 1, \ldots, n.$$

Τέλος για τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, όλες οι μεταβλητές απόφασης, ως ποσότητες παραγωγής, πρέπει να είναι μή αρνητικές. Βέβαια, αφού $d_j \geq 0$, οι τελευταίοι περιορισμοί συνεπάγονται ότι $x_j \geq 0$, επομένως οι περιορισμοί μη αρνητικότητας είναι στην πραγματικότητα πλεοναστικοί. Παρ' όλα αυτά τους διατηρούμε στο μοντέλο δεδομένου ότι περιλαμβάνονται στην κανονική μορφή. Επομένως το π.γ.π. γράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{rrcll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & d_j, & j = 1, \ldots, n \\ & x_j & \geq & 0, & j = 1, \ldots, n \end{array} \qquad (1.2)$$

1.2.2 Παραγωγή Ενός Προϊόντος σε Πολλές Περιόδους

Ας υποθέσουμε ότι η εταιρία παράγει ένα μόνο προϊόν το οποίο όμως μπορεί να διατηρηθεί σε απόθεμα και να πωληθεί σε μεταγενέστερη χρονική περίοδο. Το πρόβλημα επομένως γίνεται δυναμικό δηλαδή πρέπει να βρεθεί η πολιτική παραγωγής ως συνάρτηση του χρόνου. Μια απλουστευμένη μορφή του προβλήματος είναι η εξής: Ο χρονικός ορίζοντας είναι μήκους N, δηλαδή θα πρέπει να ληφθούν N αποφάσεις παραγωγής, η κάθε μια στην αρχή μιας χρονικής περιόδου (π.χ. εβδομάδας ή μήνα). Κατά την περίοδο $t, t = 1, \ldots, N$, η ζήτηση που θα πρέπει να ικανοποιηθεί είναι ίση με d_t και το μοναδιαίο κόστος παραγωγής είναι ίσο με c_t. Επίσης αν μια ποσότητα προϊόντος κρατηθεί ως απόθεμα κατά την περίοδο t έως την επόμενη περίοδο $t+1$, τότε το κόστος αποθέματος είναι ίσο με h_t ανά μονάδα προϊόντος, για $t = 1, \ldots, N-1$. Αν στο τέλος της περιόδου N υπάρχει απόθεμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί, το κόστος του ανά μονάδα είναι ίσο με h_N (αυτό το τελευταίο κόστος μπορεί να είναι και αρνητικό στην περίπτωση που το τελικό απόθεμα έχει αξία και μπορεί να πωληθεί). Υποθέτουμε ότι υπάρχουν απεριόριστες ποσότητες των απαιτούμενων για την παραγωγή πόρων σε κάθε περίοδο, οπότε δεν υπάρχει περιορισμός στην ποσότητα παραγωγής. Τόσο η παραγωγή όσο και η πώληση του προϊόντος γίνονται ακαριαία στην αρχή κάθε περιόδου. Επίσης η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιηθεί ακριβώς, δηλαδή δεν επιτρέπονται ελλείψεις. Τέλος υποθέτουμε ότι στην αρχή της περιόδου 1 υπάρχει ήδη στην αποθήκη ποσότητα προϊόντος ίση με I_1.

Το πρόβλημα είναι να βρεθούν οι ποσότητες παραγωγής σε κάθε περίοδο έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής και αποθεμάτων στη διάρκεια του ορίζοντα προγραμματισμού.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου π.γ.π. για αυτή την κατηγορία προβλημάτων οι κατάλληλες μεταβλητές απόφασης είναι

$$x_t = \text{ποσότητα παραγωγής κατά την περίοδο } \ t, t = 1, \ldots, N$$

και

$$I_t = \text{μέγεθος αποθέματος στην αρχή της περιόδου } \ t, t = 2, \ldots, N+1.$$

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη του προβλήματος σημειώνουμε ότι η μεταβλητή I_{N+1} παριστάνει το τελικό απόθεμα μετά το τέλος του ορίζοντα. Επίσης η ποσότητα I_1 δηλαδή το αρχικό απόθεμα είναι δοσμένη παράμετρος του προβλήματος και όχι μεταβλητή απόφασης.

Για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης έχουμε ότι το συνολικό κόστος αποτελείται από το κόστος παραγωγής και το κόστος αποθεμάτων. Το κόστος παραγωγής κατά την περίοδο t είναι ίσο με $c_t x_t$. Για το κόστος αποθεμάτων, παρατηρούμε ότι στην περίοδο t η παραγωγή και οι πωλήσεις γίνονται στην αρχή, επομένως κατά τη διάρκεια της περιόδου η ποσότητα που διατηρείται σε απόθεμα είναι ίση με την ποσότητα I_{t+1} που θα είναι διαθέσιμη στην αρχή της επόμενης περιόδου. Συνεπώς, το κόστος αποθέματος που προκύπτει κατά την περίοδο t είναι ίσο με $h_t I_{t+1}$. Ισοδύναμα μπορούμε να δούμε ότι το απόθεμα I_t που υπάρχει στην αρχή της περιόδου t διατηρήθηκε στην αποθήκη κατά τη διάρκεια της προηγούμενης περιόδου $t-1$, και το κόστος που προέκυψε κατά τη διατήρησή του είναι ίσο με $h_{t-1} I_t$. Με βάση τα παραπάνω το συνολικό κόστος είναι ίσο με

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{I}) = \sum_{t=1}^{N} c_t x_t + \sum_{t=1}^{N} h_t I_{t+1}.$$

Οι μόνοι περιορισμοί που αναφέρονται ρητά είναι ότι πρέπει να ικανοποιηθεί η ζήτηση σε κάθε περίοδο. Ας δούμε τι γίνεται την περίοδο t. Στην αρχή της περιόδου υπάρχει απόθεμα I_t και παράγεται μια ποσότητα x_t. Επομένως η συνολική ποσότητα που είναι διαθέσιμη για πώληση είναι ίση με $I_t + x_t$. Από αυτή μια ποσότητα d_t θα πωληθεί και το υπόλοιπο θα μεταφερθεί ως απόθεμα I_{t+1} στην αρχή της επόμενης περιόδου. Επομένως οι ποσότητες αυτές συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$I_t + x_t = d_t + I_{t+1}, \ t = 1, \ldots, N. \tag{1.3}$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι εξισώσεις (1.3) επιτελούν διπλό σκοπό. Πρώτα εξασφαλίζουν ότι οι μεταβλητές I_t και x_t συνδέονται μεταξύ τους και δεν μπορούν να πάρουν αυθαίρετες τιμές. Επιπρόσθετα όμως εξασφαλίζουν ότι σε κάθε περίοδο υπάρχει η απαραίτητη ποσότητα για να ικανοποιηθεί η ζήτηση. Πραγματικά, αν απαιτήσουμε οι μεταβλητές x_t, I_t να είναι όλες μη αρνητικές, τότε από την παραπάνω εξίσωση, αφού

$I_{t+1} \geq 0$, προκύπτει ότι $I_t + x_t \geq d_t$, δηλαδή η ζήτηση της περιόδου t μπορεί να ικανοποιηθεί εξ ολοκλήρου. Δεν χρειάζονται επομένως ξεχωριστοί περιορισμοί για να εξασφαλιστεί ότι δε θα προκύψουν ελλείψεις.

Τελικά το π.γ.π. γράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{lllll} \min & \sum_{t=1}^{N} c_t x_t + \sum_{t=1}^{N} h_t I_{t+1} & & & \\ \text{υ.π.} & I_t + x_t - I_{t+1} & = & d_t, & t = 1, \ldots, N. \\ & x_t & \geq & 0, & t = 1, \ldots, N \\ & I_t & \geq & 0, & t = 2, \ldots, N+1 \end{array} \tag{1.4}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η επιλογή των παραπάνω μεταβλητών απόφασης δεν είναι η μόνη δυνατή. Πραγματικά από την (1.3) βλέπουμε ότι $I_{t+1} = I_t + x_t = d_t$. Επομένως,

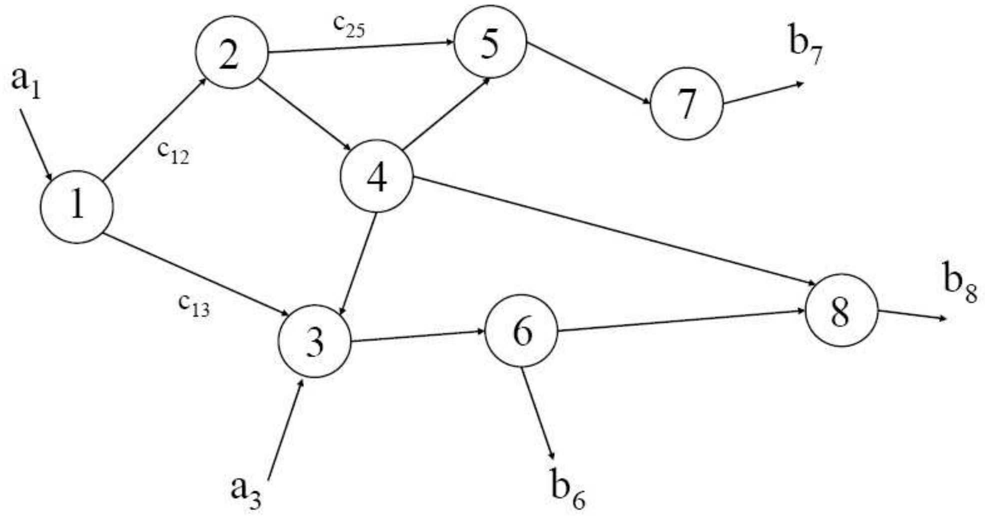
$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + x_1 - d_1 \\ I_3 &= I_2 + x_2 - d_2 = I_1 + x_1 + x_2 - (d_1 + d_2), \\ &\ldots \end{aligned}$$

δηλαδή οι I_t μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των x_t, και να παραλειφθούν από το μοντέλο. Με τον τρόπο αυτό θα είχαμε ένα π.γ.π. με N μεταβλητές απόφασης αντί $2N$ που έχουμε τώρα. Από την άλλη πλευρά όμως η διαμόρφωση της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών θα γινόταν πολύ πιο πολύπλοκη. Γι αυτό το λόγο στην πλειονότητα των εφαρμογών προγραμματισμού παραγωγής ακολουθείται η προσέγγιση να χρησιμοποιούνται ξεχωριστές μεταβλητές για τις ποσότητες αποθέματος. Οι μεταβλητές αυτές συχνά αναφέρονται ως *βοηθητικές μεταβλητές*, επειδή η χρήση τους δεν είναι απαραίτητη, και μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των υπόλοιπων. Η χρήση ή όχι βοηθητικών μεταβλητών γενικά διευκολύνει την έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών ενός π.γ.π., δε θα πρέπει όμως να γίνεται αλόγιστα καθώς η εισαγωγή τους αυξάνει τη διάσταση του προβλήματος.

Το δυναμικό πρόβλημα παραγωγής που παρουσιάσαμε σ' αυτή την παράγραφο βασίζεται σε αρκετές απλουστευτικές παραδοχές, ο σκοπός των οποίων ήταν να εκφραστούν με σαφήνεια και απλότητα οι βασικές ιδέες της μοντελοποίησης τέτοιου είδους εφαρμογών. Είναι σχετικά εύκολο να τροποποιηθεί αυτό το αρχικό μοντέλο για να ληφθούν υπ' όψη στοιχεία όπως περισσότερα από ένα προϊόντα, περιορισμένη διαθεσιμότητα πρώτων υλών σε κάθε περίοδο, περιορισμένη χωρητικότητα αποθηκευτικού χώρου κλπ.. Τέτοιες επεκτάσεις αναφέρονται στις ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου.

1.3 Προβλήματα Ροής σε Δίκτυα

Οι εφαρμογές αυτής της κατηγορίας έχουν τα παρακάτω κοινά χαρακτηριστικά. Υπάρχει ένα προϊόν που διανέμεται πάνω σε ένα δίκτυο εγκαταστάσεων. Το δίκτυο αποτελείται από κόμβους οι οποίοι αντιστοιχούν σε αρχικούς, ενδιάμεσους ή τερματικούς σταθμούς για την κυκλοφορία του προϊόντος, και από ακμές που συνδέουν τους κόμβους μεταξύ τους και αντιστοιχούν σε δυνατές διαδρομές για τη μεταφορά του προϊόντος. Το προϊόν μπορεί να είναι κάποιο υλικό αγαθό που μεταφέρεται από τις εγκαταστάσεις παραγωγής στους σταθμούς πώλησης μέσω ενός δικτύου διανομής. Μπορεί όμως να είναι και μια μη



Σχήμα 1.1: Δίκτυο Διανομής

υλική οντότητα, όπως π.χ. μια ραδιοφωνική εκπομπή ή ένα πακέτο τηλεπικοινωνίας που αναμεταδίδεται μέσω ενός δικτύου κεραιών ή/και δορυφόρων από το σημείο εκπομπής σε ένα ή περισσότερα σημεία τελικής λήψης.

Το δίκτυο αντιστοιχεί μαθηματικά σε ένα γράφημα κόμβων και ακμών όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Στο γράφημα οι κόμβοι αντιστοιχούν σε εγκαταστάσεις (π.χ. εργοστάσια παραγωγής, διαμετακομιστικούς σταθμούς, αποθήκες, σημεία πώλησης κλπ) και οι ακμές σε διόδους απευθείας μεταφοράς μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Οι ακμές είναι κατευθυνόμενες και επιτρέπουν τη μεταφορά από τον αρχικό προς τον τελικό κόμβο της ακμής. Για παράδειγμα στο δίκτυο του Σχήματος 1.1 είναι δυνατό να γίνει απευθείας μεταφορά προϊόντος από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2 αλλά όχι από τον 2 στον 1. Επίσης είναι δυνατό να γίνει μεταφορά από τον 1 στον 5 αλλά όχι άμεσα. Αυτή μπορεί να γίνει με μια από τις σύνθετες διαδρομές $1 \to 2 \to 5$ και $1 \to 2 \to 4 \to 5$.

Γενικά ένα δίκτυο μεταφοράς ορίζεται ως ένα πεπερασμένο σύνολο κόμβων V, που χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο $\{1,\ldots,N\}$ για κάποιο $N < \infty$, και ένα σύνολο ακμών E. Μια ακμή προσδιορίζεται μονοσήμαντα από ένα διατεταγμένο ζεύγος (i,j) με $i,j \in V, i \neq j$. Επομένως το σύνολο των ακμών είναι $E \subset V \times V$.

Σε κάθε ακμή (i,j) αντιστοιχεί ένα κόστος c_{ij} και μια χωρητικότητα (capacity) v_{ij}. Το c_{ij} αντιπροσωπεύει το κόστος ανά μονάδα μεταφερόμενης ποσότητας κατά μήκος της ακμής (i,j) και το v_{ij} τη μέγιστη ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί κατά μήκος της ακμής.

Τέλος σε κάθε κόμβο i αντιστοιχούν η διαθέσιμη (εισερχόμενη) και απαιτούμενη (εξερχόμενη) ποσότητα a_i και b_i αντίστοιχα. Η a_i συμβολίζει μια ποσότητα προϊόντος που είναι διαθέσιμη στον κόμβο i από εξωτερικές πηγές. Η b_i συμβολίζει ποσότητα προϊόντος που απαιτείται να διατεθεί από τον κόμβο i σε εξωτερικούς προορισμούς. Η εισερχόμενη ποσότητα a_i μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε για να καλύψει μέρος ή όλη την απαίτηση για την εξερχόμενη ποσότητα στον ίδιο κόμβο i, είτε για να μεταφερθεί μέσω του δικτύου σε άλλους κόμβους. Αντίστοιχα, η απαιτούμενη ποσότητα b_i μπορεί να καλυφθεί είτε από τυχόν διαθέσιμη ποσότητα του ίδιου κόμβου είτε από ποσότητες που έχουν μεταφερθεί στον κόμβο i από άλλους κόμβους.

1.3.1 Το πρόβλημα διαμετακομιδής

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης που ανακύπτουν αναφέρονται στον προσδιορισμό ποσοτήτων που μεταφέρονται κατά μήκος των ακμών έτσι ώστε να βελτιστοποιείται κάποιο κριτήριο. Το πιο γενικό πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι το *πρόβλημα διαμετακομιδής (capacitated transshipment problem)* που ορίζεται ως εξής: Να προσδιοριστούν οι μεταφερόμενες ποσότητες που ικανοποιούν τις διαθέσιμες και απαιτούμενες ποσότητες σε κάθε κόμβο, δεν υπερβαίνουν τις χωρητικότητες των ακμών και ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Για τη μοντελοποίηση προβλημάτων ροής σε δίκτυα όπως αυτό, η τυπική προσέγγιση είναι να ορίζονται ως μεταβλητές απόφασης οι ποσότητες που μεταφέρονται κατά μήκος των ακμών, δηλαδή

$$x_{ij} = \text{ποσότητα που μεταφέρεται κατά μήκος της ακμής } \ (i,j), \quad (i,j) \in E,$$

επομένως η διάσταση του διανύσματος των μεταβλητών απόφασης είναι ίση με $n = |E|$, δηλαδή τον αριθμό των ακμών.

Για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ η αντικειμενική συνάρτηση, που είναι το συνολικό κόστος μεταφοράς, εκφράζεται ως εξής:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}.$$

Οι περιορισμοί είναι δύο ειδών. Κατά πρώτον πρέπει να εξασφαλίζεται ότι η συνολική ποσότητα που εξέρχεται από κάθε κόμβο, είτε για να μεταφερθεί σε άλλους κόμβους ή για να ικανοποιήσει τις εξωτερικές απαιτήσεις του κόμβου, δεν μπορεί να υπερβαίνει τη συνολική εισερχόμενη ποσότητα στον κόμβο, που προέρχεται από τη διαθέσιμη εξωτερική ποσότητα και ποσότητες που μεταφέρονται από άλλους κόμβους. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς οι περιορισμοί αυτοί γράφονται ως εξής:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} + b_i \le \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} + a_i,$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} \ge b_i - a_i, \ i = 1, \ldots, N.$$

Οι περιορισμοί αυτοί αναφέρονται γενικά ως *περιορισμοί ροής (flow constraints)*.

Η δεύτερη κατηγορία περιορισμών εξασφαλίζει ότι δεν παραβιάζονται οι χωρητικότητες των ακμών, δηλαδή

$$x_{ij} \le v_{ij}, \quad (i,j) \in E.$$

Οι περιορισμοί αυτοί αναφέρονται γενικά ως *περιορισμοί χωρητικότητας (capacity constraints)*.

Επομένως το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι συνοπτικά το παρακάτω:

$$\begin{array}{lrcl} \min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \geq & b_i - a_i, \quad i = 1,\dots,N. \\ & x_{ij} & \leq & v_{ij}, \quad (i,j)\in E \\ & x_{ij} & \geq & 0, \quad (i,j)\in E \end{array} \tag{1.5}$$

Στο μοντέλο (1.5) παρατηρούμε ότι η εξάρτηση από τις παραμέτρους $a_i, b_i, i = 1, \dots, N$ είναι μόνο μέσω των διαφορών $a_i - b_i$. Η ποσότητα $a_i - b_i$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η καθαρή διαθέσιμη ποσότητα στον κόμβο i, δηλαδή το υπόλοιπο από τη διαθέσιμη ποσότητα που απομένει όταν αφαιρεθούν οι εξωτερικές απαιτήσεις. Η ποσότητα αυτή μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική αν μετά την αφαίρεση παραμένει στον κόμβο υπόλοιπο διαθέσιμης ποσότητας ή υπόλοιπο απαίτησης αντίστοιχα. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάθε κόμβο i έχουμε $a_i = 0$ ή $b_i = 0$ ή και τα δύο, δηλαδή σε κάθε κόμβο υπάρχει είτε διαθέσιμη ποσότητα ή εξωτερική απαίτηση αλλά όχι και τα δύο ταυτόχρονα. Συνεπώς το σύνολο των κόμβων μπορεί να διαμεριστεί σε τρία υποσύνολα

$$V_s = \{i \in V \mid a_i > 0, b_i = 0\},\ V_d = \{i \in V \mid a_i = 0, b_i > 0\},\ V_t = \{i \in V \mid a_i = b_i = 0\}$$

Τα σύνολα V_s, V_d, V_t ονομάζονται σύνολα πηγών (source), προορισμών (destination) και διαμετακομιδής (transshipment) αντίστοιχα.

Μερικές ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις του γενικού προβλήματος διαμετακομιδής (1.5) παρουσιάζονται παρακάτω.

1.3.2 Το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους

Το *πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους (min-cost flow problem)* ορίζεται ως ένα πρόβλημα διαμετακομιδής στο οποίο δεν υπάρχουν περιορισμοί χωρητικότητας στις ακμές, ή ισοδύναμα κάθε ακμή μπορεί να δεχθεί οποιαδήποτε μεταφερόμενη ποσότητα. Επομένως προκύπτει από το πρόβλημα (1.5) θέτοντας $v_{ij} = \infty$. Συνοπτικά το πρόβλημα γράφεται ως εξής.

$$\begin{array}{lrcl} \min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \geq & b_i - a_i, \quad i = 1,\dots,N. \\ & x_{ij} & \geq & 0, \quad (i,j)\in E \end{array} \tag{1.6}$$

1.3.3 Το πρόβλημα μεταφοράς

Το *πρόβλημα μεταφοράς (transportation problem)* ορίζεται ως ένα πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους στο οποίο δεν υπάρχουν διαμετακομιστικοί κόμβοι ενώ υπάρχει μια ακμή από κάθε πηγή προς κάθε προορισμό. Επομένως στο πρόβλημα αυτό πρέπει να μεταφερθούν ποσότητες από τους κόμβους-πηγές στους κόμβους- προορισμούς. Το πρόβλημα προκύπτει από το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους (1.6) θέτοντας $V_t = \emptyset, E = V_s \times V_d$. Με αυτές τις υποθέσεις το π.γ.π. παίρνει αρκετά απλούστερη μορφή. Συγκεκριμένα, για κάθε κόμβο-πηγή $i \in V_s$ έχουμε $a_i > 0, b_i = 0$. Επίσης το σύνολο των εισερχόμενων ακμών στον κόμβο είναι κενό ενώ το σύνολο των εξερχόμενων ακμών είναι το σύνολο V_d των προορισμών. Επομένως ο περιορισμός ροής για τον κόμβο i

$$\sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} \geq b_i - a_i$$

απλοποιείται στον παρακάτω

$$\sum_{j\in V_d} x_{ij} \leq a_i.$$

Όμοια προκύπτει ότι για κάθε κόμβο-προορισμό $j \in V_d$ ο περιορισμός γράφεται ισοδύναμα

$$\sum_{i\in V_s} x_{ij} \geq b_j.$$

Επομένως το πρόβλημα μεταφοράς αντιστοιχεί στο παρακάτω π.γ.π.

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j\in V_d} x_{ij} & \leq & a_i, & i\in V_s \\ & \sum_{i\in V_s} x_{ij} & \geq & b_j, & j\in V_d \\ & x_{ij} & \geq & 0, & i\in V_s,\ j\in V_d \end{array} \tag{1.7}$$

Ένα πρόβλημα μεταφοράς ονομάζεται *ισορροπημένο (balanced)* αν ισχύει $\sum_{i\in V_s} a_i = \sum_{j\in V_d} b_j$, δηλαδή η συνολική διαθέσιμη ποσότητα στις πηγές είναι ίση με τη συνολικά απαιτούμενη ποσότητα στους περιορισμούς. Για ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς περιμένουμε διαισθητικά ότι για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί, όλες οι διαθέσιμες ποσότητες πρέπει να μεταφερθούν από τις πηγές κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε προορισμός να λάβει ακριβώς την απαιτούμενη ποσότητα. Με άλλα λόγια οι περιορισμοί στο πρόβλημα (1.7) θα ικανοποιούνται με ισότητα. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.1 *Σε ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς ένα διάνυσμα* $\mathbf{x} = (x_{ij}, i \in V_s, j \in V_d) \geq \mathbf{0}$ *είναι εφικτή λύση αν και μόνο αν*

$$\begin{aligned} \sum_{j\in V_d} x_{ij} &= a_i, \quad i\in V_s \\ \sum_{i\in V_s} x_{ij} &= b_j, \quad j\in V_d \end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Είναι προφανές ότι αν το $\mathbf{x}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς με ισότητα είναι εφικτή λύση. Για να δείξουμε το αντίστροφο, από τους περιορισμούς του γενικού προβλήματος μεταφοράς (1.7) προκύπτει (αθροίζοντας τις ανισότητες των πηγών) ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathbf{x}$ εφικτή λύση είναι

$$\sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} x_{ij} \leq \sum_{i\in V_s} a_i$$

όπως επίσης (αθροίζοντας τις ανισότητες των προορισμών)

$$\sum_{j\in V_d}\sum_{i\in V_s} x_{ij} \geq \sum_{j\in V_d} b_j.$$

Για ένα ισορροπημένο πρόβλημα οι παραπάνω συνθήκες καταλήγουν στην

$$\sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} x_{ij} = \sum_{i\in V_s} a_i = \sum_{j\in V_d} b_j.$$

Επομένως, αν το $\mathbf{x}$ ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του (1.7) και έναν ή περισσότερους με αυστηρή ανισότητα, τότε η παραπάνω συνθήκη παραβιάζεται, που είναι άτοπο. Συνεπώς όλοι οι περιορισμοί θα πρέπει να ισχύουν ως ισότητες. □

Από το Λήμμα 1.1 προκύπτει η εξής ισοδύναμη μορφή του π.γ.π. για ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j\in V_d} x_{ij} & = & a_i, & i\in V_s \\ & \sum_{i\in V_s} x_{ij} & = & b_j, & j\in V_d \\ & x_{ij} & \geq & 0, & i\in V_s,\ j\in V_d \end{array} \tag{1.8}$$

Η υπόθεση ότι ένα πρόβλημα μεταφοράς είναι ισορροπημένο μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας, όπως προκύπτει από την Άσκηση 1.5.

1.3.4 Το πρόβλημα μέγιστης ροής

Το *πρόβλημα μέγιστης ροής (maximum flow problem)* ορίζεται ως το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνολικής ποσότητας που μπορεί να μεταφερθεί από ένα αρχικό κόμβο σε ένα τελικό κόμβο του δικτύου, κάτω από τους περιορισμούς χωρητικότητας των ακμών. Δεδομένου ότι η αρίθμηση των κόμβων είναι αυθαίρετη, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι μεγιστοποιούμε τη ροή από τον κόμβο 1 στον κόμβο N. Θα δούμε ότι και το πρόβλημα αυτό προκύπτει ως ειδική περίπτωση του προβλήματος διαμετακομιδής.

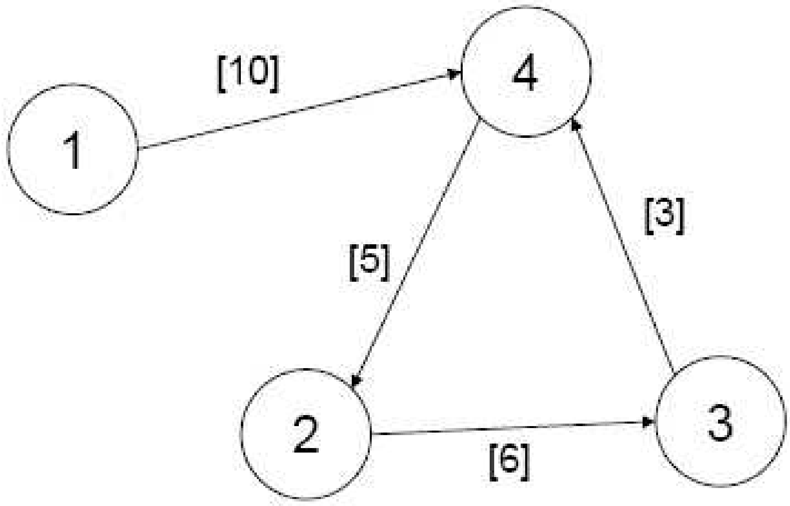
Στο πρόβλημα μέγιστης ροής η μοναδική πηγή είναι ο κόμβος 1 και ο μοναδικός προορισμός ο κόμβος N. Μπορούμε να το θεωρήσουμε ως ένα πρόβλημα όπου υπάρχει απεριόριστη διαθέσιμη ποσότητα στον κόμβο 1 και μηδενικές διαθεσιμότητες στους υπόλοιπους κόμβους ενώ πρέπει να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα που καταλήγει στον κόμβο N. Επομένως θα μπορούσαμε να πάρουμε ως αντικειμενική συνάρτηση τη συνολική ποσότητα που εισέρχεται στον κόμβο N, δηλαδή $\sum_{i:(i,N)\in E} x_{iN}$ και να απαιτήσουμε μεγιστοποίηση. Η προσέγγιση αυτή όμως δεν είναι σωστή. Για να δούμε πού πάσχει, ας θεωρήσουμε το δίκτυο του Σχήματος 1.2, όπου ζητείται να μεγιστοποιηθεί η ροή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 4 και οι ποσότητες μέσα στις αγκύλες δηλώνουν τις χωρητικότητες των ακμών. Είναι προφανές ότι η μέγιστη ροή ισούται με 10 και επιτυγχάνεται θέτοντας

$$x_{14} = 10, x_{42} = x_{23} = x_{34} = y,$$

για οποιοδήποτε $y \in [0, 3]$. Αν όμως θεωρήσουμε ως αντικειμενική συνάρτηση τη συνολική εισερχόμενη ποσότητα στον κόμβο 4, που είναι ίση με $x_{14} + x_{34}$, αυτή μεγιστοποιείται για

$$x_{14} = 10, x_{42} = x_{23} = x_{34} = 3,$$

και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 13, που δεν αντιστοιχεί στην πραγματική βέλτιστη τιμή του προβλήματος μέγιστης ροής.



Σχήμα 1.2: Παράδειγμα Μέγιστης Ροής

Βλέπουμε επομένως ότι η σωστή αντικειμενική συνάρτηση που μεγιστοποιείται είναι η καθαρή ποσότητα που μένει στον κόμβο N και είναι διαθέσιμη να ικανοποιήσει εξωτερικές απαιτήσεις, δηλαδή

$$\sum_{i:(i,N)\in E} x_{iN} - \sum_{j:(N,j)\in E} x_{Nj}.$$

Επειδή στο πρόβλημα διαμετακομιδής έχουμε ελαχιστοποίηση, για να προκύψει το παρόν πρόβλημα ως ειδική περίπτωση του προηγούμενου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\max_{x\in F} f(x) = -\min_{x\in F} f(-x)$$

και να θέσουμε ως συνάρτηση κόστους ακμών την

$$c_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{αν } j = N,\ (i,N)\in E \\ 1, & \text{αν } i = N,\ (N,j)\in E \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Όσον αφορά τους περιορισμούς, όπως αναφέραμε προηγουμένως, υποθέτουμε ότι υπάρχει απεριόριστη διαθέσιμη ποσότητα στην πηγή, ενώ στον προορισμό δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την απαιτούμενη ποσότητα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η ποσότητα που μεταφέρεται από την πηγή στον προορισμό περιορίζεται μόνο από τις χωρητικότητες των ακμών, όπως απαιτεί το πρόβλημα, και όχι από συγκεκριμένες διαθεσιμότητες ή απαιτήσεις. Επομένως οι περιορισμοί του προβλήματος διαμετακομιδής ισχύουν και στο παρόν πρόβλημα με

$$a_1 = \infty,\ a_i = 0\ \forall i \neq 1,\ b_j = 0\ \forall j \in V.$$

Δείξαμε ότι το πρόβλημα μέγιστης ροής μπορεί να εκφραστεί ως ειδική περίπτωση του προβλήματος (1.5) με τις παραπάνω επιλογές συναρτήσεων κόστους, διαθεσιμότητας και απαιτήσεων. Εναλλακτικά μπορεί να γραφεί σε κάπως απλούστερη ισοδύναμη μορφή ως εξής. Από τον ορισμό των a, b προκύπτει ότι ο περιορισμός ροής για τον κόμβο 1 γίνεται

$$\sum_{k:(k,1)\in E} x_{k1} - \sum_{j:(1,j)\in E} x_{1j} \geq -\infty,$$

που είναι πλεοναστικός και μπορεί να παραληφθεί, ενώ οι υπόλοιποι περιορισμοί ροής γίνονται

$$\sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} \geq 0,\ i = 2, \ldots, N.$$

Επομένως το π.γ.π. μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί ως

$$\begin{array}{lcll}
\max & \sum_{i:(i,N)\in E} x_{iN} - \sum_{j:(N,j)\in E} x_{Nj} & & \\
\text{υ.π.} & \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \geq & 0, \quad i = 2, \ldots, N. \\
& x_{ij} & \leq & v_{ij}, \quad (i,j) \in E \\
& x_{ij} & \geq & 0, \quad (i,j) \in E
\end{array} \tag{1.9}$$

1.4 Προβλήματα Προγραμματισμού Εργασίας

Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας ασχολούνται με τον προγραμματιστμό προσωπικού και ωραρίων σε μια εταιρεία ή οργανισμό που απασχολεί πολλούς εργαζόμενους και έχει διαφορετικές ανάγκες σε προσωπικό σε διάφορες χρονικές περιόδους. Τα παρακάτω δύο παραδείγματα είναι χρήσιμα για την κατ' αρχήν κατανόηση του προβλήματος.

Ως πρώτο παράδειγμα θεωρούμε ένα νοσοκομείο που πρέπει να προγραμματίσει τον αριθμό του νοσηλευτικού προσωπικού σε εβδομαδιαία βάση. Επειδή το νοσοκομείο κάποιες μέρες είναι σε εφημερία και κάποιες όχι, οι ανάγκες σε προσωπικό είναι γενικά διαφορετικές κάθε μέρα της εβδομάδας. Από την άλλη πλευρά κάθε εργαζόμενος στο νοσοκομείο έχει συνεχόμενο πενθήμερο ωράριο, δηλαδή εργάζεται πέντε συνεχόμενες μέρες κάθε εβδομάδα και τις άλλες δύο παίρνει ρεπό. Επειδή το νοσοκομείο είναι συνέχεια ανοιχτό, δεν μπορούν όλοι οι εργαζόμενοι να παίρνουν ρεπό τις ίδιες μέρες όπως γίνεται π.χ. σε μια εμπορική εταιρεία που είναι κλειστή το σαββατοκύριακο. Επομένως κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μιά από επτά κατηγορίες ωραρίου (βάρδιες), ανάλογα με τις μέρες της εβδομάδας που εργάζεται (στην κατηγορία 1 ανήκουν οι εργαζόμενοι από Δευτέρα μέχρι Παρασκευή, στην κατηγορία 2 αυτοί από Τρίτη μέχρι Σάββατο, κ.ο.κ.). Επειδή σε κάποιες βάρδιες οι εργαζόμενοι απασχολούνται Σάββατο ή και Κυριακή, το εβδομαδιαίο κόστος του νοσοκομείου για κάθε εργαζόμενο διαφέρει ανάλογα με τη βάρδια. Το πρόβλημα του νοσοκομείου είναι να βρεθεί πόσοι εργαζόμενοι πρέπει να προσληφθούν σε κάθε βάρδια ώστε αφενός να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις σε προσωπικό κάθε μέρα της εβδομάδας και αφ' ετέρου να ελαχιστοιποιηθεί το συνολικό κόστος των εργαζομένων.

Για ένα δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το υποκατάστημα μιας τράπεζας που λειτουργεί για το κοινό από 8 π.μ. έως 8 μ.μ. κάθε εργάσιμη μέρα. Από προηγούμενες στατιστικές αναλύσεις είναι γνωστό ότι οι ανάγκες σε προσωπικό διαφέρουν ανάλογα με την ώρα της μέρας (π.χ. κατά το δίωρο 8-10 μ.μ. χρειάζεται να λειτουργούν 3 ταμεία, κατά το δίωρο 10-12 6 ταμεία κ.ο.κ.). Το προσωπικό της τράπεζας εργάζεται 8 ώρες τη μέρα, αλλά σε διάφορες βάρδιες. Για παράδειγμα κάποιοι εργαζόμενοι απασχολούνται συνεχόμενα στο διάστημα 8 π.μ.-4 μ.μ., κάποιοι από τις 12 έως τις 8 μ.μ. και κάποιοι άλλοι 8 π.μ. με 12 και 4 μ.μ. με 8 μ.μ. . Ανάλογα με το ωράριο το κόστος για κάθε εργαζόμενο μπορεί να διαφέρει. Αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα, το πρόβλημα της τράπεζας είναι να βρεθεί πόσοι εργαζόμενοι πρέπει να απασχολούνται σε κάθε βάρδια ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις σε προσωπικό σε όλη τη διάρκεια της μέρας και επίσης το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται.

Για τη μαθηματική διατύπωση του γενικού προβλήματος ορίζουμε τα παρακάτω. Έστω ότι πρέπει να οργανωθούν τα ωράρια του προσωπικού με βάση ένα ορίζοντα προγραμματισμού (εβδομάδα, ημέρα, κ.λ.π.). Ο ορίζοντας διαιρείται σε m περιόδους ανάλογα με τις ανάγκες σε προσωπικό (οι περίοδοι δεν είναι απαραίτητο να έχουν το ίδιο μήκος). Σε κάθε περίοδο $i = 1, \dots, m$ απαιτείται να υπάρχουν τουλάχιστον d_i άτομα που απασχολούνται κατά τη διάρκεια της περιόδου. Οι εργαζόμενοι στον οργανισμό κατατάσσονται σε n κατηγορίες (βάρδιες) ανάλογα με το ωράριο εργασίας τους. Το κόστος ανά εργαζόμενο της κατηγορίας j είναι ίσο με c_j για όλη τη διάρκεια του ορίζοντα προγραμματισμού, για $j = 1, \dots, n$. Τέλος το διάστημα στο οποίο εργάζονται οι εργαζόμενοι κάθε κατηγορίας καθορίζεται από ένα πίνακα συντελεστών $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ που ορίζονται ως εξής

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο εργαζόμενος στη βάρδια } i \text{ είναι διαθέσιμος κατά την περίοδο } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Στον ορισμό του a_{ij} έχουμε υποθέσει ότι αν ένας εργαζόμενος απασχολείται σε κάποια περίοδο i, τότε είναι διαθέσιμος για όλη τη διάρκεια και όχι για μέρος της περιόδου. Αυτό σημαίνει ότι ο χωρισμός του ορίζοντα σε περιόδους και ο καθορισμός των διαφόρων κατηγοριών ωραρίου έχει γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε βάρδια να καλύπτει ένα ακέραιο αριθμό περιόδων. (Για παράδειγμα στην περίπτωση της τράπεζας παραπάνω, αν ο ορίζοντας προγραμματισμού 8 π.μ. - 8 μ.μ. διαιρεθεί σε 6 δίωρα, τότε μια βάρδια επιτρέπεται να διαρκεί από τις 8 π.μ. έως τις 4 μ.μ., αλλά όχι από τις 9 μ.μ. έως τις 5 μ.μ. γιατί τότε θα κάλυπτε μέρος μόνο του διώρου 8 π.μ. - 10 μ.μ.)

Με βάση τα παραπάνω, η μοντελοποίηση του προβλήματος με γραμμικό προγραμματισμό είναι μάλλον προφανής. Ορίζουμε ως μεταβλητές απόφασης τις ποσότητες $x_j =$ αριθμός εργαζομένων που απασχολούνται σύμφωνα με το ωράριο j, $j = 1, \dots, n$. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση, που είναι το συνολικό κόστος εργασίας κατά τη διάρκεια του ορίζοντα προγραμματισμού είναι ίση με

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Οι περιορισμοί αντανακλούν τις ελάχιστες απαιτήσεις σε προσωπικό για κάθε περίοδο του ορίζοντα προγραμματισμού. Από τους προηγούμενους ορισμούς προκύπτει ότι ο αριθμός των εργαζομένων που είναι διαθέσιμοι κατά τη διάρκεια της περιόδου i είναι ίσος με $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Δεδομένης της ελάχιστης απαίτησης d_i, ο περιορισμός για την περίδο i γράφεται

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i.$$

Τελικά το π.γ.π. γράφεται ως εξής

$$\begin{array}{lrcl} \min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \geq & d_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array} \tag{1.10}$$

1.5 Τμηματικά Γραμμικές Αντικειμενικές Συναρτήσεις

Στα παραδείγματα π.γ.π. που είδαμε παραπάνω τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί προέκυψαν να έχουν γραμμική μορφή από τη φύση και την περιγραφή του αντίστοιχου προβλήματος. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που μια ή περισσότερες συνιστώσες ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις, αλλά παρ' όλ' αυτά το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π. με τη βοήθεια κατάλληλων μετασχηματισμών. Σ' αυτό το υποκεφάλαιο θα δούμε περιπτώσεις τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων που επιτρέπουν μοντελοποίηση με γραμμικό προγραμματισμό.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$f(\mathbf{x}) = \min\{\mathbf{d}_i' \mathbf{x} + e_i, i = 1, \ldots, k\},$$

όπου $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^n, e_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k$, είναι τμηματικά γραμμική. Είναι επίσης κοίλη, όπως προκύπτει εύκολα από το Λήμμα ** στο Παράρτημα. Επειδή το ελάχιστο ενός πεπερασμένου συνόλου ισούται με το μεγαλύτερο αριθμό που είναι μικρότερος ή ίσος από όλα τα στοιχεία του συνόλου, για δοσμένο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ η $f(\mathbf{x})$ μπορεί να γραφτεί ως λύση του παρακάτω π.γ.π. με μόνη μεταβλητή απόφασης τη z:

$$\begin{array}{rlrcl} f(\mathbf{x}) = & \max & z & & \\ & \text{υ.π.} & z & \leq & \mathbf{d}_i' \mathbf{x} + e_i, \quad i = 1, \ldots, k. \end{array}$$

Επομένως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{rlrcl} z_{PW} = & \max & f(\mathbf{x}) & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array} \tag{1.11}$$

όπου η f είναι τμηματικά γραμμική κοίλη συνάρτηση, μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π. με $n+1$ μεταβλητές απόφασης $(z, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rlrcl} z_{LP} = & \max & z & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & z & \leq & \mathbf{d}_i' \mathbf{x} + e_i, \quad i = 1, \ldots, k \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.12}$$

Η ισοδυναμία μεταξύ των δύο προβλημάτων προκύπτει από το Λήμμα 1.2 και την Πρόταση 1.1 παρακάτω.

Λήμμα 1.2 *Έστω ότι το πρόβλημα* (1.12) *έχει βέλτιστη λύση* $(\mathbf{x}^1, z^1)$. *Τότε ισχύει* $z^1 = f(\mathbf{x}^1)$.

Απόδειξη. Επειδή η λύση $(\mathbf{x}^1, z^1)$ ως βέλτιστη είναι εφικτή, ισχύει $z^1 \leq \mathbf{d}_i'\mathbf{x}^1 + e_i, i = 1, \ldots, k$, επομένως $z^1 \leq f(\mathbf{x}^1)$. Ας υποθέσουμε ότι $z^1 < f(\mathbf{x}^1)$. Τότε η λύση $(\mathbf{x}^1, f(\mathbf{x}^1))$ είναι επίσης εφικτή και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από z^1, επομένως η $(\mathbf{x}^1, z^1)$ δεν είναι βέλτιστη, άτοπο. Συνεπώς, $z_1 = f(\mathbf{x}_1)$. □

Πρόταση 1.1 *Αν ένα από τα προβλήματα* (1.11) *και* (1.12) *έχει βέλτιστη λύση τότε έχει και το άλλο και οι βέλτιστες λύσεις ταυτίζονται στο διάνυσμα* $\mathbf{x}$ *και στην αντικειμενική συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω ότι το πρόβλημα (1.11) έχει βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^0$ με βέλτιστη τιμή $z_{PW} = f(\mathbf{x}^0)$. Επειδή $f(\mathbf{x}^0) \leq \mathbf{d}_i'\mathbf{x}^0 + e_i, i = 1, \ldots, k$, η $(\mathbf{x}^0, z_{PW})$ είναι εφικτή λύση του προβλήματος (1.12), και επομένως $z_{LP} \geq z_{PW}$. Ας υποθέσουμε ότι $z_{LP} > z_{PW}$, δηλαδή υπάρχει βέλτιστη λύση $(\mathbf{x}^1, z^1)$ του προβλήματος (1.12) με $z_{LP} = z^1 > z_{PW}$. Από το Λήμμα 1.2 προκύπτει ότι $z^1 = f(\mathbf{x}^1)$. Επομένως η λύση $\mathbf{x}^1$ είναι εφικτή λύση για το πρόβλημα (1.11) και $f(\mathbf{x}^1) > z_{PW}$, που είναι άτοπο. Συνεπώς $z_{LP} = z_{PW}$ και η $(\mathbf{x}^0, z_{PW})$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (1.12).

Έστω τώρα ότι το πρόβλημα (1.12) έχει βέλτιστη λύση $(\mathbf{x}^1, z^1)$, με $z_{LP} = z^1$. Από το Λήμμα 1.2 προκύπτει ότι $z^1 = f(\mathbf{x}^1)$. Η $\mathbf{x}^1$ είναι εφικτή λύση στο πρόβλημα (1.11) επομένως $z_{PW} \geq f(\mathbf{x}^1) = z_{LP}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια άλλη εφικτή λύση $\mathbf{x}^0$ του προβλήματος (1.11) με $f(\mathbf{x}^0) > z_{LP}$. Τότε η λύση $(\mathbf{x}^0, f(\mathbf{x}^0))$ είναι εφικτή για το πρόβλημα (1.12), πράγμα άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι η βέλτιστη τιμή του (1.12) είναι ίση με z_{LP}. Συνεπώς $z_{LP} = z_{PW}$ και η $\mathbf{x}^1$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (1.11). □

Εντελώς αντίστοιχη είναι η περίπτωση ελαχιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κυρτής συνάρτησης $g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως το μέγιστο ενός πεπερασμένου αριθμού αφφινικών συναρτήσεων

$$g(\mathbf{x}) = \max\{\mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, i = 1, \ldots, k\}. \tag{1.13}$$

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{rrrcl} z_{PW} = & \min & g(\mathbf{x}) & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array} \tag{1.14}$$

όπου η g είναι τμηματικά γραμμική κυρτή συνάρτηση, μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π. με $n+1$ μεταβλητές απόφασης $(z, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rrrcl} z_{LP} = & \min & z & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & z & \geq & \mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, \quad i = 1, \ldots, k \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.15}$$

Παρατηρήσεις. 1. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας κοίλης τμηματικά γραμμικής συνάρτησης (1.11), όπως και το συμμετρικό του (1.11) έχουν ενδιαφέρουσα ερμηνεία ως προβλήματα βελτιστοποίησης του χειρότερου ενδεχομένου. Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους με μεταβλητές απόφασης που εκφράζονται από το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, για κάθε εφικτή απόφαση $\mathbf{x}$ υπάρχουν k διαφορετικά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν για καθένα από τα οποία το κέρδος είναι ίσο με $\mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, i = 1, \ldots, k$. Ο αποφασίζων δεν έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει ποιό από τα ενδεχόμενα θα υλοποιηθεί. Για το μοντέλο αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης (1.11) μπορεί να ερμηνευθεί ως μεγιστοποίηση του μικρότερου δυνατού κέρδους από κάθε απόφαση. Ο αποφασίζων δηλαδή ακολουθεί εντελώς συντηρητική πολιτική, υποθέτοντας ότι το χειρότερο δυνατό ενδεχόμενο θα συμβεί και προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος κάτω από αυτή την υπόθεση. Αντίστοιχα για το πρόβλημα (1.14), μπορούμε να θεωρήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση ως το χειρότερο δυνατό ενδεχόμενο κόστους που ο αποφασίζων προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει.

Λόγω της παραπάνω ερμηνείας τα προβλήματα (1.11) και (1.14) αναφέρονται στη βιβλιογραφία του γραμμικού προγραμματισμού ως προβλήματα maximin και minimax, αντίστοιχα.

2. Στη γενική περίπτωση η βελτιστοποίηση μιας τμηματικά γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης δεν ανάγεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \min\{x, 2-x\} = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$$

που είναι τμηματικά γραμμική και κοίλη. Το πρόβλημα $z_1 = \max\{f(x), 1/2 \le x \le 2\}$ έχει βέλτιστη λύση $x_1 = 2$ και $z_1 = 1$. Όπως έχουμε δει το ισοδύναμο π.γ.π. είναι $\max\{z : z \le x, z \le 2-x, 1/2 \le x \le 2\}$ που έχει την ίδια βέλτιστη λύση. Όμως το πρόβλημα $z_2 = \min\{f(x), 1/2 \le x \le 2\}$ το οποίο έχει βέλτιστη λύση $x_2 = 2, z_2 = 0$, δεν μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π.. Αν κατ'αναλογία θεωρήσουμε το π.γ.π. $\min\{z : z \le x, z \le 2-x, 1/2 \le x \le 2\}$, αυτό δεν είναι ισοδύναμο του αρχικού, καθώς είναι μή φραγμένο ενώ το αρχικό έχει βέλτιστη λύση.

1.5.1 Προβλήματα Προσέγγισης Στόχων

Τα προβλήματα αυτής της υποενότητας αποτελούν μια ειδική κατηγορία προβλημάτων minimax, δηλαδή ελαχιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κυρτής συνάρτησης. Έστω ότι σε ένα πρόβλημα απόφασης με μεταβλητές $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και εφικτή περιοχή για το $\mathbf{x}$ το σύνολο F, υπάρχουν k πρόσθετοι στόχοι που εκφράζονται ως γραμμικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα ζητείται να βρεθεί ένα διάνυσμα απόφασης $\mathbf{x} \in F$ τέτοιο ώστε

$$\alpha_i'\mathbf{x} = \beta_i, i = i, \ldots, k,$$

όπου $\alpha_i \in \mathbb{R}^n, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k$.

Οι παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχούν σε γραμμικούς περιορισμούς και θα μπορούσαν να ενσωματωθούν στους περιορισμούς που ορίζουν την εφικτή περιοχή F. Ο λόγος που εξετάζονται χωριστά είναι ότι τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας είναι συνήθως ανέφικτα, δηλαδή δεν υπάρχει λύση $\mathbf{x} \in F$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα και όλες τις εξισώσεις των στόχων. Σ' αυτή την περίπτωση το σύνολο F αποτελείται από τους *ανελαστικούς* περιορισμούς, δηλαδή αυτούς που πρέπει οπωσδήποτε να ικανοποιηθούν, ενώ οι στόχοι αντιπροσωπεύουν τους *ελαστικούς* περιορισμούς, που επιτρέπεται να παραβιαστούν με κάποια ποινή που προσδιορίζεται ως εξής. Αν για την εξίσωση στόχου i το αριστερό μέρος $\alpha_i'\mathbf{x}$ υπερβαίνει την τιμή-στόχο β_i, τότε υπάρχει μια ποινή p_i ανά μονάδα υπέρβασης. Αντίστοιχα, αν το αριστερό μέρος υπολείπεται του β_i, η ποινή ανά μονάδα έλλειψης είναι q_i. Επομένως η συνολική ποινή για την απόκλιση του στόχου i είναι ίση με

$$\epsilon_i(\mathbf{x}) = p_i(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+ + q_i(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^-,$$

όπου για $w \in \mathbb{R}$ τα w^+, w^- συμβολίζουν το θετικό και αρνητικό μέρος του w, αντίστοιχα

$$w^+ = \max(w, 0), \quad w^- = -\min(w, 0) = \max(-w, 0).$$

Είναι εύκολο να επαληθευθούν οι ταυτότητες

$$w^+, w^- \geq 0, \; w^+w^- = 0, \; w^+ - w^- = w, \quad w^+ + w^- = |w|, \; \forall w \in \mathbb{R}.$$

Με βάση τα παραπάνω ένα λογικό ερώτημα για το παραπάνω πρόβλημα απόφασης είναι να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί τους ανελαστικούς περιορισμούς και ελαχιστοποιεί τη συνολική ποινή για τις αποκλίσεις των ελαστικών περιορισμών. Ορίζουμε επομένως το παρακάτω πρόβλημα *προσέγγισης στόχων (goal programming problem)*

$$\begin{array}{rll} z_{GP} = & \min & \sum_{i=1}^k \epsilon_i(\mathbf{x}) \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{x} \in F \end{array} \tag{1.16}$$

Στο εξής θα υποθέσουμε ότι οι ανελαστικοί περιορισμοί που προσδιορίζουν το σύνολο F είναι γραμμικοί, ενώ οι συντελεστές ποινής $p_i, q_i \geq 0, i = 1, \ldots, k$. Σ' αυτή την περίπτωση το πρόβλημα (1.16) μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π.. Το ισοδύναμο π.γ.π. μπορεί να αναπτυχθεί είτε ως ειδική περίπτωση του προβλήματος minimax, ή με μια νέα ισοδύναμη μοντελοποίηση.

Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα προσέγγισης στόχων αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος minimax, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ποινής $\epsilon_i(\mathbf{x})$ είναι τμηματικά γραμμική και κυρτή. Παρατηρούμε ότι τόσο η $(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+ = \max(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i, 0)$ όσο και η $(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^- = \max(-\alpha_i'\mathbf{x} + \beta_i, 0)$ εκφράζονται ως το μέγιστο αφφινικών συναρτήσεων επομένως είναι τμηματικά γραμμικές και κυρτές. Επειδή $p_i, q_i \geq 0$, το ίδιο ισχύει για την $\epsilon_i(\mathbf{x})$, και επομένως και για την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (1.16).

Η αντικειμενική συνάρτηση $\sum_{i=1}^k \epsilon_i(\mathbf{x})$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή (1.13), δηλαδή ως μέγιστο ενός πεπερασμένου αριθμού αφφινικών συναρτήσεων, και επομένως το πρόβλημα (1.16) να εκφραστεί ως π.γ.π. της μορφής (1.15). Όμως η έκφραση αυτή είναι αρκετά πολύπλοκη καθώς ο αριθμός των αφφινικών συναρτήσεων που εμπλέκονται στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίσος με 2^k. Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα εναλλακτικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα προσέγγισης στόχων που οδηγεί σε απλούστερα προβλήματα και έχει αυτοτελές ενδιαφέρον.

Αφού επιτρέπουμε στους ελαστικούς περιορισμούς στόχων να μην ικανοποιούνται ακριβώς, τους γράφουμε στη μορφή

$$\alpha_i'\mathbf{x} - u_i + v_i = \beta_i, i = i, \ldots, k \tag{1.17}$$

όπου οι νέες μεταβλητές $u_i, v_i \geq 0$. Οι u_i, v_i θυμίζουν τις περιθώριες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή ενός π.γ.π. σε κανονική μορφή, με τη διαφορά ότι εδώ εξυπηρετούν διαφορετικό σκοπό και υπάρχουν δύο περιθώριες μεταβλητές για κάθε περιορισμό. Για κάθε $\mathbf{x}$ η εξίσωση (1.17) έχει άπειρες λύσεις ως προς u_i, v_i, και συγκεκριμένα

$$u_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+ + \lambda_i,\ v_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^- + \lambda_i, \tag{1.18}$$

για οποιοδήποτε $\lambda_i \geq 0$.

Θεωρούμε τώρα το παρακάτω π.γ.π.

$$\begin{array}{rll} z_{GLP} = & \min & \sum_{i=1}^{k}(p_i u_i + q_i v_i) \\ & \text{υ.π.} & \alpha_i'\mathbf{x} - u_i + v_i = \beta_i, i = 1, \ldots, k \\ & & \mathbf{x} \in F \\ & & u_i, v_i \geq 0, i = 1, \ldots, k \end{array} \tag{1.19}$$

Με βάση τα παραπάνω, αν $F \neq \emptyset$, τότε το πρόβλημα (1.19) είναι πάντα εφικτό. Επίσης, επειδή η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη αρνητική, είναι και φραγμένο, επομένως έχει πάντα βέλτιστη λύση. Για να δείξουμε ότι είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα προσέγγισης στόχων (1.16), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, επειδή οι συντελεστές $p_i, q_i, i = 1, \ldots, k$ είναι μή αρνητικοί, από τις λύσεις της μορφής (1.18), η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται για $\lambda_i = 0$. Επομένως στη βέλτιστη λύση του προβλήματος (1.19) θα ισχύει $u_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+$ και $v_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^-$, $i = 1, \ldots, k$.

1.6 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 Θεωρούμε ένα πρόβλημα παραγωγής n προϊόντων σε μια περίοδο. Το κέρδος ανά μονάδα του προϊόντος j είναι ίσο με $c_j, j = 1, \ldots, n$. Για την παραγωγή χρησιμοποιούνται m διαφορετικά μηχανήματα και όλα τα προϊόντα πρέπει να περάσουν από όλα τα μηχανήματα. Συγκεκριμένα κάθε προϊόν j απαιτεί χρόνο a_{ij} σε κάθε μηχάνημα i ανά μονάδα παραγόμενης ποσότητας. Το μηχάνημα i είναι διαθέσιμο για b_i χρονικές μονάδες μέσα στην περίοδο προγραμματισμού. Να αναπτυχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του σχεδίου παραγωγής που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.

Άσκηση 1.2 Θεωρούμε ένα πρόβλημα παραγωγής n προϊόντων σε μια περίοδο. Το κέρδος ανά μονάδα του προϊόντος j είναι ίσο με $c_j, j = 1, \ldots, n$. Για την παραγωγή χρησιμοποιούνται m διαφορετικά μηχανήματα. Κάθε προϊόν πρέπει να παραχθεί σε ένα (οποιοδήποτε) από τα μηχανήματα. Συγκεκριμένα μια ποσότητα του προϊόντος j που παράγεται στο μηχάνημα i απαιτεί χρόνο επεξεργασίας ίσο με a_{ij} ανά μονάδα. Η παραγωγή μιας ποσότητας προϊόντος μπορεί να γίνει τμηματικά σε διαφορετικά μηχανήματα. Το μηχάνημα i είναι διαθέσιμο για b_i χρονικές μονάδες μέσα στην περίοδο προγραμματισμού. Να αναπτυχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του σχεδίου παραγωγής που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.

Άσκηση 1.3 Το παρακάτω πρόβλημα διαχείρισης κεφαλαίου (capital budgeting problem) είναι αντιπροσωπευτικό μιας ευρύτερης κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης επενδύσεων που αποτελούν μέρος της χρηματοοικονομικής ανάλυσης. Υποθέτουμε ότι μια εταιρία έχει τη δυνατότητα να επενδύσει σε n διαθέσιμα επενδυτικά προγράμματα. Κάθε πρόγραμμα είναι μια αυτοτελής οντότητα που απαιτεί δέσμευση T χρονικών περιόδων. Η εταιρία μπορεί να επενδύσει σε οποιοδήποτε κλάσμα του κάθε προγράμματος επιθυμεί (π.χ. αν αναλάβει 30% του πρώτου προγράμματος, θα έχει υποχρέωση να καταβάλλει το 30% των απαιτούμενων χρηματοδοτήσεων για τις επόμενες T περιόδους και θα εισπράττει το 30% όλων των εισροών από αυτό το πρόγραμμα μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα). Κάθε πρόγραμμα j κατά τη διάρκεια της περιόδου i δημιουργεί μια χρηματορροή ίση με a_i^j (θετική αν η εταιρεία εισπράττει από το πρόγραμμα και αρνητική αν το χρηματοδοτεί), $i = 1, \ldots, T, j = 1, \ldots, n$. Στο τέλος του ορίζοντα T κάθε πρόγραμμα j αποφέρει μια τελική απόδοση ίση με c_j (αυτή θα μπορούσε να περιλαμβάνει και την παρούσα αξία ενδεχόμενων μελλοντικών εσόδων από τη λειτουργία του προγράμματος και μετά το τέλος του ορίζοντα επένδυσης).

Εκτός από την επένδυση στα διάφορα επενδυτικά προγράμματα, η εταιρία έχει τη δυνατότητα να δανείζεται από ή να αποταμιεύει στην τράπεζα οποιοδήποτε χρηματικό ποσό για μια περίοδο. Το επιτόκιο δανεισμού και καταθέσεων είναι ίσο με r ανά περίοδο. (Αυτό σημαίνει ότι αν ένα ποσό y αποταμιευθεί στην αρχή μιας περιόδου, τότε στην αρχή της επόμενης περιόδου η εταιρεία θα εισπράξει ποσό ίσο με $y(1+r)$, και αντίστοιχα για δανεισμό). Τέλος για κάθε περίοδο $i = 1, \ldots, T$ η εταιρία προβλέπεται να έχει έσοδα s_i από εξωγενείς πηγές, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιήσει για τη χρηματοδότηση των επενδυτικών προγραμμάτων ή/και για αποταμίευση την ίδια περίοδο.

Να αναπτυχθεί ένα π.γ.π. για τη μεγιστοποίηση του τελικού κέρδους της εταιρίας (το τελικό κέρδος προέρχεται από την απόδοση των προγραμμάτων και από το ποσό που βρίσκεται αποταμιευμένο στην τράπεζα στο τέλος του ορίζοντα).

Άσκηση 1.4 Θεωρούμε ένα δίκτυο με σύνολο κόμβων N και σύνολο ακμών E. Το δίκτυο χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη μεταφορά K διαφορετικών προϊόντων. Το προϊόν k έχει βάρος d_k ανά μονάδα, $k = 1, \ldots, n$. Σε κάθε κόμβο i υπάρχει διαθέσιμη ποσότητα a_{ik} μονάδων και εξωτερικές απαιτήσεις για b_{ik} μονάδες από κάθε προϊόν k. Η συνολική δυναμικότητα κάθε ακμής $(i, j) \in E$ είναι v_{ij} μονάδες βάρους. Το κόστος ανά μονάδα προϊόντος k που μεταφέρεται κατά μήκος της ακμής (i, j) είναι ίσο με c_{ijk}. Να μοντελοποιηθεί ένα πρόβλημα διαμετακομιδής για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς, αντίστοιχο αυτού της ενότητας 1.3.1.

Άσκηση 1.5 Να δειχθεί ότι κάθε μη ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς μπορεί με κατάλληλο μετασχηματισμό να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς.

Άσκηση 1.6 Σε ένα πρόβλημα παραγωγής T περιόδων όπως περιγράφεται στην ενότητα 1.2.2 υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα επιθυμητό επίπεδο παραγωγής σε κάθε περίοδο ίσο με το μέσο όρο της ζήτησης κατά τη διάρκεια του ορίζοντα (αυτό σημαίνει πρακτικά ότι για λόγους οικονομίας η εταιρία θα ήθελε να εξομαλύνει τη διαδικασία παράγοντας την ίδια ποσότητα σε κάθε περίοδο). Αποκλίσεις από αυτή τη σταθερή ποσότητα παραγωγής συνεπάγονται επιπλέον κόστος. Να συζητηθεί πώς μπορεί αυτό το νέο στοιχείο να συμπεριληφθεί στο μοντέλο π.γ.π. που έχει ήδη αναπτυχθεί. Να οριστούν όσες επιπλέον παράμετροι είναι απαραίτητες.

Άσκηση 1.7 Θεωρούμε μια απλοποιημένη μορφή ενός από τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα παραγωγής σε περιβάλλον αβεβαιότητας, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως *πρόβλημα του εφημεριδοπώλη (newsvendor problem)*. Πρόκειται για πρόβλημα παραγωγής ενός προϊόντος και μιας περιόδου. Το μοναδιαίο κόστος παραγωγής είναι ίσο με c και η μοναδιαία τιμή πώλησης ίση με r. Η ζήτηση D είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί διακριτή κατανομή με πεπερασμένο πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας

$$p(k) = \mathrm{P}(D = k), \quad k = 0, \ldots, M.$$

Η ποσότητα παραγωγής x καθορίζεται πριν γίνει γνωστή η ζήτηση. Αν προκύψει $D < k$, τότε η ποσότητα που θα πωληθεί είναι ίση με D, ενώ η αδιάθετη ποσότητα δεν έχει αξία για την εταιρεία. Αν προκύψει $D > x$, τότε οι πωλήσεις είναι ίσες με x ενώ η ζήτηση που δεν ικανοποιείται δεν επιφέρει προφανώς έσοδα, αλλά ούτε επιπλέον ποινές.
(α) Να εκφραστεί το αναμενόμενο κέρδος ως συνάρτηση της ποσότητας παραγωγής x και να δειχθεί ότι είναι τμηματικά γραμμική κοίλη συνάρτηση του x.
(β) Να μοντελοποιηθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση της ποσότητας παραγωγής που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο καθαρό κέρδος.

***Άσκηση* 1.8** Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i|x_i| \\ \text{υ.π.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{array}$$

όπου υποθέτουμε $c_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$. Να εκφραστεί ως π.γ.π.

***Άσκηση* 1.9** Να περιγραφεί πώς αλλάζει η μοντελοποίηση ενός προβλήματος προσέγγισης στόχων όταν κάποιοι ελαστικοί περιορισμοί είναι της μορφής $\alpha_i'\mathbf{x} \leq \beta_i$ ή $\alpha_i'\mathbf{x} \geq \beta_i$.

***Άσκηση* 1.10** Για το πρόβλημα της ενότητας 1.5.1 να δειχθεί ότι, αν το σύστημα των ελαστικών και ανελαστικών περιορισμών έχει εφικτές λύσεις, τότε κάθε εφικτή λύση είναι βέλτιστη για το πρόβλημα (1.19).

***Άσκηση* 1.11** Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

που στη γενική περίπτωση μπορεί να μην έχει καμιά λύση. Να γραφεί ως π.γ.π. το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

1. της νόρμας $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_1$
2. της νόρμας $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_\infty$.