ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΕΦΗΜΕΡΙΔΟΠΩΛΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8 Έστω D η ζήτηση των κουλουριών.
Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας F(k) είναι

k	P(k)	F(k)
0	0.05	0.05
5	0.10	0.15
10	0.10	0.25
15	0.20	0.45
20	0.25	0.70
25	0.15	0.85
30	0.10	0.95
35	0.05	1.00

Επειδή η ζήτηση είναι πολλαπλάσιο του 5, και επομένως το ίδιο και η παραγωγή (εξηγήστε γιατί), μπορούμε να θεωρήσουμε το προϊόν διακριτό με μονάδα τα 5 κουλούρια.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν τα εξής

Το κόστος αγοράς (εδώ παραγωγής) ενός κουλουριού είναι $c = 0.08$.
Η τιμή πώλησης είναι $S = 0.35$.
Τα κουλούρια που δεν πωλούνται στην κανονική τιμή δίνονται σε ίδρυμα με τιμή 0.03, επομένως το επιπλέον κόστος για κάθε απούλητο κομμάτι είναι $h = -0.03$.
Δεν αναφέρεται τίποτε για επιπλέον κόστος ελλείψεων άρα $p = 0$.

Χρησιμοποιώντας $c_o = c + h = 0.08 - 0.03 = 0.05$
και $c_u = S - c + p = 0.35 - 0.08 = 0.27$

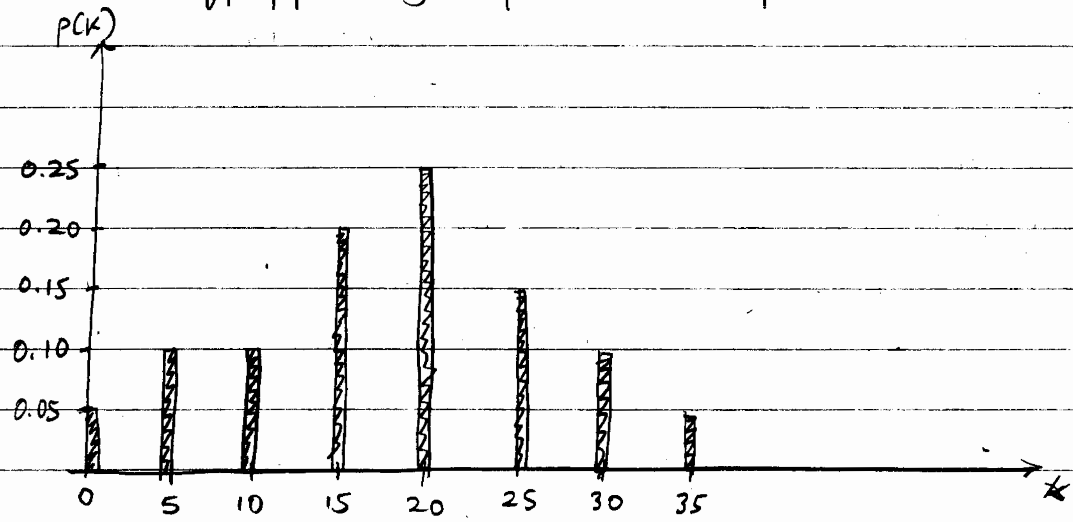
Βρίσκουμε τον κρίσιμο λόγο $\dfrac{c_u}{c_o + c_u} = \dfrac{0.27}{0.32} = 0.844$

(a) Για διακριτή ζήτηση, η βέλτιστη ποσότητα έχουμε δει ότι είναι

$$Q^* = \min\left\{ Q : F(Q) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} \right\}$$

Από τον πίνακα της κατανομής έχουμε $F(20) = 0.7$, $F(25) = 0.85$
άρα $Q^* = 25$.

(b) Το ιστόγραμμα της παραπάνω κατανομής είναι



Από το παραπάνω γράφημα βλέπουμε ότι η προσέγγιση της παραπάνω κατανομής από κανονική θα ήταν αρκετά καλή, άρα περιμένουμε ότι αν βρούμε τη βέλτιστη ποσότητα χρησιμοποιώντας κανονική κατανομή η προσέγγιση θα είναι καλή.

(c) Για να προσεγγίσουμε την δοσμένη κατανομή από κανονική θα πρέπει να υπολογίσουμε μέση τιμή και διασπορά

$$\mu = \sum_k k\,p(k) = 18$$

$$\sigma^2 = \sum_k (k-\mu)^2 p(k) = 78.5 \Rightarrow \sigma = 8.86.$$

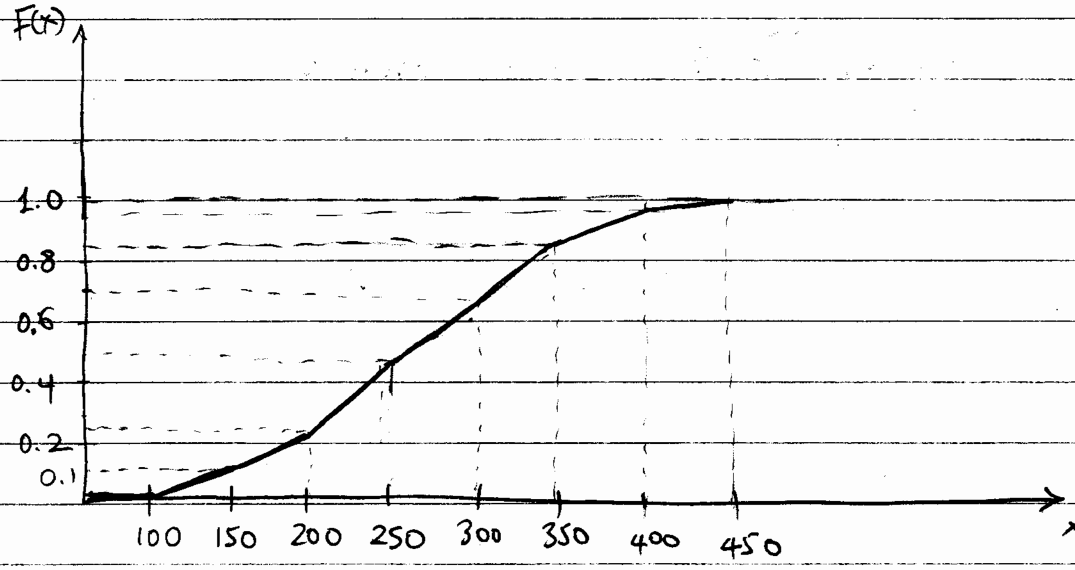
Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή της ζήτησης είναι $N(18, 8.86^2)$
τότε $F(Q) = \Phi\left(\frac{Q-\mu}{\sigma}\right) = 0.844 \Rightarrow \frac{Q-\mu}{\sigma} = 1.011 \Rightarrow Q = 18 + 1.011 \cdot 8.86 = 26.96$
άρα $Q = 26.96$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9

Έστω D η ζήτηση σε χιλιάδες κάρτες (δηλ. η μονάδα μέτρησης του D είναι 1,000 κάρτες).
Η κατανομή δίνεται όχι πλήρως αλλά με πιθανότητες διαστημάτων:

$P[100 \leq D \leq 150] = 0.1$, $P[150 < D \leq 200] = 0.15$ κλπ.

Επειδή χρειαζόμαστε την πλήρη κατανομή κάνουμε τις εξής παραδοχές
Πρώτον, υποθέτουμε ότι η D είναι συνεχής. Η προσέγγιση είναι καλή αφού ισχύει μέχρι το τρίτο δεκαδικό ψηφίο.
Δεύτερον, μέσα σε κάθε διάστημα υποθέτουμε ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη, δηλ. όλες οι ποσότητες μεταξύ 100,000 και 150,000 είναι ισοπίθανες κλπ.
Επομένως η κατανομή είναι τμηματικά γραμμική



Τα σημεία που αλλάζει η κλίση είναι

$F(100) = 0$	$F(300) = 0.70$
$F(150) = 0.1$	$F(350) = 0.85$
$F(200) = 0.25$	$F(400) = 0.95$
$F(250) = 0.50$	$F(450) = 1.00$

Αφού έχουμε προσδιορίσει την κατανομή, βρίσκουμε τον κρίσιμο λόγο:

Ανάλογα με το Πρόβλημα 8, έχουμε $c = 0.50$, $S = 0.65$, $h = p = 0$

άρα $C_0 = 0.5$, $C_u = 0.15$, $\frac{C_u}{C_0 + C_u} = \frac{0.15}{0.65} = 0.231$

Ο κρίσιμος λόγος βρίσκεται μεταξύ 0.10 και 0.25 επομένως

η βέλτιστη ποσότητα Q βρίσκεται στο διάστημα $150 < Q < 200$.

Σ' αυτό το διάστημα η συνάρτηση κατανομής έχει τη μορφή

$$F(x) = 0.10 + 0.15 \cdot \frac{x - 150}{50}$$ (έτσι ώστε $F(150) = 0.10$ και $F(200) = 0.25$)

Επομένως η εξίσωση $F(Q) = 0.231$ έχει λύση:

$$0.1 + 0.15 \cdot \frac{Q - 150}{50} = 0.231 \Rightarrow Q = 193,667$$ επομένως

η εταιρεία πρέπει να παράγει 193667 κάρτες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10

Η περίοδος είναι 3 μήνες. Η ζήτηση έχει κατανομή $D \sim N(60, 36^2)$.
Το κόστος αποθήκευσης ανά έτος ανά αυτοκίνητο είναι 500 επομένως το κόστος αποθήκευσης ανά περίοδο είναι $h = \frac{500}{4} = 125$.

(a) Το επιπλέον κόστος έλλειψης είναι $p = 250$ (κόστος μεταφοράς επείγοντος).
Από το Παράρτημα 5-Β, παράγραφος 2 των σημειώσεων (σελ. 292) προκύπτει ότι

$$F(Q) = \frac{p}{p+h} = \frac{250}{375} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{Q-60}{36}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{Q-60}{36} = 0.431 \Rightarrow Q = 60 + 0.431 \cdot 36 = 75.5$$

επομένως η εταιρεία πρέπει να παραγγέλλει έτσι ώστε να ξεκινάει με απόθεμα 76 αυτοκίνητα κάθε περίοδο.

(b) Εδώ αυτό που αλλάζει είναι το κόστος των ελλείψεων
$p = 100 + 50 = 150$, επομένως

$$F(Q) = \frac{150}{125+150} = \frac{150}{275} = 0.546 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{Q-60}{36}\right) = 0.546 \Rightarrow \frac{Q-60}{36} = 0.116 \Rightarrow Q = 60 + 36 \cdot 0.116 = 64.16$$

Επομένως τώρα η εταιρεία πρέπει να παραγγέλλει έτσι ώστε να ξεκινάει με απόθεμα 64 αυτοκίνητα κάθε περίοδο.

Η διαφορά από το (a) είναι αναμενόμενη αφού τώρα υποθέτουμε ότι οπελάτης περιμένει 3 μήνες και το κόστος έλλειψης είναι μικρότερο από προηγουμένως. Επίσης η διαφορά εδώ είναι ότι οι ελλείψεις καλύπτονται με την επόμενη παραγγελία και όχι με επείγουσες μεταφορές.

(c) Εδώ έχουμε την περίπτωση χαμένων πωλήσεων με $c = 10000$, $S = 13500$, $h = 250$ και $p = 0$.

Από το παράρτημα 5-Β, παράγραφο 3 (σελ. 293)

βρίσκουμε $F(Q) = \dfrac{p+S-c}{p+S-c+h} = \dfrac{3500}{3625} = 0.966$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{Q-60}{36}\right) = 0.966 \Rightarrow \frac{Q-60}{36} = 1.825 \Rightarrow Q = 125.7$$

δηλαδή τώρα η εταιρεία παραγγέλλει έτσι ώστε να έχει αρχικό απόθεμα 126 αυτοκίνητα κάθε περίοδο.

Στην περίπτωση αυτή που ο πελάτης δεν περιμένει καθόλου για το αυτοκίνητο αν δεν υπάρχει άμεσα διαθέσιμο το κόστος έλλειψης που είναι το διαφυγόν κέρδος των 3500 είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το κόστος αποθήκευσης, επομένως η εταιρεία πρέπει να παραγγέλλει ώστε να έχει αρχικό απόθεμα 126 αυτοκίνητα κάθε περίοδο, έτσι ώστε να καλύπτει τη ζήτηση με πιθανότητα περίπου 97%.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11

Η λύση είναι ανάλογη μ' αυτή του προβλήματος 8.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12

Από τα δεδομένα του προβλήματος βρίσκουμε

$S = 150$

$c = 28.5$

$h = -20 + 0.4 = -19.6$

$p = 0$

Επομένως $c_0 = c + h = 28.5 - 19.6 = 8.9$

$c_u = S - c + p = 150 - 28.5 = 121.5$

άρα $F(Q) = \frac{c_u}{c_0 + c_u} = \frac{121.5}{130.4} = 0.932.$

a) Αν η ζήτηση είναι ομοιόμορφη $U(50, 250)$

η κατανομή είναι $F(x) = \frac{x - 50}{200}$, επομένως

$\frac{Q - 50}{200} = 0.932 \Rightarrow Q = 50 + 200 \cdot 0.932 = 236,4$

άρα πρέπει να αγοραστούν 237 τσάντες.

b) Αν η ζήτηση είναι κανονική $N(150, 20^2)$

έχουμε $\phi\left(\frac{Q-150}{20}\right)=0.932 \Rightarrow \frac{Q-150}{20}=1.491 \Rightarrow Q=179.8$

δηλαδή $Q=180$ τσάντες.

(c) Στην περίπτωση (a) η τυπική απόκλιση της ζήτησης

είναι $\sqrt{\frac{(250-50)^2}{12}}=\frac{200}{2\sqrt{3}}=57,7$.

Αν η ζήτηση στο (b) ήταν $N(150, 57{,}7^2)$ η ποσότητα θα ήταν Q τέτοια ώστε

$$\phi\left(\frac{Q-150}{57{,}7}\right)=0.932 \Rightarrow \frac{Q-150}{57{,}7}=1.491 \Rightarrow Q=236$$

δηλαδή 236 τσάντες, που είναι σχεδόν ίση με αυτή της ομοιόμορφης.

Επομένως η διαφορά μεταξύ (a) και (b) εδώ οφείλεται κατά κύριο λόγο στη διαφορά της διασποράς - και πολύ λιγότερο στον τύπο της κατανομής.