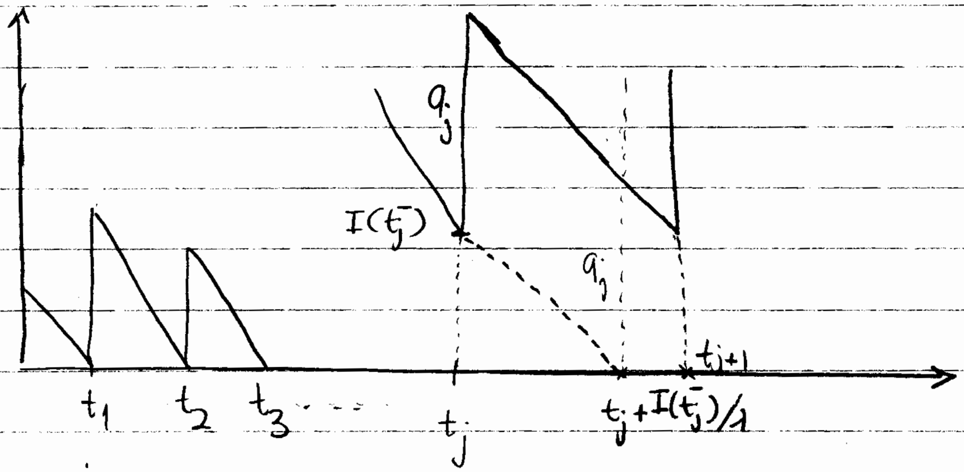
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1



Περίπτωση 1 $\quad t_j + \frac{I(t_j^-)}{\lambda} < t_{j+1}$

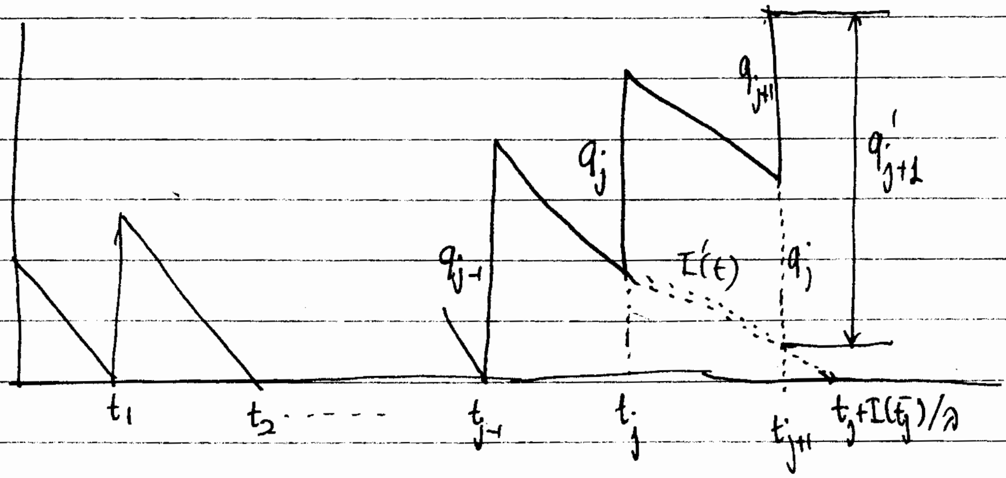
Θεωρούμε μια άλλη πολιτική που παραγγέλνει $q_1, q_2, \dots, q_{j-1}$ στις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \dots, t_{j-1}$, δεν παραγγέλνει τη στιγμή t_j κ' παραγγέλνει q_j τη στιγμή $t_j' = t_j + I(t_j^-)/\lambda$. Μετά τη στιγμή t_j' ακολουθεί την προηγ. πολιτική.

Αυτή η πολιτική έχει το ίδιο κόστος παραγγελιών με την αρχική (η παραγγελία q_j μεταφέρθηκε από t_j σε t_j').

Το κόστος αποθήκευσης είναι το ίδιο για $t \le t_j$ και $t \ge t_j'$. Για $t_j < t < t_j'$ έχουμε $I'(t) = I(t) - q < I(t)$ επομένως το κόστος αποθήκευσης της νέας πολιτικής είναι μικρότερο για $t_j < t < t_j'$.

Επομένως η νέα πολιτική έχει συνολικό κόστος μικρότερο από την αρχική.

Περίπτωση 2 $\quad t_{j+1} < t_j + \frac{I(t_j^-)}{\lambda}$.



~~Περίπτω~~

Εδώ θεωρούμε μια νέα πολιτική που παραγγέλλει ποσότητες $q_1, q_2, \dots, q_{j-1}$ στις στιγμές $t_1, t_2, \dots, t_{j-1}$.

Τη στιγμή t_j δεν παραγγέλλει, ενώ τη στιγμή t_{j+1} παραγγέλλει $q'_{j+1} = q_j + q_{j+1}$. ~~Μετά~~ Για $t > t_{j+1}$ ακολουθεί την προηγούμενη πολιτική.

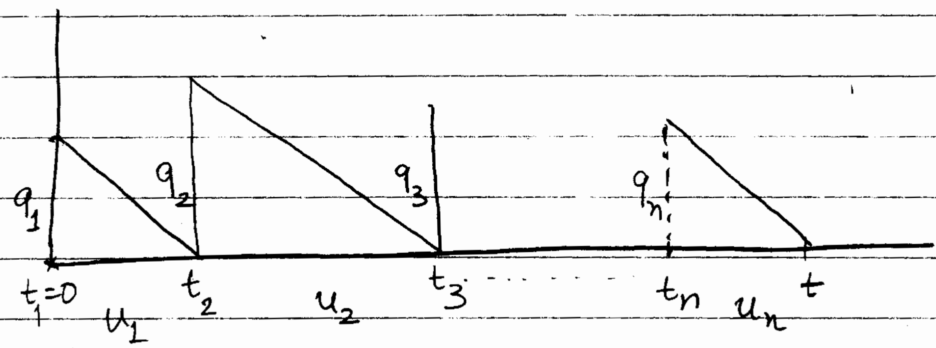
Η νέα πολιτική έχει ακριβώς τις ίδιες παραγγελίες και συνάρτηση αποθέματος για $t < t_j$ και $t > t_{j+1}$, επομένως και το ίδιο κόστος. Για $t_j \le t \le t_{j+1}$, η νέα πολιτική παραγγέλλει την ίδια συνολική ποσότητα $q_j + q_{j+1}$ αλλά σε μία παραγγελία τη στιγμή t_{j+1}.

Επομένως το κόστος παραγγελιών είναι μικρότερο από την αρχική πολιτική. Επίσης για $t_j \le t \le t_{j+1}$ έχουμε $I'(t) = I(t) - q_j < I(t)$ δηλ. η νέα πολιτική έχει μικρότερο απόθεμα κ' επομένως μικρότερο κόστος αποθήκευσης.
Άρα η νέα πολιτική έχει μικρότερο συνολικό κόστος από την αρχική.

Και στις δύο περιπτώσεις βλέπουμε ότι δεν μπορεί να είναι βέλτιστη η πολιτική που παραγγέλει τη στιγμή t_j, στην οποία $I(t_j) > 0$.

Πρόβλημα 3.2

Έστω $C(t)$ το συνολικό κόστος στο διάστημα $[0, t)$, και $OF(t)$ ο αριθμός παραγγελιών σ' αυτό το διάστημα.
Πρώτα παρατηρούμε ότι για να ελαχιστοποιηθεί το $C(t)$ θα πρέπει οι παραγγελίες να είναι τέτοιες ώστε το απόθεμα να είναι ίσο με μηδέν τη χρονική στιγμή t (αν δεν είναι τότε η πολιτική που την τελευταία φορά πριν το t παραγγέλλει λιγότερη ποσότητα κατά $\varepsilon > 0$ έχει μικρότερο κόστος αποθήκευσης και αγοράς χωρίς να δημιουργεί ελλείψεις).
Υποθέτουμε επίσης ότι το αρχικό απόθεμα $I(0) = 0$.
Επομένως αν $OF(t) = n$, και $q_1, q_2, \ldots, q_n$ οι ποσότητες που παραγγέλλονται τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \ldots, t_n$ θα πρέπει να ισχύει $q_1 + q_2 + \cdots q_n = \lambda t$
Επίσης, επειδή $I(0) = 0$, θα πρέπει $t_1 = 0$. Σχηματικά



Έστω u_i, $i = 1, \ldots, n$ το διάστημα που διαρκεί η παραγγελία i.
Έχουμε $u_i = q_i/\lambda$, και επομένως $\sum_{i=1}^{n} u_i = t$

Με βάση τα παραπάνω, η πολιτική παραγγελιών καθορίζεται από τις εξής μεταβλητές απόφασης: $n, q_1, q_2, \ldots, q_n$

και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του $C(t)$ είναι το

$$\min_{n, q_1, \dots, q_n} C(t)$$

που μπορεί να λυθεί σε δύο στάδια:

$$\min_{n} \left\{ \min_{q_1, \dots, q_n} C(t) \right\}.$$

Το εσωτερικό πρόβλημα $\min_{q_1, \dots, q_n} C(t)$ είναι η ελαχιστοποίηση του $C(t)$ με τον επιπλέον περιορισμό ότι θα γίνουν ακριβώς n παραγγελίες. Έχουμε

$$\min_{q_1, \dots, q_n} C(t)$$

$$\text{υ.π.} \quad q_1 + \dots + q_n = \lambda t$$

$$q_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Η αντικ. συνάρτηση $C(t)$ αποτελείται από το κόστος παραγγελίας το κόστος αγοράς του προϊόντος κ' το κόστος αποθήκευσης

Κόστος παραγγελίας $= nK =$ σταθ. (επειδή γίνονται n παραγγελίες κ' το n είναι σταθερό στο υποπρόβλημα).

Κόστος αγοράς $= c \cdot (q_1 + \dots + q_n) = c\lambda t =$ σταθ.

Κόστος αποθήκευσης $= h\left[\frac{1}{2} q_1 \cdot u_1 + \frac{1}{2} q_2 u_2 + \dots + \frac{1}{2} q_n u_n\right]$

Για να το δούμε αυτό: Στο διάστημα $[t_i, t_{i+1})$ διάρκειας u_i το μέσο απόθεμα είναι ίσο με $\frac{1}{2} q_i$, επομένως το συνολικό κόστος αποθήκευσης είναι $h \cdot \frac{1}{2} q_i \cdot u_i$

Θέτοντας $u_i = \frac{q_i}{\lambda}$, έχουμε

$$C(t) = nK + c\lambda t + \frac{1}{2}\frac{h}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

Αφήνοντας έξω τους σταθερούς όρους, το παραπάνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης γίνεται:

$$\min_{q_1,\dots,q_n} \sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

$$\text{υ.π.} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = \lambda t$$

$$q_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

(πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού)

Παίρνουμε την Lagrangean:

$$L(q_1,\dots,q_n,\mu) = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 - \mu\left(\sum_{i=1}^{n} q_i - \lambda t\right)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης της L είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i=1,\dots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 2q_i - \mu = 0 \Rightarrow q_i = \frac{\mu}{2}, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} q_i - \lambda t = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} q_i = \lambda t \Rightarrow n\cdot\frac{\mu}{2} = \lambda t \Rightarrow \mu = \frac{2\lambda t}{n}$$

Άρα $q_i = \frac{\mu}{2} = \frac{\lambda t}{n}$ $i=1,\dots,n$, επομένως η βέλτιστη λύση είναι $q_1 = q_2 = \dots = q_n = \frac{\lambda t}{n}$, δηλ. να παραγγέλλουν ίσες ποσότητες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.3

$$C(q) = c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2}hq.$$

Η $C(q)$ είναι συνεχής, με

$$C'(q) = -\frac{k\lambda}{q^2} + \frac{1}{2}h \quad \text{και}$$

$$C''(q) = \frac{2k\lambda}{q^3}.$$ Επειδή $q>0$, $C''(q)>0$ άρα η $C(q)$ είναι αυστηρά κυρτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.4

Χρησιμοποιούμε ως μονάδα χρόνου το έτος κ' ως μονάδα προϊόντος το pound. Επομένως

$$\lambda = 50\,\frac{\text{tons}}{\text{έτος}} = 50 \cdot 2000\,\frac{\text{pounds}}{\text{έτος}} = 10^5\,\frac{\text{pounds}}{\text{έτος}}$$

$$h = 0.015385\,\$/\text{pound-εβδομ.} = 52 \cdot 0.015385\,\$/\text{pound-έτος} = 0.8\,\$/\text{pound-έτος}$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} = 5000 \text{ pounds}$$

$$C^* = \sqrt{2k\lambda h} = 4000\,\$/\text{έτος}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.3

$$C(q) = c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2} hq.$$

Η $C(q)$ είναι συνεχής, με

$$C'(q) = -\frac{k\lambda}{q^2} + \frac{1}{2}h \quad \text{και}$$

$$C''(q) = \frac{2k\lambda}{q^3}.$$ Επειδή $q>0$, $C''(q)>0$ άρα η $C(q)$ είναι αυστηρά κυρτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.4

Χρησιμοποιούμε ως μονάδα χρόνου το έτος κ' ως μονάδα προϊόντος το pound. Επομένως

$$\lambda = 50 \frac{\text{tons}}{\text{έτος}} = 50 \cdot 2000 \frac{\text{pounds}}{\text{έτος}} = 10^5 \frac{\text{pounds}}{\text{έτος}}$$

$$h = 0.015385 \, \$/\text{pound-εβδομ} = 52 \cdot 0.015385 \, \$/\text{pound-έτος} = 0.8 \, \$/\text{pound-έτος}$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} = 5000 \text{ pounds}$$

$$C^* = \sqrt{2k\lambda h} = 4000 \, \$/\text{έτος}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.6

Έστω $\tilde{C}(q) = \frac{K\lambda}{q} + \frac{1}{2}hq$. Ξέρουμε ότι ελαχιστοποιείται για

$q = q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}$ και $\tilde{C}(q^*) = \tilde{C}^* = \sqrt{2K\lambda h}$.

Επομένως
$$\frac{\tilde{C}(q)}{\tilde{C}^*} = \frac{K\lambda}{q\sqrt{2K\lambda h}} + \frac{1}{2}\frac{h \cdot q}{\sqrt{2K\lambda h}} = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{K\lambda}{2h}} + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{h}{2K\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{2q}\sqrt{\frac{2K\lambda}{h}} + \frac{1}{2}q\sqrt{\frac{h}{2K\lambda}} = \frac{1}{2}\frac{q^*}{q} + \frac{1}{2}\frac{q}{q^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{q^*}{q} + \frac{q}{q^*}\right)$$

Για $\frac{q}{q^*} = 2 \Rightarrow \frac{\tilde{C}(q)}{\tilde{C}^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

και για $\frac{q}{q^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\tilde{C}(q)}{\tilde{C}^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1{,}0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.7

$F(x) = a x^{-\alpha} + b x^{\beta}$

$F'(x) = -\alpha a x^{-\alpha-1} + b\beta x^{\beta-1} = x^{\beta-1}\left[b\beta - \alpha a x^{-\alpha-\beta}\right]$

Ανεξάρτητα από την τιμή του β (αρκεί $\beta \geq 0$) έχουμε

$$\lim_{x\to 0} F(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} F'(x) = -\infty$$

Επομένως η μοναδική λύση της $F'(x)=0$ είναι

$$b\beta - \alpha a\, x^{-(\alpha+\beta)} = 0 \Rightarrow x^{\alpha+\beta} = \frac{\alpha a}{\beta b} \Rightarrow x^* = \left(\frac{\alpha a}{\beta b}\right)^{1/(\alpha+\beta)}$$

που μας δίνει το μοναδικό ακρότατο της F.

Για να δείξουμε ότι το ακρότατο είναι ελάχιστο παίρνουμε τη δεύτερη παράγωγο της F στο x^*:

$$F''(x) = a\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2} + b\beta(\beta-1)x^{\beta-2} = x^{\beta-2}\cdot\left[a\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-\beta} + b\beta(\beta-1)\right]$$

$$= x^{\beta-2}\left[\frac{a\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+\beta}} - b\beta(\beta-1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F''(x^*) = (x^*)^{\beta-2}\cdot\left[\frac{\alpha a(\alpha+1)}{\frac{\alpha a}{\beta b}} + b\beta(\beta-1)\right] = (x^*)^{\beta-2}\cdot\left[\beta b(\alpha+1) + \beta b(\beta-1)\right]$$

$$= (x^*)^{\beta-2}\cdot b\beta(\alpha+\beta) \geq 0$$

Επομένως το x^* είναι σημείο ελαχίστου της F.

Για να δούμε την εφαρμογή του αποτελέσματος στο EOQ:

Έστω ότι έχουμε την δυνατότητα να μειώσουμε το σταθερό κόστος παραγγελίας από K σε ~~K_0~~ $K_1 < K$. Αυτή η μείωση έχει κόστος ίσο με $aK_1^{-\alpha} - aK^{-\alpha} > 0$.

Επειδή το βέλτιστο κόστος του νέου προβλήματος είναι $\tilde{C}^* = c\lambda + \sqrt{2K_1\lambda h}$,

έχουμε ότι το συνολικό κόστος (μείωσης κ' νέου προβλήματος) είναι

$$aK_1^{-\alpha} - aK^{-\alpha} + c\lambda + \sqrt{2K_1\lambda h}$$

Για να βρούμε το βέλτιστο επίπεδο του νέου K_1 πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την παραπάνω ως προς K_1, ή ισοδύναμα:

$$\min_{K_1 \geq 0} aK_1^{-\alpha} + \sqrt{2K_1\lambda h} = aK_1^{-\alpha} + \sqrt{2\lambda h}\, K_1^{1/2} = F(K_1),$$

με $b = \sqrt{2\lambda h}$ και $\beta = 1/2$.

Επομένως το βέλτιστο κόστος K_1 είναι $\left(\frac{a\alpha}{\beta b}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.9

Από τις σχέσεις $q^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega}}$, $\nu = -(1-\omega)q^*$

βρίσκουμε $q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 1000}{0.75 \cdot 0.81}} = \cancel{447{,}21} \; 444{,}44 = \frac{4000}{9}$

$$\nu^* = -(0{,}81) \cdot \frac{4000}{9} = 360$$

δηλ. να παραγγέλνουμε κάθε φορά ποσότητα ίση με $\frac{4000}{9}$

κ' να επιτρέπουμε ελλείψεις ίσες με 360.

Το κόστος (εκτός αγορών) είναι ίσο με

$$C^* = \sqrt{2k\lambda h\omega} = \sqrt{2 \cdot 60 \cdot 1000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}81} = 270$$

Αν το σταθερό κόστος παραγγελίας μειωθεί σε $K = 33.75$ θα έχουμε από τις ίδιες εξισώσεις

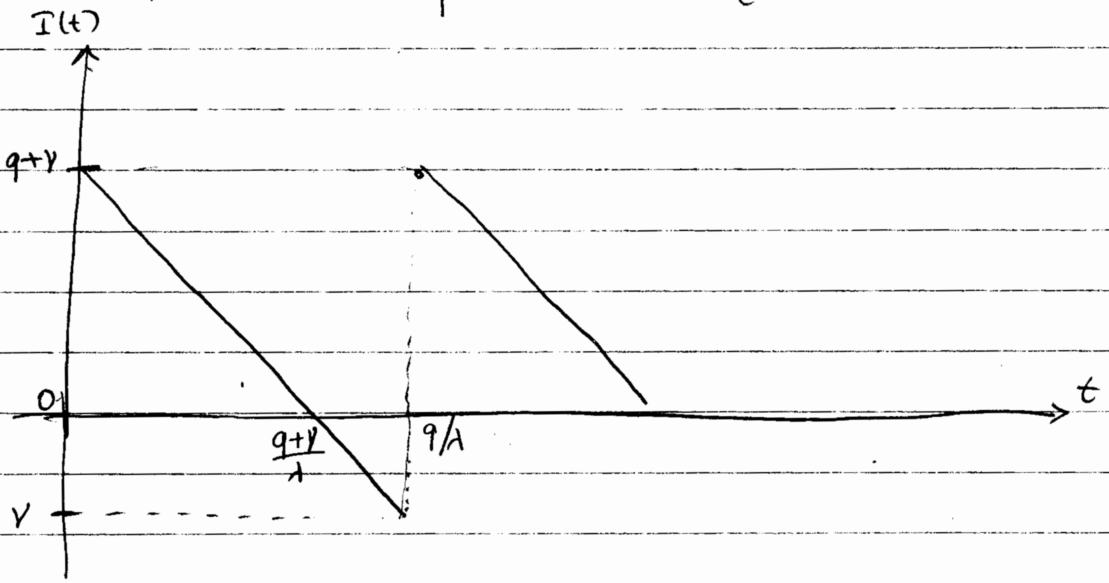
$$q^* = \frac{300}{9} = 333.33$$

$$\nu^* = -(0{,}81) \cdot \frac{300}{9} = 270$$

$$C^* = 202.5$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.10

Θυμηθείτε την ορολογία: $v = r - D \Rightarrow r = v + D$, και το γράφημα του αποθέματος συναρτήσει του χρόνου:



Το μήκος κύκλου είναι ίσο με $\frac{q}{\lambda}$. Στο διάστημα μήκους $\frac{q+v}{\lambda}$ έχουμε θετικό απόθεμα και στο διάστημα μήκους $\frac{v}{\lambda}$ θετικές ελλείψεις.

Το κόστος αποθέματος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με $\frac{C_H(r,q)}{q/\lambda}$,

όπου $C_H(r,q)$ = συνολικό κόστος αποθέματος στη διάρκεια ενός κύκλου.

Επειδή το απόθεμα $I(t) = q + v - \lambda t$, $t \in [0, q/\lambda]$, και $I(t) \geq 0$ για $t \in [0, \frac{q+v}{\lambda}]$, έχουμε

$$C_H(r,q) = h\int_0^{\frac{q+v}{\lambda}} (q+v-\lambda t)\,dt = h\int_0^{\frac{q+r-D}{\lambda}} (q+r-\lambda t - D)\,dt.$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης: $y = q + r - \lambda t$ έχουμε

$dt = -\frac{1}{\lambda}dy$, κ' για $t = 0 \Rightarrow y = q + r$

για $t = \frac{q+r-D}{\lambda} \Rightarrow y = D$

Επομένως

$$C_H(r,q) = -\frac{h}{\lambda}\int_{r+q}^{D}(y-D)\,dy = \frac{h}{\lambda}\int_{D}^{r+q}(y-D)\,dy.$$

Επίσης ξέρουμε ότι $r = \nu + D < D$. Επομένως

$$C_H(r,q) = \frac{h}{\lambda}\int_{D}^{r+q}(y-D)\,dy = \frac{h}{\lambda}\int_{r}^{r+q}(y-D)^{+}\,dy,$$ επειδή $(y-D)^{+}=0$ για $y<D$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε το κόστος ελλείψεων ανά μονάδα χρόνου $= \frac{C_b(r,q)}{q/\lambda}$, όπου $C_b(r,q)$ είναι το συνολικό κόστος ελλείψεων στη διάρκεια ενός κύκλου:

$$C_b(r,q) = b\int_{\frac{q+\nu}{\lambda}}^{q/\lambda}|I(t)|\,dt = -b\int_{\frac{q+\nu}{\lambda}}^{q/\lambda}(q+\nu-\lambda t)\,dt =$$

$$= -b\int_{\frac{q+r-D}{\lambda}}^{q/\lambda}(q+r-\lambda t-D)\,dt.$$ Θέτοντας πάλι $y=q+r-\lambda t$

$$C_b(r,q) = -\frac{b}{\lambda}\int_{D}^{r}(y-D)\,dy = -\frac{b}{\lambda}\int_{r}^{D}(y-D)\,dy$$

Για $y\le D$ έχουμε $y-D<0$ επομένως $(y-D)^{-} = -(y-D)$.

Για $y\ge D$ έχουμε $(y-D)\ge 0$ επομένως $(y-D)^{-}=0$. $\Rightarrow (r+q>D)$

$$\Rightarrow C_b(r,q) = \frac{b}{\lambda}\int_{r}^{r+q}(y-D)^{-}\,dy.$$

Ξέρουμε ότι το μέσο κόστος παραγγελιών κ' αγορών είναι $c\lambda + \frac{k\lambda}{q}$.

Άρα το μέσο (συνολικό) κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο

με $$c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{\frac{h}{\lambda}\int_r^{r+q}(y-D)^+\,dy}{\frac{q}{\lambda}} + \frac{\frac{b}{\lambda}\int_r^{r+q}(y-D)^-\,dy}{\frac{q}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow C(r,q) = c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{\int_r^{r+q}\left[h(y-D)^+ + b(y-D)^-\right]dy}{q} = c\lambda + \frac{k\lambda + \int_r^{r+q}\hat{C}(y-D)\,dy}{q}$$

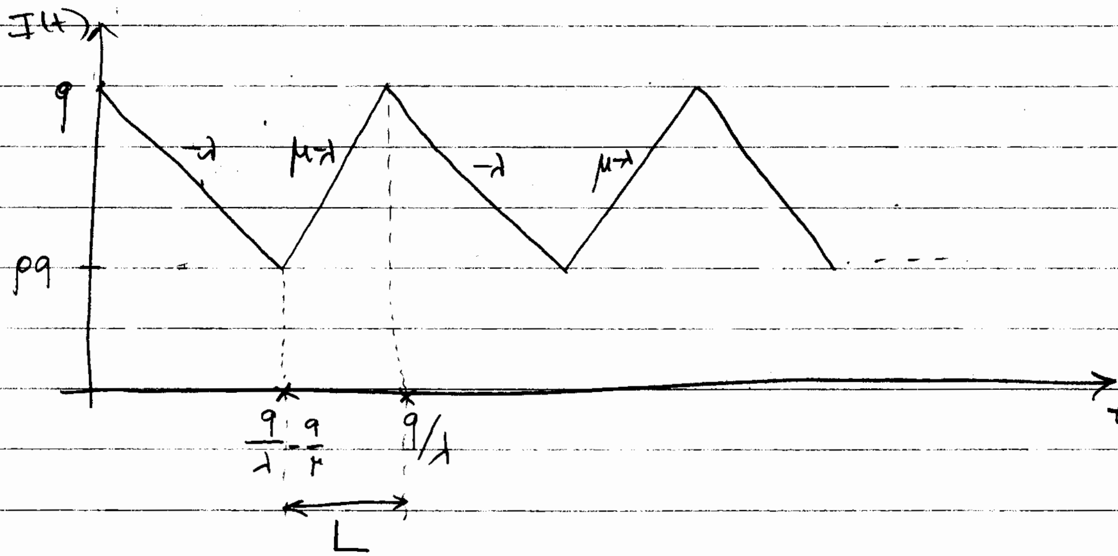
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.14

Για να καταλάβουμε καλύτερα το πρόβλημα, μπορούμε να θεωρήσουμε την εξής εφαρμογή: Έστω ότι το προϊόν είναι ένα μεταλλικό κομμάτι που η παραγωγή του γίνεται σε δύο φάσεις: Η πρώτη φάση είναι κατεργασία με θέρμανση πού γίνεται ξεχωριστά για κάθε κομμάτι και με ρυθμό μ ανά μονάδα χρόνου. Η δεύτερη φάση είναι η ψύξη και ενίσχυση του μετάλλου, που γίνεται με την εμβάπτιση σε ένα ειδικό διάλυμα. Η δεύτερη αυτή φάση γίνεται στιγμιαία (σε αμελητέο χρόνο) αλλά πρέπει να γίνει ταυτόχρονα για όλα τα κομμάτια της παραγγελίας.
Επομένως τα κομμάτια της παραγγελίας παράγονται με ρυθμό μ αλλά είναι διαθέσιμα για πώληση μόνο όταν ολοκληρωθεί η παραγωγή ολόκληρης της παραγγελίας.

Αφού δεν επιτρέπονται ελλείψεις, η παραγωγή πρέπει να ξεκινήσει κάποιο χρονικό διάστημα L πριν εξαντληθεί το υπάρχον απόθεμα από έτοιμα κομμάτια. Αν το μέγεθος της παραγγελίας είναι ίσο με q, τότε ο χρόνος που χρειάζεται για την παραγωγή είναι ίσος με q/μ και επομένως $L = q/\mu$.
Η ζήτηση στη διάρκεια αυτού του χρόνου είναι ίση με $D = \lambda L = \frac{\lambda q}{\mu} = \rho q$
Επομένως η παραγγελία δίνεται όταν $I = \rho q$.

Κατά τη διάρκεια της παραγωγής τα κομμάτια που έχουν παραχθεί προστίθενται στο απόθεμα παρ' όλο που δεν είναι διαθέσιμα για πώληση. Αυτό σημαίνει ότι και αυτά υπολογίζονται στο κόστος αποθήκευσης επειδή καταλαμβάνουν χώρο αποθήκευσης, αντιπροσωπεύουν δεσμευμένο κεφάλαιο κλπ.

Επομένως το απόθεμα κατά τη φάση παραγωγής αυξάνει με ρυθμό $(\mu-\lambda)$, από την ελάχιστη τιμή $I_{min}=\rho q$ μέχρι τη μέγιστη τιμή $I_{max}=q$. Η τελευταία εξίσωση σημαίνει ότι τη στιγμή που ολοκληρώνεται η παραγωγή της παραγγελίας το απόθεμα από έτοιμα κομμάτια έχει μόλις εξαντληθεί και το συνολικό απόθεμα είναι ίσο με q. Το διάγραμμα μεταβολής του $I(t)$ είναι το εξής:



Από το γράφημα φαίνεται ότι στη διάρκεια ενός κύκλου (μέγεθος κύκλου $= q/\lambda$), το απόθεμα μεταβάλλεται γραμμικά μεταξύ των τιμών ρq και q.
Επομένως το μέσο απόθεμα στη διάρκεια του κύκλου είναι ίσο με

$$\bar{I}=\frac{1}{2}(\rho q+q)=\frac{1}{2}(1+\rho)q.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.15

Για την περίπτωση (1) πού κάθε προϊόν είναι άμεσα διαθέσιμο προς πώληση ισχύει η ανάλυση του κεφ. 3.4.3 και συγκεκριμένα οι εξισώσεις (3.4.2) κ' (3.4.3):

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h(1-\rho)}}, \quad C_1^* = \sqrt{2k\lambda h(1-\rho)} + c\lambda = \tilde{C}_1^* + c\lambda$$

Για την περίπτωση (2) όπου τα προϊόντα είναι διαθέσιμα μόνο αφού ολοκληρωθεί η παραγγελία, πρέπει να βρούμε την βέλτιστη πολιτική. Από το πρόβλημα 3.14 έχουμε ότι $\bar{I} = \frac{1}{2}(1+\rho)q$, επομένως το κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με

$$C(q) = c\lambda + \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2}h(1+\rho)q$$

πού είναι ίσο με το κόστος ενός μοντέλου ΕΟQ όπου $h' = h(1+\rho)$

Επομένως $q_2^* = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h(1+\rho)}}, \quad C_2^* = \sqrt{2k\lambda h(1+\rho)} + c\lambda = \tilde{C}_2^* + c\lambda.$

Χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα $\lambda=90$, $\mu=150$, $k=500$, $h=8$ βρίσκουμε $\rho = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$, και

$$q_1^* = 75\sqrt{5} = 167{,}71, \quad \tilde{C}_1^* = 240\sqrt{5} = 536{,}66$$

$$q_2^* = \frac{75}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}q_1^* = 83{,}85, \quad \tilde{C}_2^* = 480\sqrt{5} = 2\tilde{C}_1^* = 1073{,}32$$

Αν η ζήτηση αυξηθεί από $\lambda=90$ σε $\lambda'=120$, τότε $\rho' = \frac{120}{150} = \frac{4}{5}$ και

$$q_1^* = 50\sqrt{30} = 273{,}86 \qquad C_1^* = 80\sqrt{30} = 438{,}18$$

$$q_2^* = \frac{50\sqrt{30}}{3} = 91{,}29 \qquad C_2^* = 240\sqrt{30} = 1214{,}53$$

Πρόβλημα 3.16

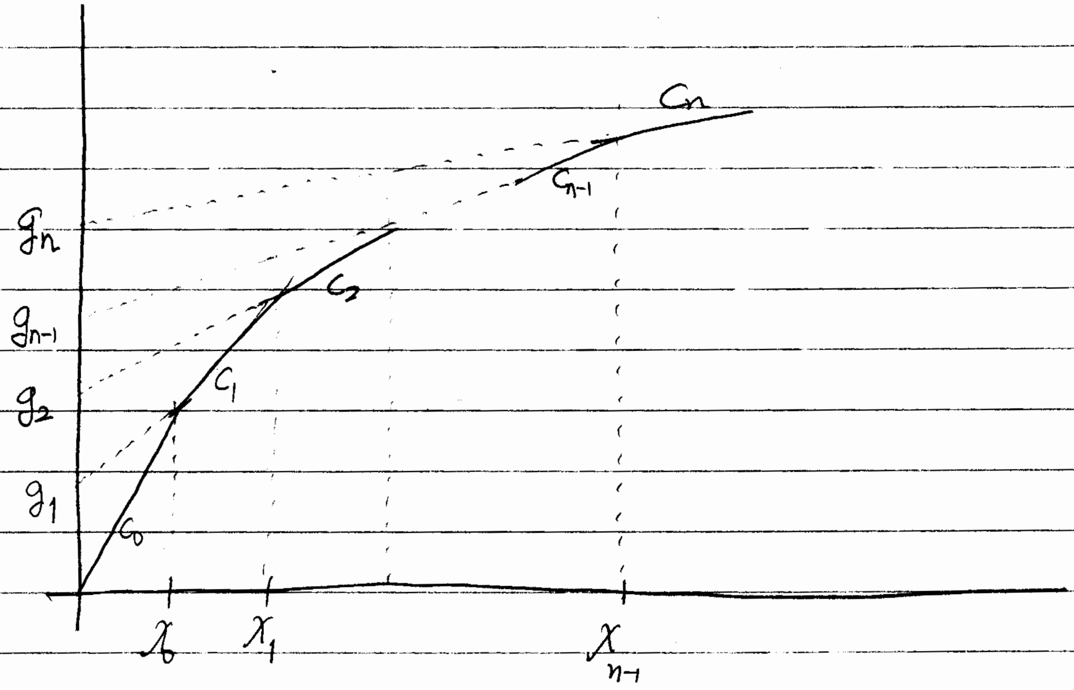
Το μέσο κόστος παραγγελιών και αποθεμάτων είναι ίσο με

$$C(q) = [k + c(q)]\frac{\lambda}{q} + \frac{1}{2}\left[h + \alpha\frac{c(q)}{q}\right]\cdot q ,$$

όπου $c(q)$ είναι το κόστος αγοράς q μονάδων προϊόντος.

Με βάση το σχήμα διαδοχικών εκπτώσεων (incremental discounts) $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, έχουμε

$$c(q) = \begin{cases} c_0 q & 0 < q \le x_0 \\ c_0 x_0 + c_1(q - x_0) & x_0 < q \le x_1 \\ c_0 x_0 + c_1(x_1 - x_0) + c_2(q - x_1) & x_1 < q \le x_2 \\ \vdots & \\ c_0 x_0 + \cdots + c_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + c_n(q - x_{n-1}) & q > x_{n-1} \end{cases}$$



Από το σχήμα βλέπουμε ότι η $c(q)$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί

$$c(q) = \min\{g_0 + c_0 q,\ g_1 + c_1 q,\ \ldots,\ g_n + c_n q\},$$

όπου $g_0 = 0$, $g_1 = (c_0 - c_1)x_0$, $g_2 = (c_0 - c_1)x_0 + (c_1 - c_2)x_1$, ...

η γενικά $g_0 = 0$, $g_i = \sum_{k=0}^{i-1} (c_k - c_{k+1})x_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Επιστρέφοντας στο μέσο κόστος:

$$C(q) = \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2} \cdot \underline{h} q + \frac{\lambda c(q)}{q} + \frac{1}{2}\alpha c(q) =$$

$$= \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2}\underline{h} q + \left(\frac{\lambda}{q} + \frac{1}{2}\alpha\right) c(q) =$$

$$= \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2}\underline{h} q + \left(\frac{\lambda}{q} + \frac{1}{2}\alpha\right) \min\{g_i + c_i q,\ i = 0, 1, \ldots, n\}$$

$$= \frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2}\underline{h} q + \min\left\{\left(\frac{\lambda}{q} + \frac{1}{2}\alpha\right) g_i + c_i q,\ i = 0, 1, \ldots, n\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{k\lambda}{q} + \frac{1}{2}\underline{h} q + \frac{\lambda g_i}{q} + \frac{1}{2}\alpha c_i q + \lambda c_i + \frac{1}{2}\alpha g_i,\ i = 0, 1, \ldots, n\right\}$$

Επομένως $C(q) = \min_{i=0,\ldots,n}\{C_i(q)\} = \begin{cases} C_0(q) & 0 < q \le x_0 \\ C_1(q) & x_0 < q \le x_1 \\ \vdots & \\ C_n(q) & q > x_{n-1} \end{cases}$, όπου

$$C_i(q) = \frac{(k + g_i)\lambda}{q} + \frac{1}{2}(\underline{h} + \alpha c_i) q + \lambda c_i + \frac{1}{2}\alpha g_i$$

Για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$ η συνάρτηση $C_i(q)$ είναι κυρτή

Επίσης $C_i(x_i-) = \dfrac{(k+g_i)\lambda}{x_i} + \dfrac{1}{2}(h+\alpha c_i)x_i + \lambda c_i + \dfrac{1}{2}\alpha g_i$

$C_{i+1}(x_i+) = \dfrac{(k+g_{i+1})\lambda}{x_i} + \dfrac{1}{2}(h+\alpha c_{i+1})x_i + \lambda c_{i+1} + \dfrac{1}{2}\alpha g_{i+1}$

$\Rightarrow C_{i+1}(x_i+) - C_i(x_i-) = \dfrac{(g_{i+1}-g_i)\lambda}{x_i} + \dfrac{1}{2}\alpha(c_{i+1}-c_i)x_i + \lambda(c_{i+1}-c_i) + \dfrac{1}{2}\alpha(g_{i+1}-g_i)$

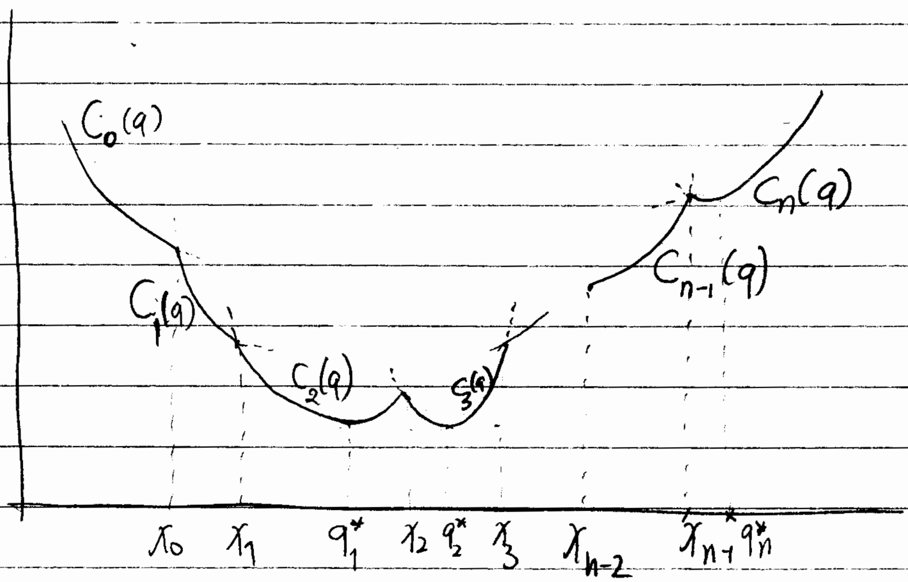
Επειδή $g_{i+1}-g_i = (c_i - c_{i+1})x_i$, παίρνουμε:

$C_{i+1}(x_i+) - C_i(x_i-) = (c_i-c_{i+1})\lambda + \dfrac{1}{2}\alpha(c_{i+1}-c_i)x_i + \lambda(c_{i+1}-c_i) + \dfrac{1}{2}\alpha(c_i-c_{i+1})x_i = 0,$

άρα $C_{i+1}(x_i+) = C_i(x_i-)$ κ' η συνάρτηση $C(q)$ είναι παντού συνεχής

Τέλος $C_i'(q) = \dfrac{-(k+g_i)\lambda}{q^2} + \dfrac{1}{2}(h+\alpha c_i)$

Επειδή $g_{i+1} > g_i$, $c_{i+1} < c_i \Rightarrow C_{i+1}'(q) < C_i'(q)$, $i=0,1,..,n-1$



Έστω q_i^* το σημείο ελαχίστου της $C_i(q)$.

Από το προηγούμενο σχήμα φαίνεται ότι η βέλτιστη ποσότητα q^* είναι $q^* = q_{j^*}$, όπου $j^* \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, τέτοιο ώστε

$$x_{j^*-1} < q_{j^*} \leq x_{j^*} \quad \text{και}$$

$$C_j(q_{j^*}) = \min\{ C_j(q_j) : j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, x_{j-1} < q_j \leq x_j \}$$

Δηλαδή η q^* είναι εκείνο το ελάχιστο q_{j^*} που ελαχιστοποιεί τό κόστος ανάμεσα σε όλα τα ελάχιστα q_j που ανήκουν στην περιοχή ισχύος της αντίστοιχης έκπτωσης $[x_{j-1}, x_j]$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.17.

Σύμφωνα με την ανάλυση του κεφ. 3.5.2,

έχουμε $C(q) = \min\{C_0(q), C_1(q)\}$, όπου

$$C_0(q) = \frac{K_0 \lambda}{q} + \frac{1}{2}(h + \alpha c_0)q + c_0\lambda = \frac{2 \cdot 10^6}{q} + 8q + 8 \cdot 10^5$$

$$C_1(q) = \frac{K_1 \lambda}{q} + \frac{1}{2}(h + \alpha c_1)q + c_1\lambda + \frac{1}{2}\alpha(c_0 - c_1)x$$

$$= \frac{[K + (c_0 - c_1)x]\lambda}{q} + \frac{1}{2}(h + \alpha c_1)q + c_1\lambda + \frac{1}{2}\alpha(c_0 - c_1)x$$

$$= \frac{6{,}48 \cdot 10^7}{q} + 7q + 6 \cdot 10^5 + 314$$

Τα σημεία ελαχίστου q_0^* q_1^* είναι:

$$C_0'(q) = -\frac{2 \cdot 10^6}{q^2} + 8 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{2 \cdot 10^6}{8} = 0.25 \cdot 10^6 \Rightarrow q_0^* = 0.5 \cdot 10^3 = 500$$

$$C_1'(q) = -\frac{6{,}48 \cdot 10^7}{q^2} + 7 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{6{,}48 \cdot 10^7}{7} \Rightarrow q_1^* = 3043$$

Επειδή $x < q_0^* < q_1^*$ έχουμε ότι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας

είναι $q^* = q_1^*$, και το βέλτιστο κόστος $C^* = C_1(q_1^*) = 642910$.

Κάτω από αυτή την πολιτική τα έσοδα του προμηθευτή για κάθε

παραγγελία είναι ίσα με

$R = c_0 x_0 + c_1(q^* - x_0) = 188834,$

Μ' αυτή την πολιτική ο αριθμός παραγγελιών στη μονάδα του χρόνου είναι ίσος με $\frac{\lambda}{q^*}$, επομένως τα έσοδα του προμηθευτή ανά μονάδα χρόνου είναι ίσα με

$$\bar{R} = R \cdot \frac{\lambda}{q} = 620640$$

Αν υιοθετηθεί η πρόταση του προμηθευτή για ενιαία τιμή μονάδας $c' = 62$ χωρίς εκπτώσεις, τότε ο διανομέας θα έχει ένα κλασικό πρόβλημα EOQ με $K = 200$, $\lambda = 10^4$, $h' = h + \alpha c = 14,2$ και επομένως η ποσότητα παραγγελίας θα είναι

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h'}} = 530,75$$

και το κόστος ανά μονάδα χρόνου

$$C^* = \sqrt{2K\lambda h'} + c'\lambda = 627536$$

Κάτω από αυτή την πολιτική ο προμηθευτής πωλεί όλη την ετήσια ποσότητα λ σε τιμή μονάδας c', επομένως τα έσοδά του ανά μονάδα χρόνου είναι $\bar{R}' = c'\lambda = 620000$.

Επομένως με το νέο τιμολόγιο το συνολικό κόστος του διανομέα μειώνεται κατά $\frac{642910 - 627536}{642910} \simeq 2,4\%$, ενώ η μείωση εσόδων του προμηθευτή είναι αμελητέα. Από την άλλη πλευρά τώρα γίνονται μικρότερες και συχνότερες παραγγελίες. Αν ο προμηθευτής έχει σημαντικό κόστος αποθήκευσης μπορεί να προτιμά το νέο τιμολόγιο παρ'όλη την ελαφρά μείωση των εσόδων του, γιατί μ' αυτό θα έχει σημαντική μείωση του κόστους αποθεμάτων.

$= (1-f)\left[2f + g(1-f) - gf\right] =$ (επειδή $g = xf$)

$= (1-f)\left[2f + xf(1-f) - xf^2\right] = f(1-f)\left[2 + x(1-f) - xf\right] =$

$= f(1-f)\left[2 + x(1-2f)\right]$.

Επειδή $1-f<0$, για να δείξουμε ότι $g'' \geq 0$ αρκεί ν.δ.ο.

$2 + x(1-2f) < 0$ ή ισοδύναμα $(2f-1)x - 2 \geq 0$. $\forall\, x>0$.

Όμως $\left[2f(x) - 1\right]x - 2 = \left(\dfrac{2}{1-e^{-x}} - 1\right)\cdot x - 2 =$

$= \dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\cdot x - 2 = \dfrac{(1+e^{-x})x - 2(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} = \dfrac{h(x)}{1-e^{-x}}$,

και επειδή $1-e^{-x}>0$ αρκεί ν.δ.ο. $h(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

όπου $h(x) = (1+e^{-x})x - 2(1-e^{-x})$.

Πρώτα έχουμε $h(0) = 0$.
Επίσης $h'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} - 2e^{-x} = 1 - (1+x)e^{-x}$.

Επειδή $e^{x} \geq 1+x$ $\forall\, x \geq 0 \Rightarrow (1+x)e^{-x} \leq 1$ $\forall\, x \geq 0$ άρα

$h'(x) \geq 0$ $\forall\, x \geq 0$, δηλ. η h είναι αύξουσα για $x \geq 0$, και

επειδή $h(0) = 0 \Rightarrow h(x) \geq 0$ $\forall\, x \geq 0$.

Άρα $(2f-1)x - 2 \geq 0 \Rightarrow g''(x) \geq 0 \Rightarrow g(x)$ κυρτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.23

Στην ανάλυση του κεφ. 3.7 έχουμε υπόθεση ότι $\underline{h}=0$ άρα $h=\alpha c$.

Έχουμε $C(u;\alpha)=\dfrac{k+c\lambda u}{1-e^{-\alpha u}}$, κ επειδή $1-e^{-\alpha u}>0 \ \forall\ \alpha, u>0$

ισχύει ότι $\lim\limits_{a\to 0} C(u,a)=+\infty$, δηλ. όταν το επιτόκιο είναι

πολύ μικρό η παρούσα αξία όλων των μελλοντικών πληρωμών αποκλίνει στο άπειρο, πράγμα λογικό αφού όλες οι μελλοντικές πληρωμές έχουν την ίδια παρούσα αξία, θετική, ανεξάρτητα από το πότε γίνονται.

Επίσης $\lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha C(u,a) = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha(k+c\lambda u)}{1-e^{-\alpha u}}$

Επειδή $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1-e^{-\alpha u})=0$, από τον κανόνα l'Hospital παίρνουμε

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha C(u) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{k+c\lambda u}{u e^{-\alpha u}} = \frac{k+c\lambda u}{u} = \frac{k}{u}+c\lambda,$$

και επειδή $u=\dfrac{q}{\lambda} \Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0} \alpha C(u) = \dfrac{k\lambda}{q}+c\lambda.$

Από την άλλη πλευρά όταν $\alpha\to 0 \Rightarrow h\to \underline{h}=0$ κ' το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου (κλασικό μοντέλο EOQ)

είναι ίσο με $C(q)=\dfrac{k\lambda}{q}+c\lambda$

Δηλ. όταν το επιτόκιο τείνει στο μηδέν η ποσότητα $\alpha C(u;\alpha)$ τείνει ασυμπτωτικά στο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.24

Όταν $I(0-)=I_0$, η πρώτη παραγγελία πρέπει να γίνει τη στιγμή που εξαντλείται το αρχικό απόθεμα, δηλ. τη στιγμή $t_0=\frac{I_0}{\lambda}$. Από εκεί και πέρα οι παραγγελίες γίνονται τις στιγμές t_0+u, t_0+2u, ... και το μέγεθος κάθε παραγγελίας είναι ίσο με $q=\lambda u$, σύμφωνα με την ανάλυση του 3.7.
Για κάθε κύκλο διάρκειας u το κόστος είναι $K+cq=K+c\lambda u$, ενώ για το αρχικό διάστημα $[0,t_0]$ δεν υπάρχει κόστος, αφού $h=0$ κ' δεν υπάρχει κόστος παραγγελίας και αγοράς.

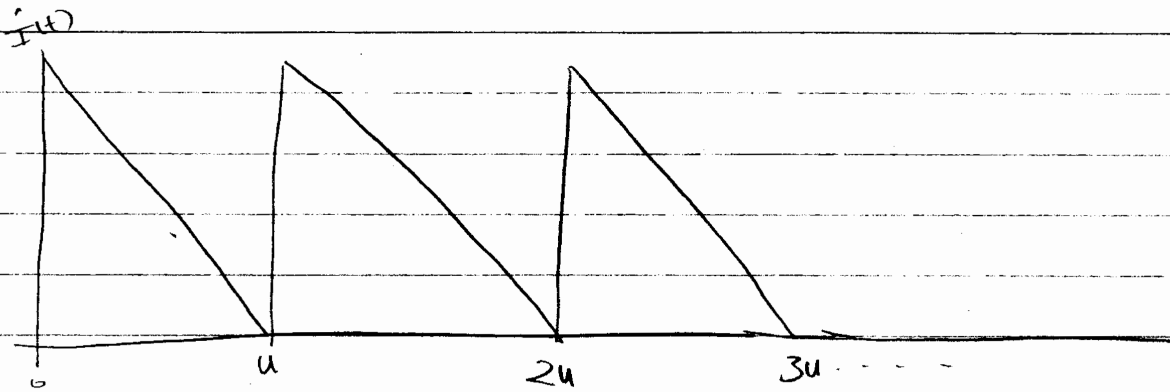
Επομένως η τιμή της αντικ. συνάρτησης (παρούσα αξία) για την πολιτική u είναι ίση με

$$C(u;I_0)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(t_0+nu)}(K+c\lambda u)=e^{-\alpha t_0}(K+c\lambda u)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n u}$$

$$=e^{-\alpha I_0/\lambda}\frac{(K+c\lambda u)}{1-e^{-\alpha u}}=e^{-\alpha I_0/\lambda}\cdot C(u;0),$$ όπου $C(u;0)$ είναι η τιμή για μηδενικό αρχικό απόθεμα.

Επομένως η τιμή του u που ελαχιστοποιεί το $C(u;I_0)$ για κάθε αρχικό απόθεμα I_0 είναι ίση με τη τιμή που ελαχιστοποιεί το $C(u;0)$, δηλ. η βέλτιστη πολιτική παραγγελιών είναι ανεξάρτητη του αρχικού αποθέματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.25



Υπολογίζουμε την παρούσα αξία του κόστους αποθήκευσης για το διάστημα $[0,u]$:

$$\int_0^u e^{-\alpha t}\, \underline{h}\, I(t)\,dt = \underline{h} \int_0^u e^{-\alpha t}(q-\lambda t)\,dt = \underline{h}\lambda \int_0^u e^{-\alpha t}(u-t)\,dt$$

Αφού υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα (με ολοκλήρωση κατά μέρη) βρίσκουμε

$$\underline{H}(u) = \int_0^u e^{-\alpha t}\, \underline{h}\, I(t)\,dt = \frac{h\lambda}{\alpha^2}\left[\alpha u(1-e^{-\alpha u}) - \left(1-e^{-\alpha u} - \alpha u e^{-\alpha u}\right)\right]$$

Το $\underline{H}(u)$ παρουσιάζει την παρούσα αξία στην αρχή ενός κύκλου του συνολικού κόστους αποθήκευσης στη διάρκεια του κύκλου.

Επομένως το συνολικό κόστος παραγγελιών και αποθεμάτων που πληρώνεται στη διάρκεια ενός κύκλου έχει παρούσα αξία υπολογισμένη στην αρχή του κύκλου ίση με $K + c\lambda u + \underline{H}(u)$.

Δηλαδή η συνολική ακολουθία πληρωμών στο διάστημα $[0,\infty)$ ισοδυναμεί με ακολουθία πληρωμών $K + c\lambda u + \underline{H}(u)$ καθε μια από τις χρονικές στιγμές nu, $n=0,1,2,\dots$

Άρα η παρούσα αξία όλων των πληρωμών υπολογισμένη τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι ίση με

$$C(u) = \frac{K + c\lambda u + H(u)}{1 - e^{-\alpha u}}$$, ακολουθώντας ένα συλλογισμό όμοιο μ' αυτόν του κεφ. 3.7.

Αντικαθιστώντας το $H(u)$ βρίσκουμε

$$C(u) = \frac{K + c\lambda u}{1 - e^{-\alpha u}} + \frac{H(u)}{1 - e^{-\alpha u}} =$$

$$= \frac{K + c\lambda u}{1 - e^{-\alpha u}} + \frac{h\lambda}{\alpha^2}\left[\alpha u - \left(1 - \frac{\alpha u e^{-\alpha u}}{1 - e^{-\alpha u}}\right)\right] =$$

$$= \frac{K + c\lambda u}{1 - e^{-\alpha u}} + \frac{h\lambda}{\alpha^2}\left[\alpha u - 1 + \frac{\alpha u e^{-\alpha u}}{1 - e^{-\alpha u}}\right]$$

Για να βρούμε το βέλτιστο u:

$$C(u) = \frac{\alpha^2(K + c\lambda u) + h\lambda\left[(\alpha u - 1)(1 - e^{-\alpha u}) + \alpha u e^{-\alpha u}\right]}{1 - e^{-\alpha u}}$$

$$= \frac{\alpha^2(K + c\lambda u) + h\lambda\left[\alpha u - 1 + e^{-\alpha u}\right]}{1 - e^{-\alpha u}} =$$

$$= \frac{(\alpha^2 K - h\lambda) + \alpha\lambda(h + \alpha c)u + h\lambda e^{-\alpha u}}{1 - e^{-\alpha u}}$$

Θέτοντας $\alpha u = x$ βρίσκουμε

$$C(u) = \tilde{C}(\alpha u), \text{ όπου } \tilde{C}(x) = \frac{(\alpha^2 K - h\lambda) + \lambda(h + \alpha c)x + h\lambda e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

$$= \frac{\alpha^2 K}{1 - e^{-x}} + \lambda(h + \alpha c)\frac{x}{1 - e^{-x}} - h\lambda$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\tilde{C}'(x) = -\alpha^2 K \cdot \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} + \lambda(\underline{h}+\alpha c)\,\frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{-\alpha^2 K e^{-x} + \lambda(\underline{h}+\alpha c)\,e^{-x}(e^{x}-x-1)}{(1-e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\left[\lambda(\underline{h}+\alpha c)\left(e^{x}-x-1\right) - \alpha^2 K\right]$$

Επομένως, $\tilde{C}(x) = 0$ για

$$e^{x}-x-1 = \frac{\alpha^2 K}{\lambda(\underline{h}+\alpha c)} \Rightarrow \frac{e^{x}-x-1}{\alpha} = \frac{\alpha K}{\lambda(\underline{h}+\alpha c)} \Rightarrow \frac{f(\alpha u)}{\alpha} = \frac{\alpha K}{\lambda(\underline{h}+\alpha c)},$$

όπου $f(x) = e^{x}-x-1$.

Αντίστοιχα με την προσέγγιση στο κεφ. 3.7, έχουμε $f(x) = e^{x}-x-1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

και παίρνοντας (για μικρά x) $f(x) \approx \frac{x^2}{2}$ βρίσκουμε

$$\frac{\alpha^2 u^2}{2\alpha} = \frac{\alpha K}{\lambda(\underline{h}+\alpha c)} \Rightarrow u^2 = \frac{2K}{\lambda(\underline{h}+\alpha c)} \Rightarrow u^* \approx \sqrt{\frac{2K}{\lambda h}} \quad \text{και}$$

$$q^* = \lambda u^* = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}}, \quad \text{όπου} \quad h = \underline{h}+\alpha c.$$

Επομένως η προσέγγιση δεύτερης τάξης της $f(x)$ οδηγεί ακριβώς στη λύση του EOQ για το μέσο κόστος.