ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.3

Από τον ορισμό του $\tilde{c}$ έχουμε

$$\tilde{c}[s,t) = c(t) + \sum_{k=s+1}^{t} h(k)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\tilde{c}[*,t) = \min_{0 \le s \le t} \tilde{c}[s,t)$

δηλ. να βρούμε τη βέλτιστη περίοδο $s^*(t)$ στην οποία πρέπει να αγοραστεί η ζήτηση $d(t)$ για την περίοδο t.
Προφανώς για $t=0$ $s^*(0)=0$ άρα $\tilde{c}[*,0) = c(0)$

Τώρα για την περίοδο $t+1$, $t \ge 0$, η βέλτιστη περίοδος είναι είτε η $t+1$ με κόστος ανά μονάδα $c(t+1)$, ή κάποια προηγούμενη $s \le t$. Αν είναι κάποια $s^* < t+1$, τότε

$$\tilde{c}[s^*,t+1) = c(s^*) + \sum_{k=s^*+1}^{t+1} h(k) = c(s^*) + \sum_{k=s^*+1}^{t} h(k) + h(t+1)$$

$$= \tilde{c}[s^*,t) + h(t+1)$$

Σ' αυτή την περίπτωση τό $\tilde{c}[s^*,t)$ πρέπει να είναι ίσο με $\min_{0 \le s \le t} \tilde{c}[s,t)$. Για να το δούμε αυτό ας υποθέσουμε

ότι υπάρχει άλλο s' με $0 \le s' \le t$ τέτοιο ώστε $\tilde{c}[s',t) < \tilde{c}[s^*,t)$. Τότε θα είχαμε και

$$\tilde{c}[s',t+1) = \tilde{c}[s',t) + h(t+1) < \tilde{c}[s^*,t) + h(t+1) = \tilde{c}[s^*,t)$$

άρα το s^* δεν θα ήταν το βέλτιστο για το $\tilde{c}[s,t+1)$

Επομένως $\tilde{c}[s^*,t) = \tilde{c}[*,t)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε το $\tilde{c}(*,t)$, τότε τό $\tilde{c}(*,t+1)$ είναι το ελάχιστο μεταξύ

του $c(t+1)$ καί του $\tilde{c}(*,t) + h(t+1)$, δηλαδή

$$\tilde{c}(*,t+1) = \min\{c(t+1),\ \tilde{c}(*,t) + h(t+1)\}$$

Σημειώνουμε ότι αυτό το αναδρομικό σχήμα είναι ένα μοντέλο δυναμικού προγραμματισμού και η απόδειξη που δώσαμε δεν είναι τίποτε άλλο από την αρχή βελτιστότητας του Bellman προσαρμοσμένη σ' αυτό το πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 45

(α)

Η εξίσωση βελτιστότητας για το DEL είναι

$$V(t) = \min_{0 \le s < t} \{ V(s) + k[s,t) \}, \quad V(0) = 0,$$

όπου $k[s,t) = k(s) + \sum_{j=s}^{t-1} \tilde{c}[s,j)\, d(j)$

είναι το συνολικό κόστος παραγωγής και αποθήκευσης αν όλη η ζήτηση για τις περιόδους $s, s+1, \dots, t-1$ παραχθεί στην περίοδο s.

Έστω $s^*(t) = s^*$, δηλαδή $V(t) = V(s^*) + k[s^*,t) = \min_{0 \le s < t} \{V(s) + k[s,t)\}$

Θα δείξουμε ότι $s^*(t+1) \ge s^*$.

Ας υποθέσουμε ότι $s^*(t+1) = s' < s^*$.

Έχουμε

$$V(t+1) = V(s') + k[s', t+1)$$

Επίσης αφού το s^* δεν είναι βέλτιστο για την περίοδο $t+1$ έχουμε

$$V(s^*) + k[s^*, t+1) > V(s') + k[s', t+1) \qquad (1)$$

Όμως για κάθε $s \le t+1$

$$k[s, t+1) = k(s) + \sum_{j=s}^{t} \tilde{c}[s,j)\, d(s) =$$

$$= k(s) + \sum_{j=s}^{t-1} \tilde{c}[s,j) d(s) + \tilde{c}[s,t)\, d(t)$$

$$= k[s,t) + \tilde{c}[s,t)\, d(t), \quad \text{επομένως}$$

$$k[s',t+1) = k[s',t) + \tilde{c}[s',t)\, d(t)$$

$$k[s^*, t+1) = k[s^*,t) + \tilde{c}[s^*,t)\, d(t)$$

έτσι η ανισότητα (1) γίνεται

$$V(s^*) + k[s^*,t) + \tilde{c}[s^*,t)\,d(t) > V(s') + k[s',t) + \tilde{c}[s',t)\,d(t) \quad (2)$$

Από την υπόθεση ότι το $\tilde{c}[s,t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του s, προκύπτει ότι για $s' < s^*$ $\tilde{c}[s^*,t) \leq \tilde{c}[s',t)$
Έτσι για να ισχύει η (2) θα πρέπει αναγκαστικά

$$V(s^*) + k[s^*,t) > V(s') + k[s',t)$$

Πού είναι άτοπο, επειδή έχουμε υποθέσει ότι το s^* είναι βέλτιστο για την περίοδο t.

Άρα $s^*(t+1) \geq s^*$.

(b) Έστω ότι για κάποιο t_H, $s^*(t_H) = t_H - 1$. Τότε για $t = t_H + 1$ ισχύει $t_H - 1 \leq s^*(t_H+1) \leq t_H$ δηλαδή $s^*(t_H+1) = t_H - 1$ ή t_H

Αν $s^*(t_H+1) = t_H - 1$ τότε το t_H+1 είναι order time για το πρόβλημα t_H+1.
Αν $s^*(t_H+1) = t_H$, τότε

$$V(t_H+1) = V(t_H) + k[t_H, t_H+1) =$$
$$= V(t_H-1) + k[t_H-1, t_H) + k[t_H, t_H+1)$$

δηλ. και το t_H-1 και το t_H είναι order times.

Και στις δύο περιπτώσεις το t_H-1 είναι order time για το πρόβλημα t_H+1.

Έστω ότι το t_H-1 είναι order time για το πρόβλημα t_H+k για κάποιο $k \geq 1$. Τότε για το πρόβλημα t_H+k+1 έχουμε

$$s^*(t_H+k+1) \geq s^*(t_H+k).$$

Επειδή για το πρόβλημα t_H+k το t_H-1 είναι order time το $s^*(t_H+k)$ πού είναι το τελευταίο order time θα ικανοποιεί $s^*(t_H+k) \geq t_H-1$, επομένως και

$$s^* \equiv s^*(t_H+k+1) \geq t_H-1, \text{ άρα}$$

$$V(t_H+k+1) = V(s^*) + k[s^*, t)$$

Όμως επειδή $t_H-1 \leq s^* \leq t_H+k$, από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι το t_H-1 είναι order time για το πρόβλημα με ορίζοντα $s^* = s^*(t_H+k+1)$

Επομένως για το πρόβλημα με ορίζοντα t_H+k+1 θα γίνει τουλάχιστον μια παραγγελία την περίοδο t_H-1 και μία (ίσως η ίδια) την περίοδο s^*.

Άρα και για το πρόβλημα με ορίζοντα t_H+k+1 το t_H-1 είναι order time.

Επομένως η επαγωγική απόδειξη έχει ολοκληρωθεί και έτσι το t_H-1 είναι order time για όλα τα προβλήματα με ορίζοντα $t \geq t_H$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.6

Έστω $\underline{d}^T = [d(0), d(1), \ldots, d(T-1)]$ το διάνυσμα ζήτησης για τις πρώτες T περιόδους.
Έχουμε δει ότι λόγω της ιδιότητας μηδενικού αποθέματος, η βέλτιστη πολιτική ορίζεται μονοσήμαντα από ένα υποσύνολο $\Pi \subseteq \{0,1,2,\ldots,T-1\}$, τέτοιο ώστε παραγγελίες γίνονται στην αρχή κάθε περιόδου $\pi_j \in T$.
Επομένως μπορούμε να περιορίσουμε την αναζήτηση της βέλτιστης πολιτικής στο χώρο των υποσυνόλων του $\{0,1,\ldots,T-1\}$ πού είναι πεπερασμένος με πλήθος 2^T
Άρα τό ελάχιστο κόστος ορίζοντα T είναι ίσο με

$$C^*(\underline{d}) = \min\{C(\underline{d}|\pi),\ \pi \subseteq \{0,1,2,\ldots,T-1\}\}.$$

Έστω μια πολιτική $\pi = \{\pi_0 = 0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\} \subseteq \{0,1,2,\ldots,T-1\}$

Η π παραγγέλλει τις εξής ποσότητες:

Στην περίοδο 0: $d(0) + d(1) + \cdots + d(\pi_1 - 1)$

" " π_1: $d(\pi_1) + d(\pi_1+1) + \cdots + d(\pi_2 - 1)$

" " π_m: $d(\pi_m) + d(\pi_{m+1}) + \cdots + d(T-1)$

Επομένως το συνολικό κόστος της π είναι ίσο με

$$C(\underline{d}|\pi) = K(0) + \tilde{c}[0,0)d(0) + \tilde{c}[0,1)d(1) + \cdots \tilde{c}[0,\pi_1-1)d(\pi_1-1) +$$

$$+ K(\pi_1) + \tilde{c}[\pi_1,\pi_1)d(\pi_1) + \tilde{c}[\pi_1,\pi_1+1)d(\pi_1+1) + \cdots + \tilde{c}[\pi_1,\pi_2-1)d(\pi_2-1) +$$

$$\vdots$$

$$+ K(\pi_m) + \tilde{c}[\pi_m,\pi_m)d(\pi_m) + \tilde{c}[\pi_m,\pi_{m+1})d(\pi_m+1) + \cdots + \tilde{c}[\pi_m,T-1)d(T-1)$$

$$\Rightarrow C(\underline{d}|\pi) = A(\pi) + \sum_{t=0}^{T-1} B(t|\pi)\, d(t),$$

όπου $A(\pi) = \sum_{j=0}^{m} K(\pi_j)$,

και $B(t|\pi) = \tilde{c}[\pi_i, t)\, d(t)$ = συνολικό κόστος παραγωγής και αποθήκευσης της ζήτησης $d(t)$,

$i = \max\{j : \pi_j \leq t\}$ = περίοδος παραγγελίας της ζήτησης $d(t)$

Έστω $\underline{B}(\pi)^T = [B(0|\pi), B(1|\pi), \ldots, B(T-1|\pi)]$

Τότε $C(\underline{d}|\pi) = A(\pi) + \underline{B}(\pi)^T \underline{d}$, επομένως

το $C(\underline{d}|\pi)$ είναι γραμμική συνάρτηση του $\underline{d}$ για κάθε π

Επομένως $C^*(\underline{d}) = \min\{c(\underline{d}|\pi) : \pi \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, T\}\}$

είναι το ελάχιστο πεπερασμένου πλήθους γραμμικών συναρτήσεων άρα $C^*(\underline{d})$ είναι κοίλη.

Επίσης επειδή $\underline{B}(\pi) \geq 0 \ \forall \pi \Rightarrow C(\underline{d}|\pi)$ είναι αύξουσα ως προς $\underline{d}$ για κάθε π, επομένως και η $C^*(\underline{d})$ είναι αύξουσα ως προς $\underline{d}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.8 Έστω ότι το (δοσμένο) αρχικό απόθεμα είναι x_0.
Επίσης μας δίνονται κάτω φράγματα $\underline{x}(t)$, $t=1,2,\ldots,T$
και απαιτείται $x(t) \geq \underline{x}(t)$ $\forall\, t=1,2,\ldots,T$.
Πριν προχωρήσουμε ας δούμε το εξής παράδειγμα:
Έστω $T=5$, $d(0)=5$, $d(1)=1$, $d(2)=1$, $d(3)=1$, $d(4)=4$
$x_0=0$, $\underline{x}(1)=6$, $\underline{x}(2)=1$, $\underline{x}(3)=2$, $\underline{x}(4)=5$, $\underline{x}(5)=2$

Παυτά τα δεδομένα έχουμε $x(1)\geq 6$, επομένως
$$x(2)=x(1)+z(1)-d(1) \geq x(1)-d(1) \geq \underline{x}(1)-d(1)=6-1=5.$$
Επίσης απαιτείται $x(2)\geq \underline{x}(2)=1$.
Βλέπουμε λοιπόν ότι λόγω του περιορισμού $x(1)\geq 6$, ο δεύτερος περιορισμός $x(2)\geq 1$ στην ουσία μπορεί να αντικατασταθεί από τον ισχυρότερο περιορισμό $x(2)\geq 5$, δηλ. χωρίς να αλλάξει τίποτα στο πρόβλημα μπορούμε να θέσουμε $x(2)\geq \underline{x}^{\pi}(2)=5$
Τώρα, για $t=3$: $x(3)=x(2)+z(2)-d(2)$
$$\geq \underline{x}^{\pi}(2)-d(2)=5-1=4 \Rightarrow x(3)\geq 4.$$
Επειδή και εδώ ο αρχικός περιορισμός $x(3)\geq 2$ είναι ασθενέστερος, θα ισχύει αναγκαστικά $x(3)\geq 4$ άρα κι εδώ μπορούμε να θέσουμε:
$x(3)\geq \underline{x}^{\pi}(3)=4$
Τώρα για $t=4$: $x(4)=x(3)+z(3)-d(3)$
$$\geq \underline{x}(3)-d(3)=4-1=3$$
Εδώ ο αρχικός περιορισμός είναι $x(4)\geq \underline{x}(4)=5$ που είναι ισχυρότερος αυτού που συνεπάγεται από τον προηγούμενο, άρα το $\underline{x}(4)$ πρέπει να μείνει όπως έχει.

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε περιορισμός $x(t)\geq \underline{x}(t)$ συνεπάγεται κάτω φράγματα και για όλα τα αποθέματα $x(t')$, $t'>t$. Αυτά τα φράγματα μπορεί να είναι ισχυρότερα ή ασθενέστερα από τους δοσμένους περιορισμούς $x(t')\geq \underline{x}(t')$.

Ας δούμε το παραπάνω πιο γενικά:

Για κάθε t ισχύει $x(t+1) = x(t) + z(t) - d(t)$
$\geq \underline{x}^{\pi}(t) - d(t)$

Επίσης $x(t+1) \geq \underline{x}(t+1)$

Επομένως $x(t+1) \geq \max\{\underline{x}(t+1), \underline{x}^{\pi}(t) - d(t)\}$

και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πραγματικό κάτω φράγμα ~~του~~ στην περίοδο t είναι $\underline{x}^{\pi}(t+1) = \max\{\underline{x}(t+1), \underline{x}^{\pi}(t) - d(t)\}$

Μπορούμε επομένως αν μας δοθούν τα $\underline{x}(t), d(t)$, να βρούμε τα $\underline{x}^{\pi}(t)$, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο

$$\underline{x}^{\pi}(0) = x_0$$
$$\underline{x}^{\pi}(t+1) = \max\{\underline{x}(t+1), \underline{x}^{\pi}(t) - d(t)\}, \quad t = 0, \ldots, T-1.$$

και να αντικαταστήσουμε τους περιορισμούς $x(t) \geq \underline{x}(t)$ με τους ισοδύναμους $x(t) \geq \underline{x}^{\pi}(t)$, $t = 1, 2, \ldots, T-1$.

Τώρα βέβαια προκύπτει το ερώτημα σε τί χρησιμεύει αυτή η διαδικασία. Αυτό θα γίνει φανερό παρακάτω.

Θεωρούμε τώρα τη μοντελοποίηση του DEL πού δίνεται από τις 4.3.1 – 4.3.4 σαν πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού. Στην περίπτωση μας το μοντέλο αυτό μεταβάλλεται ως εξής

$$\min_{\{z(t),x(t)\}} \sum_{t=0}^{T-1}\left[k(t)\,\delta(z(t)) + c(t)\,z(t)\right] + \sum_{t=1}^{T} h(t)\,x(t)$$

$$\text{υ.π.} \quad x(t+1) = x(t) + z(t) - d(t) \qquad t=0,\dots,T-1$$

$$x(t) \geq x_-^{\pi}(t) \qquad t=1,\dots,T$$

$$z(t) \geq 0 \qquad t=0,\dots,T-1$$

Στο νέο πρόβλημα που εξετάζουμε το μόνο που αλλάζει είναι οι περιορισμοί $x(t) \geq x_-^{\pi}(t)$, $t=1,\dots,T$.

Κάνουμε τώρα αντικατάσταση των μεταβλητών απόφασης:

$w(t) = x(t) - x_-^{\pi}(t)$. Το πρόβλημα γίνεται

$$\min_{\{z,w\}} \sum_{t=0}^{T-1}\left[k(t)\,\delta(z(t)) + c(t)\,z(t)\right] + \sum_{t=1}^{T} h(t)\left[x_-^{\pi}(t) + w(t)\right]$$

$$\text{υ.π.} \quad x_-^{\pi}(t+1) + w(t+1) = x_-^{\pi}(t) + w(t) + z(t) - d(t) \qquad t=0,\dots,T-1$$

$$w(t) \geq 0 \qquad t=1,\dots,T$$

$$z(t) \geq 0. \qquad t=0,\dots,T-1$$

Η πρώτη ομάδα περιορισμών μπορεί να γραφεί

$$w(t+1) = w(t) + z(t) - \left[d(t) + x_-^{\pi}(t+1) - x_-^{\pi}(t)\right]$$

Από τη σχέση $x_-^{\pi}(t+1) = \max\{x_-(t+1),\, x_-^{\pi}(t) - d(t)\}$ προκύπτει ότι $x_-^{\pi}(t+1) \geq x_-^{\pi}(t) - d(t) \Rightarrow d(t) + x_-^{\pi}(t+1) - x_-^{\pi}(t) \geq 0$.

Έστω $d'(t) = d(t) + x_-^{\pi}(t+1) - x_-^{\pi}(t)$, $t=0,1,\dots,T-1$

Επειδή $d'(t) \geq 0$, το $d'(t)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα νέο διάνυσμα ζήτησης για ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς $x(t) \geq x_-^{\pi}(t)$, δηλ. με $x_-^{\pi}(t) = 0$.

Πραγματικά το μοντέλο μπορεί ισοδύναμα να γραφεί

$$\sum_{t=1}^{T} h(t)\,\underline{x}^{\Pi}(t) + \min_{\{z,w\}} \sum_{t=0}^{T-1}\left[k(t)\,\delta(z(t)) + c(t)\,z(t)\right] + \sum_{t=1}^{T} h(t)\,w(t)$$

$$\text{υ.π.} \quad w(t+1) = w(t) + z(t) - d'(t)$$

$$w(t) \geq 0$$

$$z(t) \geq 0 \,,$$

πού είναι ταυτόσημο μ' αυτό των (4.3.1)-(4.3.4), δηλαδή με ένα κανονικό μοντέλο DEL

Επομένως αλλάζοντας τη ζήτηση σε $d'(t) = d(t) + \underline{x}^{\Pi}(t+1) - \underline{x}^{\Pi}(t)$ και τις μεταβλητές αποθέματος $x(t)$ σε $w(t) = x(t) - \underline{x}^{\Pi}(t)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον γνωστό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για να βρούμε τη λύση.

Σημειώνουμε ότι: 1) Αφού βρεθεί η λύση (z^*, w^*) στο τροποποιημένο πρόβλημα, η μόνη αλλαγή που χρειάζεται είναι να υπολογιστούν τα πραγματικά αποθέματα $x^*(t) = w^*(t) + \underline{x}^{\Pi}(t)$.

2) Η μεταβλητή $w(t)$ δηλώνει πόσο πάνω από την ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα $\underline{x}^{\Pi}(t)$ είναι το απόθεμα την περίοδο t.

3) Τώρα πρέπει να είναι φανερό γιατί χρειάστηκε να πάμε από τα $\underline{x}(t)$ στα $\underline{x}^{\Pi}(t)$.
Τα αρχικά $\underline{x}(t)$ δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούν τις σχέσεις $\underline{x}(t+1) \geq \underline{x}(t) - d(t)$ επομένως αν κάναμε απ' ευθείας την αντικατάσταση $d'(t) = d(t) + \underline{x}(t+1) - \underline{x}(t)$ μπορεί να είχαμε $d'(t) < 0$ για κάποια t, οπότε το d' δεν θα ήταν διάνυσμα ζήτησης

και ο αλγόριθμος για το DEL δεν θα μπορούσε να εφαρμοσθεί.

4) Η ιδιότητα μηδενικού αποθέματος για το τροποποιημένο πρόβλημα συνεπάγεται ότι στη βέλτιστη λύση z^*, w^* ισχύει $z^*(t) > 0$ μόνο όταν $w^*(t) = 0$, δηλαδή όταν $x^*(t) = \underline{x}^{\Pi}(t)$. Επομένως για το αρχικό πρόβλημα η ιδιότητα γίνεται τώρα "ιδιότητα ελάχιστου αποθέματος": Παραγγελίες $(z(t) > 0)$ μπορούν να γίνουν μόνο στις περιόδους στις οποίες $x(t) = \underline{x}^{\Pi}(t)$ δηλ το απόθεμα είναι ίσο με την ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα.

Προβλημα 4.9

Υποθέτουμε, όπως λέει το πρόβλημα, ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από δυνατές τιμές του τελικού αποθέματος, δηλ.
$$x(T) \in \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}.$$

Για κάθε $i=1,2,\ldots,m$, αν απαιτήσουμε $x(T)=x_i$ μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο συνολικό κόστος κάτω από τον επιπλέον περιορισμό χρησιμοποιώντας την ανάλυση του προβλήματος 4.8 και θέτοντας $\underline{x}^{\pi}_{T}(t)=0$, $t=1,\ldots,T-1$, $\underline{x}^{\pi}(T)=b_i$

(Βέβαια στο προηγούμενο πρόβλημα ο περιορισμός ήταν $x(T) \geq \underline{x}^{\pi}(T)$. Όμως ξέρουμε από τη λύση του DEL ότι στη βέλτιστη λύση θα ισχύει $w^*(T)=0 \Rightarrow x^*(T)=\underline{x}^{\pi}(T)=b_i$, δηλ. το τελικό απόθεμα θα είναι ακριβώς ίσο με το απαιτούμενο).

Έστω $V_i = C_i^* + V(T, b_i)$ τό συνολικό κόστος (λειτουργίας + τερματικό), όπου

C_i^* = βέλτιστο κόστος λειτουργίας υπό περιορισμό $x(T) \geq b_i$ όπως προκύπτει από το Πρόβλημα 4.8.

Τώρα η λύση του παρόντος προβλήματος θα είναι
$$V^* = \min_{i=1,\ldots,m} V_i^*.$$

Δηλαδή λύνουμε το πρόβλημα 4.8 για όλα τα δυνατά b_i, και παίρνουμε αυτό που ελαχιστοποιεί το V_i.