ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.6

Για τις συναρτήσεις απώλειας μιας διακριτής τ.μ. X έχουμε:

$g(k) = P[X=k]$, $k=0,1,2,..$ συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$G^0(k) = P[X>k] = \sum_{i=k+1}^{\infty} g(i)$ συμπληρ. συνάρτηση πιθανότητας

$G^1(k) = \sum_{j=k}^{\infty} G^0(i) = E(X-k)^+$ συνάρτηση απώλειας $1^{ης}$ τάξης

$G^2(k) = \sum_{j=k+1}^{\infty} G^1(j) = \dfrac{E\left[(X-k)^+(X-k-1)^+\right]}{2}$ συνάρτηση απώλειας $2^{ης}$ τάξης.

Για την κατανομή Poisson με μέση τιμή μ έχουμε $g(k) = e^{-\mu}\dfrac{\mu^k}{k!}$

Για την Poisson θα δείξουμε τις 6.2.14, 6.2.15 επαγωγικά

Αποδ. της 6.2.14: $G^1(k) = -(k-\mu)G^0(k) + \mu g(k)$, $k=0,1,2,\dots$

Για $k=0$: $G^1(0) = \sum_{j=0}^{\infty} G^0(j) = EX = \mu$

$$-(k-\mu)G^0(k) + \mu g(k) = \mu G^0(0) + \mu g(0) =$$
$$= \mu(1-g(0)) + \mu g(0) = \mu$$

Άρα η ιδιότητα ισχύει για $k=0$. Έστω ότι ισχύει για k. Τότε

$$G^1(k+1) = \sum_{i=k+1}^{\infty} G^0(i) = \sum_{i=k}^{\infty} G^0(i) - G^0(k)$$

$$= G^1(k) - G^0(k) = -(k-\mu)G^0(k) + \mu g(k) - G^0(k)$$

$$= -(k+1-\mu)G^0(k) + \mu g(k)$$

Έχουμε $G^0(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} g(i) = g(k+1) + \sum_{i=k+2}^{\infty} g(i) = g(k+1) + G^0(k+1)$

επομένως

$$G^1(k+1) = -(k+1-\mu)\, G^0(k+1) - (k+1-\mu)\, g(k+1) + \mu\, g(k).$$

Επίσης $-(k+1-\mu)\, g(k+1) + \mu\, g(k) =$

$$= -(k+1-\mu)\, e^{-\mu} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} + \mu\, e^{-\mu} \frac{\mu^{k}}{k!} =$$

$$= -(k+1-\mu)\, e^{-\mu} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} + e^{-\mu} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} (k+1) =$$

$$= \mu\, e^{-\mu} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} = \mu\, g(k+1), \quad \text{έτσι έχουμε}$$

$G^1(k+1) = -(k+1-\mu)\, G^0(k+1) + \mu\, g(k+1)$, και η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί.

<u>Απόδειξη της 6.2.15:</u> $G^2(k) = \frac{1}{2}\left\{\left[(k-\mu)^2 + k\right] G^0(k) - \mu(k-\mu)\, g(k)\right\}$

Για $k=0$: $G^2(0) = \frac{1}{2} E\left(X(X-1)^+\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, g(k) =$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\, g(k) = \frac{1}{2}\left(EX^2 - EX\right) = \frac{\mu+\mu^2-\mu}{2} = \frac{\mu^2}{2}$$

Το δεξιό μέλος για $k=0$:

$$\frac{1}{2}\left\{\mu^2 G^0(0) + \mu^2 g(0)\right\} = \frac{1}{2}\mu^2\left\{G(0) + g(0)\right\} = \frac{1}{2}\mu^2\left\{1 - g(0) + g(0)\right\}$$

$= \frac{1}{2}\mu^2$, άρα ισχύει για $k=0$. Έστω ότι ισχύει για k.

Τότε για $k+1$:

$$G^2(k+1) = \sum_{j=k+2}^{\infty} G^1(j) = \sum_{j=k+1}^{\infty} G^1(j) - G^1(k+1) = G^2(k) - G^1(k+1)$$

(από επαγωγή και 6.2.14) $= \frac{1}{2}\left\{((k-\mu)^2+k)\,G^0(k) - \mu(k-\mu)\,g(k)\right\} + (k+1-\mu)\,G^0(k+1) - \mu g(k+1) =$

$\left(G^0(k) = G^0(k+1) + g(k+1)\right)$ $= \frac{1}{2}\left[(k-\mu)^2+k\right]\left(G^0(k+1)+g(k+1)\right) - \frac{1}{2}\mu(k-\mu)\,g(k) + ((k+1)-\mu)\,G^0(k+1) - \mu g(k+1) =$

$$= \frac{1}{2}\left[(k-\mu)^2+k+2(k+1-\mu)\right]G^0(k+1) + \frac{1}{2}\left[(k-\mu)^2+k-2\mu\right]g(k+1) - \frac{1}{2}\mu(k-\mu)\,g(k)$$

Έχουμε (a) $(k-\mu)^2+k+2(k+1-\mu) = k^2+\mu^2-2k\mu+3k+2-2\mu$

$$= k^2+\mu^2+1-2k\mu+2k-2\mu+k+1 = (k+1-\mu)^2+k+1 \qquad (1)$$

(b) $g(k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k+1}{\mu} = \frac{k+1}{\mu}\,g(k+1)$

Άρα

$$\frac{1}{2}\left[(k-\mu)^2+k-2\mu\right]g(k+1) - \frac{1}{2}\mu(k-\mu)\,g(k) = \frac{1}{2}\left[(k-\mu)^2+k-2\mu\right]g(k+1) - \frac{1}{2}(k+1)(k-\mu)\,g(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}g(k+1)\left[(k-\mu)^2+k-2\mu-(k+1)(k-\mu)\right] = -\frac{1}{2}g(k+1)\left[(k+1)(k-\mu)-k+2\mu-(k-\mu)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}g(k+1)\left[(k+1)(k-\mu)-(k-\mu)-(k-\mu)^2+\mu\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}g(k+1)\left[(k-\mu)(k+1-1-(k-\mu))+\mu\right] = -\frac{1}{2}g(k+1)\left[(k-\mu)\cdot\mu+\mu\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}g(k+1)(k+1-\mu)\,\mu. \qquad (2)$$

Από τις (1) κ' (2) προκύπτει:

$$G^2(k+1) = \frac{1}{2}\left\{\left[(k+1-\mu)^2+k+1\right]G^0(k+1) - \mu(k+1-\mu)\,g(k+1)\right\}$$

και η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.7

Αν $L=0$, δηλαδή κάθε παραγγελία έρχεται ακαριαία, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίπεδο ασφάλειας $r=-1$, δηλαδή να κάνουμε παραγγελίες μόνο όταν έρθει μια ζήτηση και το καθαρό απόθεμα είναι ίσο με μηδέν.
Σ' αυτή την περίπτωση αποφεύγουμε εντελώς τις ελλείψεις χωρίς να χρειάζεται να κρατάμε απόθεμα ασφάλειας.

Αν τώρα έχουμε μια πολιτική (r,q) με $r=-1$, και επίσης $L=0$, παρατηρούμε τα εξής.

Πρώτον επειδή $L=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \overline{B}(s)=0 \quad \forall s$ (από 6.2.5)

$\Rightarrow \overline{I}(s)=s \quad \forall s$ (από 6.2.6)

άρα από (6.2.10): $\overline{I}(r,q)=\frac{1}{q}\sum_{s=0}^{q-1} s = \frac{1}{q}\frac{1}{2}q(q-1)=\frac{1}{2}(q-1)$.

Επίσης η συχνότητα παραγγελιών είναι $\overline{OF}=\frac{\lambda}{q}$.

Επομένως αν το κόστος ανά παραγγελία είναι K κ' το κόστος αποθήκευσης h, τότε το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με

$$C(q)=\frac{K\lambda}{q}+\frac{1}{2}h(q-1) \qquad q=1,2,\ldots$$

πού είναι ίσο με το κόστος για ένα μοντέλο EOQ όπου η ποσότητα παραγγελίας και η ζήτηση είναι ακέραιοι (πρόβλημα 3.8)