ΕΝΟΤΗΤΑ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η γνώση που απαιτείται για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου είναι ένα θέμα που έχει προκαλέσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον από τα μέσα της δεκαετίας του 1980. Ο L. Shulman (1986, 1987) ήταν ο πρώτος ο οποίος επιχείρησε να αναλύσει τη γνώση για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου σε επιμέρους συνιστώσες. Σύμφωνα με τον Shulman, τρεις σημαντικές συνιστώσες της γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία ενός αντικειμένου είναι η Θεματική Γνώση του Περιεχομένου (Subject Matter Content Knowledge) (ΘΓΠ), η Παιδαγωγική Γνώση του Περιεχομένου (Pedagogical Content Knowledge) (ΠΓΠ) και η Γνώση του Αναλυτικού Προγράμματος (Curricular Content Knowledge) (ΓΑΠ). Η παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου, σύμφωνα με τον Shulman αποτελεί συγκερασμό μαθηματικής και παιδαγωγικής γνώσης και αφορά στη γνώση των τρόπων με τους οποίους η μαθηματική γνώση θα γίνει κατανοητή στους άλλους. Ακολούθησαν εκατοντάδες έρευνες σχετικές με αυτό το θέμα. Πολλές από αυτές στηρίχθηκαν στην δουλειά του Shulman και προσπάθησαν να την εξειδικεύσουν στη διδασκαλία συγκεκριμένων επιστημονικών περιοχών, ενώ άλλες πρότειναν ένα διαφορετικό πλαίσιο ανάλυσης. Ειδικότερα όσον αφορά στη διδασκαλία των Μαθηματικών, από τη δεκαετία του 1990 και μετά υπάρχει πλήθος ερευνητικών εργασιών προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση. Ένα από τα θεωρητικά πλαίσια για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, το οποίο επιχειρεί να εξειδικεύσει το πλαίσιο του Shulman, είναι αυτό που δημιουργήθηκε από την ομάδα της D. Ball (Ball, Thames and Phelps, 2008). Σύμφωνα με αυτό το θεωρητικό πλαίσιο η ΘΓΠ αποτελείται από την Κοινή Γνώση του Περιεχομένου (Common Content Knowledge) (ΚΓΠ), την Εξιδεικευμένη Γνώση του Περιεχομένου (Specialized Content Knowledge) (ΕΓΠ) και τη Γνώση του Ορίζοντα του Περιεχομένου (Horizon Content Knowledge) (ΓΟΠ). Η ΚΓΠ αποτελεί τη γνώση του περιεχομένου που απαιτείται και για άλλες εργασίες πέραν της διδασκαλίας, η ΕΓΠ αποτελεί την γνώση του περιεχομένου που απαιτείται ειδικά για τη διδασκαλία και η ΓΟΠ αποτελεί τη γνώση του ευρύτερου μαθηματικού πλαισίου εντός του οποίου βρίσκεται το αντικείμενο της διδασκαλίας καθώς και τις συνδέσεις που αυτό έχει με άλλες περιοχές των Μαθηματικών. Η ΠΓΠ αποτελείται από τη Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών (ΓΠΜ), τη Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας (ΓΠΔ) και τη Γνώση Περιεχομένου και Προγράμματος Σπουδών (ΓΠΠ). Η ΓΠΜ συνδυάζει τη γνώση του περιεχομένου και τη γνώση των μαθητών. Είναι η γνώση του πως πιθανόν να σκέφτονται οι μαθητές και τι μπορεί να τους δημιουργήσει προβλήματα σε σχέση με το συγκεκριμένο αντικείμενο. Η ΓΠΔ συνδυάζει τη γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας του. Είναι η γνώση για έναν αποτελεσματικό σχεδιασμό της διδασκαλίας του συγκεκριμένου αντικειμένου. Τέλος η ΓΠΠ αφορά στη γνώση του Προγράμματος Σπουδών και στο πως το συγκεκριμένο περιεχόμενο εντάσσεται σε αυτό. Τα παραπάνω συστατικά στοιχεία της γνώσης για τη διδασκαλία των Μαθηματικών δεν είναι διακριτά. Δεν μπορεί π.χ. να είναι τελείως σαφές αν η γνώση ενός συγκεκριμένου θεωρήματος ανήκει στην «κοινή» ή στην «εξιδεικευμένη» γνώση. Το πλαίσιο όμως της Ball και των συνεργατών της μπορεί να αξιοποιηθεί ως εργαλείο για τον σχεδιασμό και τη διδασκαλία ενός μαθήματος που έχει στόχο να αναπτύξει τις γνώσεις για τη διδασκαλία μιας ορισμένης περιοχής

των Μαθηματικών. Στο μάθημα «Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού» γίνεται προσπάθεια να αξιοποιηθεί αυτό το εργαλείο.
Οι ενότητες 2-4 αφορούν σε γενικά θέματα σχετικά με τη μάθηση και τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού. Ο Απειροστικός Λογισμός μελετά πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Επομένως, προ απαιτούμενες γνώσεις για τη μάθηση του είναι η επαρκής γνώση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και της έννοιας της συνάρτησης. Αυτό είναι το αντικείμενο της ενότητας 5
Οι ενότητες 6-9 αφορούν στη μάθηση και τη διδασκαλία των βασικών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού, δηλαδή του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Η διαπραγμάτευση αυτών των ενοτήτων βασίζεται σε συγκεκριμένες έργα τα οποία περιγράφουν υποθετικές διδακτικές καταστάσεις που σχετίζονται με την υπό διαπραγμάτευση έννοια. Τα έργα αυτά θα τα έχουν στη διάθεση τους οι φοιτητές και οι φοιτήτριες τουλάχιστον μια εβδομάδα πριν το αντίστοιχο μάθημα, θα τα επεξεργαστούν στηριζόμενοι στην εμπειρία τους και στη σχετική βιβλιογραφία και πριν τη συζήτηση τους στην τάξη θα ανεβάσουν τις απαντήσεις τους στην ηλεκτρονική τάξη του μαθήματος. Στη συνέχεια, κατά τη διάρκεια του μαθήματος, θα γίνει συζήτηση στην τάξη για το κάθε έργο και θα αναπτυχθούν οι σχετικές απόψεις. Από τη συζήτηση και την αντιπαράθεση διαφορετικών απόψεων θα προκύψουν θέματα που αφορούν στοιχεία της Θεματικής και της Παιδαγωγικής Γνώσης του Περιεχομένου σχετικά με το αντικείμενο του μαθήματος, τα οποία θα αναλυθούν με βάση τις προσωπικές εμπειρίες των συμμετεχόντων και την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Τέτοια θέματα μπορεί να αφορούν πλευρές της θεματικής γνώσης του περιεχομένου, ιδιαίτερα της εξειδικευμένης γνώσης και του ορίζοντα, οι οποίες δεν χρησιμοποιούνται άμεσα στη διδασκαλία του αντικειμένου στη σχολική τάξη, αλλά η γνώση τους ενισχύει την παιδαγωγική γνώση του περιεχομένου του εκπαιδευτικού και τον βοηθάει να σχεδιάσει μαθηματικά σωστές διδακτικές ενέργειες. Για παράδειγμα, η γνώση από τον εκπαιδευτικό της έννοιας της συνεκτικότητας και της σχέσης συνέχειας και συνεκτικού γραφήματος συνάρτησης (Εξιδεικευμένη Γνώση του Περιεχομένου) του δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσει και να συζητήσει στην τάξη κατάλληλες γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που θα βοηθήσουν τους μαθητές του να σχηματίσουν μια μαθηματικά σωστή εικόνα για την έννοια της συνεχούς συνάρτησης (Γνώση Περιεχομένου και Διδασκαλίας), κάτι που έχει εντοπιστεί από τη βιβλιογραφία ως πρόβλημα για τους μαθητές (Γνώση Περιεχομένου και Μαθητών). Μέσα από αυτή τη διαδικασία στόχος είναι να αναπτυχθεί η συνολική γνώση των συμμετεχόντων για τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού και να συνδεθούν οι διαφορετικές πλευρές αυτής της γνώσης. Σε αυτές τις ενότητες, εκτός από τις δραστηριότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, υπάρχουν ενδεικτικά παραδείγματα διδασκαλίας εννοιών και θεωρημάτων.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

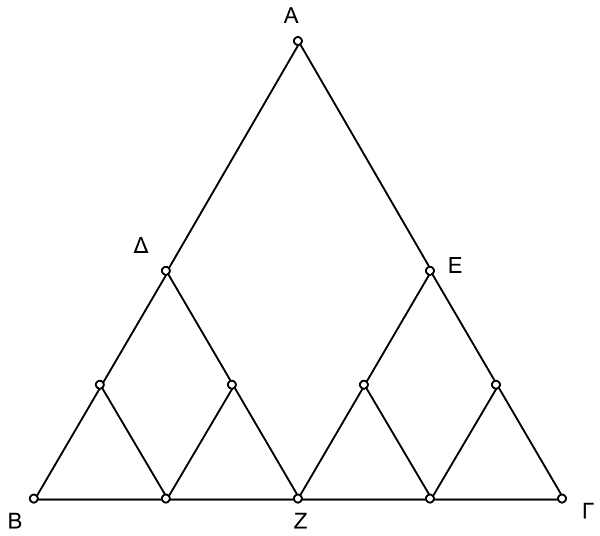
Σύμφωνα με τον D.Tall (2004) μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κόσμους που αφορούν στον τρόπο προσέγγισης των Μαθηματικών. Δηλαδή, τρεις κόσμους μαθηματικής σκέψης. Τον ενσώματο (embodied), τον διαδικασιοεννοιολογικό (proceptual) και τον αξιωματικό (axiomatic) κόσμο. Ο ενσώματος κόσμος βασίζεται στις αισθήσεις μας και στη δράση και αποτελεί τον αρχικό τρόπο μαθηματικής σκέψης. Στο πλαίσιο αυτού του κόσμου αρχίζει ο μαθητής από την προδημοτική εκπαίδευση να μαθαίνει και να σκέπτεται Μαθηματικά. Ο διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος είναι ο κόσμος των συμβόλων και των διαδικασιών. Στο πλαίσιο αυτού του κόσμου ο μαθητής κατανοεί τις έννοιες μέσα από τις διαδικασίες που εκτελεί με την χρήση των μαθηματικών συμβόλων και αυτό αποτελεί το δεύτερο στάδιο της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Ο αξιωματικός κόσμος είναι το τρίτο στάδιο. Είναι ο κόσμος στον οποίο τα Μαθηματικά αποτελούν ένα πλήρες οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα. Με τη χρήση αυτών, ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται οι πρώτες μαθηματικές προτάσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τις αποδειχθείσες προτάσεις αποδεικνύονται νέες προτάσεις κ.ο.κ. Έτσι οικοδομείται ο αξιωματικός κόσμος, που αποτελεί και το ανώτερο στάδιο της μαθηματικής σκέψης. Οι δύο πρώτοι κόσμοι, ο ενσώματος και ο διαδικασιοεννοιολογικός, είναι οι κόσμοι που κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα. Το πέρασμα από τον ενσώματο στον διαδικασιοεννοιολογικό γίνεται σταδιακά. Οι δύο κόσμοι συνυπάρχουν μέχρις ότου να φτάσει ο μαθητής να κατακτήσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης σε τέτοιο βαθμό, ώστε να θεωρείται ότι δεν του χρειάζεται ο προηγούμενος. Έτσι ο ενσώματος τρόπος σκέψης παύει να χρησιμοποιείται, σταδιακά εξασθενεί και ουσιαστικά εξαφανίζεται. Ο αξιωματικός τρόπος σκέψης αρχίζει να διαμορφώνεται στο Λύκειο και ολοκληρώνεται στο Πανεπιστήμιο.

Ο ενσώματος τρόπος σκέψης, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση. Ο μαθητής σκέφτεται Μαθηματικά, ενεργώντας σε κάτι που μπορεί να αντιληφθεί με τις αισθήσεις του. Ο ενσώματος τρόπος σκέψης στη σχολική εκπαίδευση χρησιμοποιείται κυρίως για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών στο δημοτικό σχολείο. Στο γυμνάσιο χρησιμοποιείται ελάχιστα, κυρίως μέσα από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, χωρίς να παίζει σημαντικό ρόλο. Ελάχιστες φορές ζητείται από τον μαθητή να λύσει προβλήματα στηριζόμενος σε γραφικές παραστάσεις και ακόμη λιγότερες να συνδυάσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης που κυρίως χρησιμοποιεί με τον ενσώματο, δουλεύοντας πάνω στο ίδιο θέμα. Η αντίληψη που κυριαρχεί είναι ότι ο μαθητής πρέπει να μάθει να σκέφτεται χρησιμοποιώντας μόνο τις συμβολικές αναπαραστάσεις, δηλαδή μόνο τα τυπικά μαθηματικά. Έτσι, όπως προαναφέρθηκε, σταδιακά εξασθενεί στους μαθητές η δυνατότητα σκέψης στο πλαίσιο του ενσώματου κόσμου και πρακτικά εξαφανίζεται. Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του λυκείου δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό τον τρόπο σκέψης. Έχει περάσει πλήρως στον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης και δεν έχει την ικανότητα να τον συνδέει με τον ενσώματο.

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έρευνες δείχνουν ότι για να αναπτυχθεί ουσιαστικά η μαθηματική σκέψη του μαθητή και να περάσει σε ένα ανώτερο επίπεδο, πρέπει αυτός να μπορεί να συνδυάζει τον ενσώματο και τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης (Christou, Pitta-Pantazi, Souyoul, and Zachariades, 2005). Οι οπτικές αναπαραστάσεις, αποτελούν σημαντικά εργαλεία στο πλαίσιο αυτού του κόσμου. Υπάρχει σημαντική βιβλιογραφία που αφορά στη σημασία αυτών των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών και γενικότερα στη μαθηματική σκέψη, καθώς και στα προβλήματα που συνδέονται με αυτές (π.χ. Arkavi, 2003). Ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να μελετά τις εικόνες και να καταλαβαίνει τι "λένε". Πρέπει να μπορεί να μετατρέπει τις συμβολικές σχέσεις σε εικόνες και να μεταφράζει τις εικόνες σε συμβολικά Μαθηματικά. Η μετάβαση από τα σύμβολα στις εικόνες, δηλαδή η αναπαράσταση του αφηρημένου με κάτι που βλέπει, του δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσει καλύτερα το αφηρημένο και να σκεφτεί πάνω σε αυτό που βλέπει. Η δυνατότητα μετάφρασης από τις εικόνες στα σύμβολα είναι απαραίτητη γιατί μόνον έτσι, δηλαδή μέσα από την αυστηρά τυπική απόδειξη, κατοχυρώνεται και γίνεται αποδεκτή μια μαθηματική αλήθεια. Συμπεράσματα που στηρίζονται αποκλειστικά στην εικόνα μπορεί να είναι εσφαλμένα. Ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου σφάλματος είναι το επόμενο:

Κατασκευάζουμε μια ακολουθία (α_n) με την ακόλουθη διαδικασία. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα μέσα των πλευρών του Δ, Ζ, Ε και κατασκευάζουμε τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ. Θέτουμε α_1 το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΔΖ, ΖΕ και ΕΓ, δηλαδή $\alpha_1 = ΒΔ+ΔΖ+ΖΕ+ΕΓ$. Στα τρίγωνα ΒΔΖ και ΖΕΓ κατασκευάζουμε από δύο τρίγωνα στο κάθε ένα με την ίδια διαδικασία και θέτουμε α_2 το άθροισμα των αντίστοιχων οκτώ ευθυγράμμων τμημάτων (Σχήμα 1). Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μια ακολουθία α_n : n=1,2,....Η ερώτηση είναι που τείνει η ακολουθία α_n. Η εικόνα μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία (α_n) συγκλίνει στο μήκος του ΒΓ. Εύκολα όμως αποδεικνύεται ότι $\alpha_n = ΑΒ+ΑΓ$ για κάθε n=1,2,...., δηλαδή ότι η ακολουθία είναι σταθερή. Άρα συγκλίνει στη σταθερή τιμή της που προφανώς δεν είναι ίση με αυτή που καταλήξαμε εποπτικά.



Σχήμα 1

ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

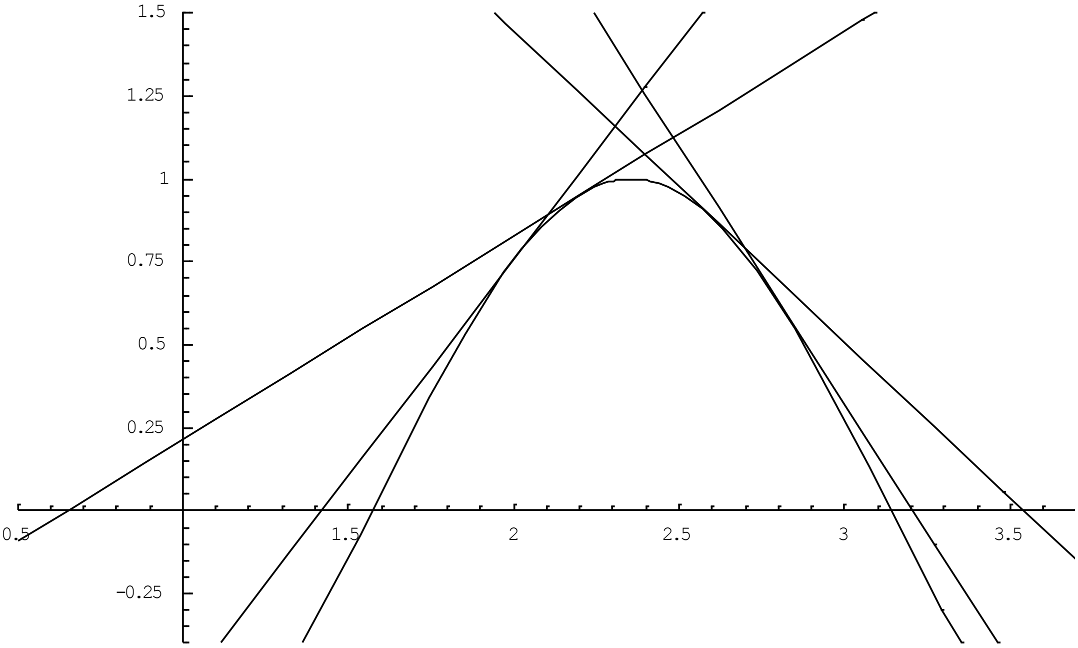
Πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι οπτικές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ώστε συντελέσουν στη βελτίωση της μαθηματικής σκέψης του μαθητή; Θα αναφέρουμε τέσσερις γενικές περιπτώσεις χρήσης των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

I. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

Οι μαθηματικές έννοιες, αν εξαιρέσουμε τις γεωμετρικές, είναι έννοιες αφηρημένες. Οι ορισμοί τους δίνονται με μαθηματικά σύμβολα και η κατανόηση τους από τον μαθητή είναι πολλές φορές ελλιπής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία ή τη λανθασμένη χρήση τους στη λύση ασκήσεων. Η δυνατότητα οπτικοποίησης αυτών των ορισμών, δηλαδή η δυνατότητα αναπαράστασης τους με τρόπο ώστε να γίνουν αντιληπτοί μέσω των αισθήσεων, μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να τους κατανοήσει καλύτερα και να τους χρησιμοποιεί σωστά. Ένα παράδειγμα έννοιας που δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές και εισάγεται στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, είναι η έννοια της απόλυτης τιμής. Ο τυπικός ορισμός μαθαίνεται από πολλούς μαθητές με έναν μάλλον μηχανιστικό τρόπο και αυτό πολλές φορές τους οδηγεί σε λάθη. Επίσης δεν τους βοηθάει να κατανοήσουν πιο δύσκολες έννοιες που θα συναντήσουν αργότερα και που η απόλυτη τιμή παίζει καθοριστικό ρόλο στον ορισμό τους, όπως είναι η έννοια του ορίου. Αν ο μαθητής έχει κατανοήσει την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών σε έναν άξονα και αντιληφθεί την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόσταση του από το μηδέν, καθώς και την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών ως την απόσταση τους πάνω στον άξονα, θα έχει τη δυνατότητα να βλέπει θέματα που συνδέονται με την απόλυτη τιμή και από μια γεωμετρική οπτική. Αυτή η οπτική θα του φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

ΙΙ. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για τη δημιουργία εικασιών.

Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι σημαντικός. Ένας ισχυρισμός προκύπτει πρώτα ως εικασία. Δηλαδή, ξεκινάμε με ένα ανοικτό πρόβλημα που δεν γνωρίζουμε την απάντηση του και μετά από διερεύνηση καταλήγουμε στην εικασία ότι μάλλον ισχύει ένας ισχυρισμός. Στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν δίνεται το απαιτούμενο βάρος στη δημιουργία εικασιών. Δεν αναδεικνύεται ο προβληματισμός μέσα από τον οποίο προέκυψε η διατύπωση των προτάσεων και των θεωρημάτων. Με ποιο τρόπο όμως μπορεί να αναπτυχθεί μέσα στη τάξη ένας προβληματισμός που θα οδηγήσει στη διατύπωση της εικασίας; Σε αυτό σημαντικό ρόλο μπορούν να διαδραματίσουν οι οπτικές αναπαραστάσεις. Ιδιαίτερα σήμερα, με τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας, αυτό μπορεί να γίνει με πολύ καλύτερους όρους σε σχέση με το παρελθόν. Αναφέρουμε ως παράδειγμα ένα σημαντικό θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης που συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του Λυκείου. Είναι το θεώρημα που συνδέει τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της. Αυτό το θεώρημα συνήθως διατυπώνεται και χρησιμοποιείται για τη μελέτη συναρτήσεων. Πως, όμως, σκεφτήκαμε να συνδέσουμε τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της και οδηγηθήκαμε στη διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος; Αυτό το βήμα είναι ένα πολύ σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή και είναι ένα βήμα που μπορεί να γίνει στο πλαίσιο της διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού στο Λύκειο. Η μελέτη της εφαπτομένης σε διάφορα σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης (σχήμα 2) μπορεί να οδηγήσει στην παρατήρηση ότι στα σημεία των διαστημάτων που η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. φθίνουσα) η εφαπτομένη σχηματίζει οξεία (αντ. αμβλεία) γωνία με τον άξονα xx΄. Επομένως η εφαπτομένη αυτής της γωνίας, δηλαδή η παράγωγος της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο, είναι θετική (αντ. αρνητική). Αυτή η μελέτη μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου ο μαθητής μπορεί να βλέπει την κίνηση της εφαπτομένης.



Σχήμα 2

Η παραπάνω παρατήρηση μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην εικασία ότι η μονοτονία μιας συνάρτησης συνδέεται με το πρόσημο της παραγώγου της. Στη συνέχεια περεταίρω μελέτη αυτής της σύνδεσης μπορεί να οδηγήσει στον ισχυρισμό ότι αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα τότε η παράγωγος της είναι μη αρνητική (αντ. μη θετική) στα σημεία αυτού του διαστήματος. Αυτό επιβεβαιώνεται εύκολα με βάση τον ορισμό και τις ιδιότητες της παραγώγου και στη συνέχεια είναι λογικό να τεθεί η ερώτηση αν ισχύει το αντίστροφο. Έτσι μπορούν να προκύψουν σταδιακά τα αντίστοιχα θεωρήματα.

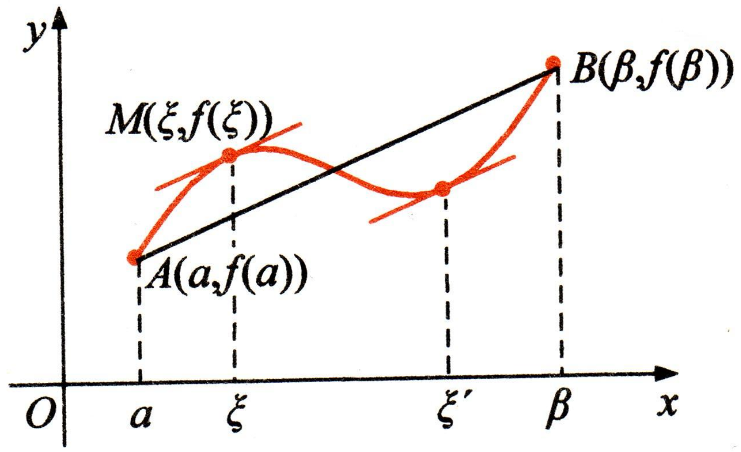
Η μελέτη και η προσεκτική παρατήρηση ειδικών περιπτώσεων στη μαθηματική έρευνα πολλές φορές οδήγησε στη διατύπωση σημαντικών γενικών εικασιών που εν συνεχεία αποδείχθηκαν. Η εφαρμογή τέτοιων διαδικασιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, όχι μόνο στο Λύκειο αλλά και σε μικρότερες τάξεις, αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη του μαθητή. Για να είναι όμως αποτελεσματικές διαδικασίες αυτού του τύπου, πρέπει ο μαθητής να έχει τη δυνατότητα να σκέφτεται πάνω στα σχήματα και να μπορεί να μεταφράζει τα συμπεράσματα σε τυπικά μαθηματικά.

III. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για την περιγραφή Μαθηματικών συμπερασμάτων

Μια μαθηματική πρόταση διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή. Η διατύπωση αυτή πολλές φορές φαίνεται δυσνόητη και ξένη στο μαθητή. Η περιγραφή της με μια οπτική αναπαράσταση, μπορεί να βοηθήσει την καλύτερη κατανόηση της. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού:

“ Για κάθε συνάρτηση f:[a, β] $\rightarrow$ $\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [a, β] και διαφορίσιμη στο (a, β) υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$. ”

Η γεωμετρική αναπαράσταση του θεωρήματος (σχήμα 3) βοηθάει τον μαθητή να καταλάβει τι ουσιαστικά "λέει" το θεώρημα. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση με τις παραπάνω ιδιότητες έχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (*α, f(α)*) και (*β, f(β)*).



Σχήμα 3

IV. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για την περιγραφή διαδικασιών και αποδείξεων

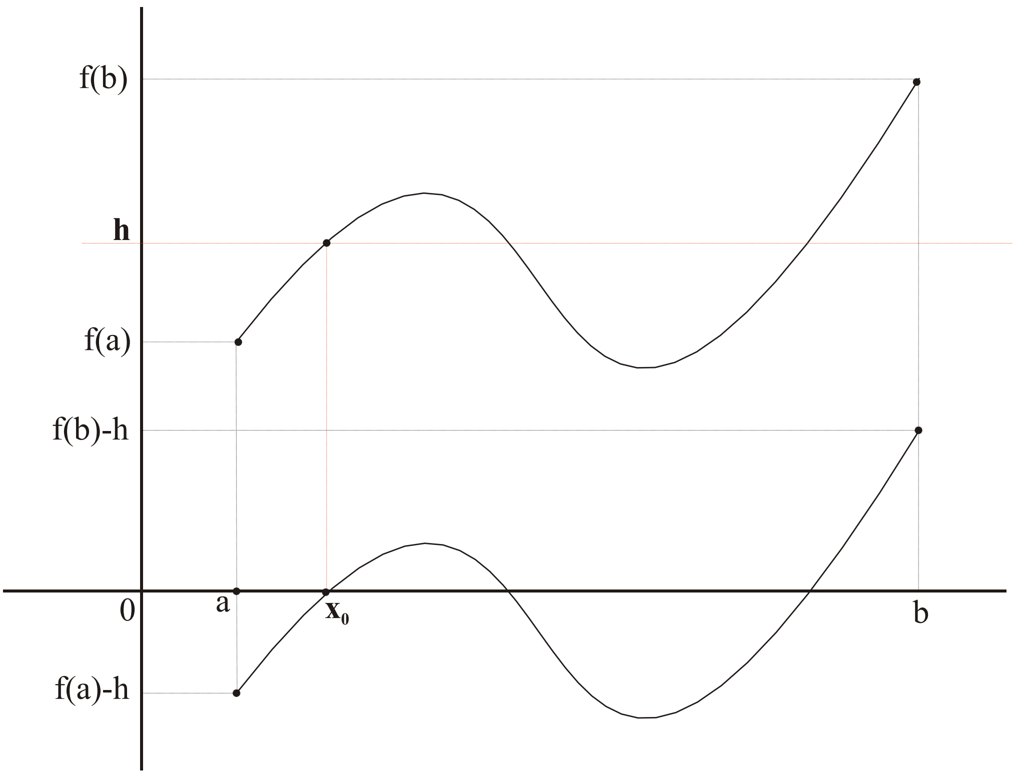
Πολλές φορές διαδικασίες ή αποδείξεις φαίνονται στους μαθητές δύσκολες και δεν μπορούν να τις κατανοήσουν. Αλλά και διαδικασίες ή αποδείξεις που οι μαθητές τις θεωρούν εύκολες, πολλές φορές αυτό που μπορούν να επιτύχουν είναι απλά να τις εφαρμόσουν ή να τις γράψουν όταν τους ζητηθεί. Δεν έχουν όμως κατανοήσει την ουσία τους. Δεν έχουν καταλάβει την ιδέα ή τις ιδέες που κρύβονται πίσω από τη τυπική περιγραφή τους. Η δυνατότητα περιγραφής τέτοιων διαδικασιών ή αποδείξεων με οικίες στους μαθητές αναπαραστάσεις μπορούν να βοηθήσουν ουσιαστικά στη κατανόηση τους. Ένα παράδειγμα μια τέτοιας απόδειξης είναι η απόδειξη του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

" Αν f:[*a, b*] $\rightarrow$ R συνεχής συνάρτηση και $f(a) < h < f(b)$ ή $f(a) < h < f(b)$ τότε υπάρχει $x_0 \in$ (α, b) ώστε $f(x_0)=h$."

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, η οποία υπάρχει στα σχολικά βιβλία, προκύπτει εύκολα από την ειδική περίπτωση για $h=0$, η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Bolzano και υπάρχει στα σχολικά βιβλία χωρίς απόδειξη.

Πράγματι, αν θέσουμε $g:[a, b]\rightarrow R$, με $g(x)=f(x)-h$ για κάθε $x \in [a, b]$, είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in$ (a, b) ώστε $g(x_0)=0$. Άρα $f(x_0)=h$.

Η παραπάνω απόδειξη είναι μια απλή απόδειξη που δεν δημιουργεί πρόβλημα στους μαθητές. Πόσοι όμως από αυτούς κατανοούν την ουσία της; Πόσοι κατανοούν ότι κάνουμε μια μεταφορά της συνάρτησης *f*, ώστε να ικανοποιηθούν οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί το θεώρημα του Bolzano; Η περιγραφή της παραπάνω απόδειξης με το σχήμα 4 ή, πολύ καλύτερα, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή όπου θα φαίνεται η κίνηση, οπτικοποιεί αυτή τη διαδικασία και αναδεικνύει την ιδέα κλειδί που χρησιμοποιείται στην απόδειξη.



Σχήμα 4

Οι αναπαραστάσεις που αναφέραμε παραπάνω είναι όλες γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Δηλαδή έχουν ένα άμεσα μαθηματικό περιεχόμενο. Η οπτικοποίηση όμως μιας μαθηματικής ιδέας δεν γίνεται μόνο μέσα από τέτοιου τύπου αναπαραστάσεις. Υπάρχουν και αναπαραστάσεις που δεν έχουν άμεση σχέση με τα Μαθηματικά, αλλά μπορούν να βοηθήσουν στη κατανόηση μαθηματικών ιδεών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το επόμενο. Τοποθετούμε στη σειρά και σε όρθια θέση τα πλακίδια του γνωστού παιχνιδιού "ντόμινο" ώστε η απόσταση κάθε ενός από το επόμενο του να είναι μικρότερη του ύψους τους. Αν ρίξουμε το πρώτο πλακίδιο τότε θα πέσουν όλα. Γιατί συμβαίνει αυτό; Γιατί πέφτει το πρώτο και ισχύει ότι αν πέσει κάποιο θα πέσει και το επόμενο του. Αυτή είναι η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής την οποία πολλές φορές εφαρμόζουμε για να αποδείξουμε ότι μια σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Πολλές φορές επίσης δίνουμε σε μαθηματικές ιδιότητες μια ονομασία που προκαλεί μια, μη μαθηματική, νοερή εικόνα η οποία αναπαριστά αυτή την ιδιότητα. Για παράδειγμα, η πρόταση:

" Έστω α_n, β_n, γ_n τρεις ακολουθίες με $\alpha_n \le \beta_n \le \gamma_n$ για κάθε n=1,2,..... Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \alpha$ τότε και $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \alpha$."

πολλές φορές αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως «ιδιότητα σάντουιτς» ή «αρχή των αστυνομικών». Οι ονομασίες αυτές προκαλούν νοερές εικόνες που αναπαριστούν την παραπάνω ιδιότητα. Ας φανταστούμε π.χ. δύο αστυνομικούς οι οποίοι έχουν συλλάβει ένα κρατούμενο και τον κρατάνε από τη μια μεριά ο ένας και από την άλλη ο άλλος. Τότε όπου πάνε οι αστυνομικοί εκεί αναγκαστικά θα πάει και ο κρατούμενος. Αυτή η, μη μαθηματική, νοερή εικόνα αναπαριστά την παραπάνω μαθηματική ιδιότητα. Αντίστοιχη νοερή εικόνα προκαλεί και η ονομασία σάντουιτς.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση κατάλληλων οπτικών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες, να καταλάβουν ιδέες που υπάρχουν μέσα σε τυπικές αποδείξεις Για να μπορέσει όμως ο μαθητής να κάνει ουσιαστική χρήση αυτών των αναπαραστάσεων, πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο να είναι τέτοια ώστε να συνδυάζει τα τυπικά μαθηματικά με οπτικές αναπαραστάσεις τους. Να εξασκήσει το μαθητή να χρησιμοποιεί και τις δύο μορφές αναπαράστασης, να γνωρίζει τα όρια τους και να μπορεί να μεταβαίνει από τη μια στην άλλη. Να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί κάθε φορά αυτή που είναι πιο πρόσφορη για να λύσει το πρόβλημα που αντιμετωπίζει, γνωρίζοντας όμως ότι η μαθηματική αλήθεια κατοχυρώνεται μόνο μέσα από την τυπική απόδειξη. Τα παραπάνω θα συνεισφέρουν ουσιαστικά στο να οικοδομήσει ο μαθητής μια πραγματικά μαθηματική σκέψη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52,* 215–241.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389–407.

Christou, C., Pitta-Pantazi, D., Souyoul, A., & and Zachariades, T. (2005). The Embodied, Proceptual, and Formal Worlds in the Context of Functions, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5,* 241-252.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher, 15(2),* 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform, *Harvard Educational Review, 57(1),* 1-23.

Tall, D. (2004). Building Theories: The Three Worlds of Mathematics, *For the Learning of Mathematics, 24(1),* 29-32.