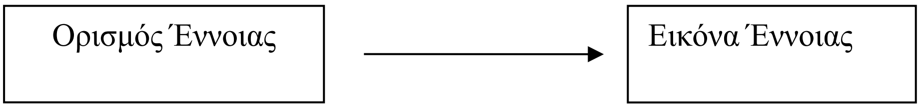
Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τους D. Tall και S. Vinner (1981), με τον όρο «εικόνα έννοιας» (concept image) περιγράφουμε ολόκληρη τη γνωστική δομή η οποία σχετίζεται με μία έννοια. Αυτή περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, τις διαδικασίες και τις ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα μιας έννοιας που έχει διαμορφώσει ένα άτομο δομείται μέσα από τις εμπειρίες του και μεταβάλλεται καθώς το άτομο αυτό ωριμάζει μαθηματικά και συναντά νέα ερεθίσματα που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα μιας έννοιας περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας (concept definition) που γνωρίζει το άτομο (αν γνωρίζει), αλλά είναι κάτι ευρύτερο. Η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της.

Στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής οι περισσότερες λέξεις, όπως π.χ. σπίτι, πορτοκάλι, αυτοκίνητο, γάτα, κ.α., κατανοούνται χωρίς οποιαδήποτε χρήση ορισμών. Υπάρχουν όμως λέξεις της καθημερινής ζωής οι οποίες μπορεί να εισαχθούν μέσω ορισμών. Π.χ. η λέξη «δάσος» μπορεί να εξηγηθεί σε ένα παιδί με την φράση «πάρα πολλά δέντρα μαζί». Ορισμοί όπως αυτός βοηθούν να σχηματιστεί μια εικόνα της έννοιας που εκφράζει αυτή η λέξη. Από τη στιγμή όμως που σχηματίζεται μια εικόνα αυτής της έννοιας ο ορισμός παύει να χρησιμοποιείται. Θα παραμείνει ανενεργός ή ακόμα θα ξεχαστεί και κατά το χειρισμό των προτάσεων που σχετίζονται με την έννοια θα γίνεται χρήση μόνο της εικόνας που δημιουργήθηκε.

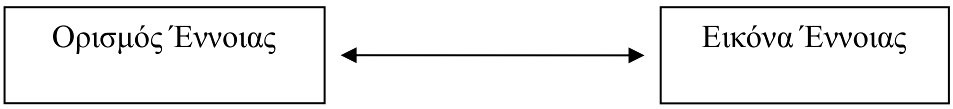
Στα Μαθηματικά όμως, οι ορισμοί έχουν διαφορετικό και εξαιρετικά σημαντικό ρόλο σε σχέση με αυτόν που έχουν στην καθημερινή ζωή. Όχι μόνο βοηθούν στο σχηματισμό της εικόνας της έννοιας αλλά διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο. Συνεπώς, στα Μαθηματικά απαιτούνται κάποιες νοητικές συνήθειες που είναι εντελώς διαφορετικές από εκείνες που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής. Είναι όμως πολύ πιθανό, τουλάχιστον στην αρχή της διαδικασίας της μάθησης, οι νοητικές συνήθειες που διαμορφώνονται από την καθημερινή ζωή να κυριαρχήσουν πάνω στις νοητικές συνήθειες που απαιτούνται στα Μαθηματικά. Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά τη σύνδεση του ορισμού μιας έννοιας με την εικόνα της έννοιας, τον τρόπο χρήσης αυτών στα Μαθηματικά, καθώς και πως αυτός μπορεί να επηρεαστεί αρνητικά από τον αντίστοιχο τρόπο χρήσης στην καθημερινή ζωή.

Ο Vinner (1991) στην προσπάθεια του να περιγράψει τον τρόπο που συνδέονται ο ορισμός μιας έννοιας με την εικόνα της έννοιας, απομόνωσε τον ορισμό από τα υπόλοιπα συστατικά της εικόνας και θεώρησε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική δομή που έχει διαμορφώσει ένα άτομο για την έννοια. Το ένα κελί αφορά στον *ορισμό της έννοιας* και το δεύτερο στην *εικόνα της έννοιας* (χωρίς να περιλαμβάνεται σε αυτό ο ορισμός). Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί στις περιπτώσεις που απλά απομνημονεύεται ο ορισμός της έννοιας. Πολλοί θεωρούν ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα ελέγχεται πλήρως από αυτόν. Δηλαδή, θεωρούν ότι τα δύο κελιά συνδέονται με μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό έννοιας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1: Γνωστική ανάπτυξη μιας έννοιας

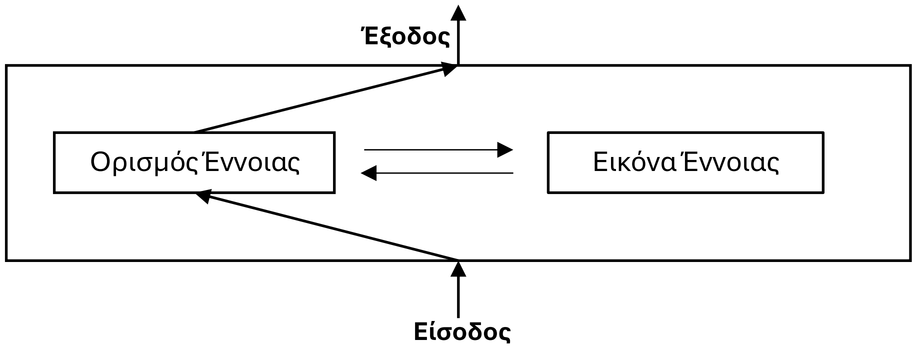
Η διαμόρφωση των δύο κελιών όμως μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Μπορεί να διαμορφωθούν παράλληλα με αλληλεπίδραση μεταξύ των κελιών αλλά μπορούν να διαμορφωθούν και ανεξάρτητα.
Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να έχει σχηματίσει εικόνα για τα συστήματα συντεταγμένων, ως αποτέλεσμα της παρατήρησης και μελέτης πολλών γραφικών παραστάσεων. Σύμφωνα με αυτή την εικόνα, οι δύο άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι μεταξύ τους κάθετοι. Στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής μπορεί να διαμορφώσει ως ορισμό του συστήματος συντεταγμένων ότι είναι δύο κάθετοι άξονες. Αργότερα μπορεί να μάθει στο μάθημα ότι ένα σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από δύο τεμνόμενους (όχι υποχρεωτικά κάθετους) άξονες, οπότε το περιεχόμενο του κελιού που περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας θα διαφοροποιηθεί.
Στη συνέχεια τρία είναι τα δυνατά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν:
i) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να μεταβληθεί ώστε να συμπεριλάβει και τα συστήματα συντεταγμένων των οποίων οι άξονες δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. Αυτό αποτελεί μια ικανοποιητική ανακατασκευή της εικόνας.
ii) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη και το κελί του ορισμού για ένα μικρό διάστημα να περιέχει τον ορισμό που έμαθε ο μαθητής, αλλά σύντομα αυτός ο ορισμός να ξεχαστεί. Στην περίπτωση αυτή, όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα αναφερθεί πάλι σε σύστημα με κάθετους άξονες. Σε αυτήν την περίπτωση ο ορισμός όχι μόνο δεν επηρέασε την εικόνα αλλά γρήγορα ξεχάστηκε.
iii) Και τα δύο κελιά να παραμείνουν αμετάβλητα. Όταν ζητηθεί από τον μαθητή να ορίσει τι είναι σύστημα συντεταγμένων θα επαναλάβει τον ορισμό που έμαθε στο μάθημα, αλλά σε όλες τις άλλες καταστάσεις θα σκεφτεί το σύστημα συντεταγμένων ως δύο κάθετους άξονες.
Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.



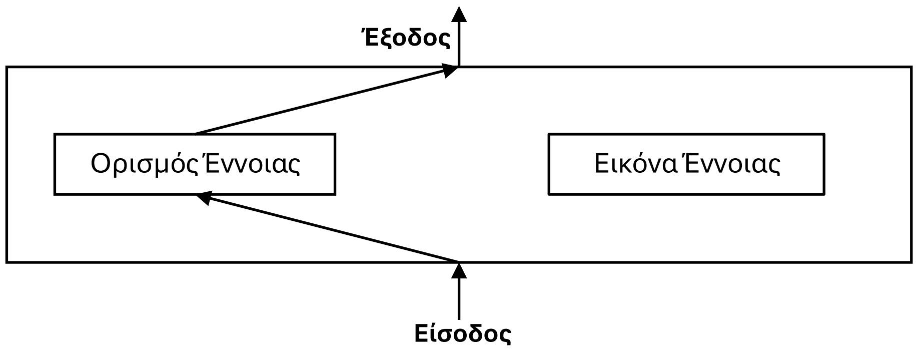
Σχήμα 2: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

Το σχήμα 2 αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των περιεχομένων των δύο κελιών.

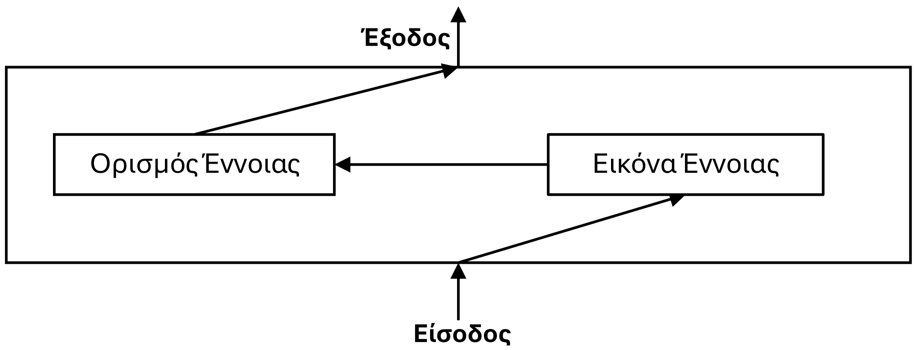
Εκτός από τη διαδικασία του σχηματισμού μιας έννοιας, τα δύο κελιά μπορεί να ενεργοποιηθούν και κατά τη διαδικασία της επίλυσης προβλήματος. Όταν τίθεται ένα πρόβλημα σε έναν μαθητή, τα κελιά της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Οι μαθηματικά σωστές διανοητικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος σχηματικά εκφράζονται με ένα από τα τρία παρακάτω σχήματα. Τα σχήματα αντιπροσωπεύουν μόνο την πτυχή της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας που εμπλέκονται στη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος και τα βέλη στα σχήματα αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ένα γνωστικό σύστημα ενδέχεται να λειτουργήσει.



Σχήμα 3: Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας

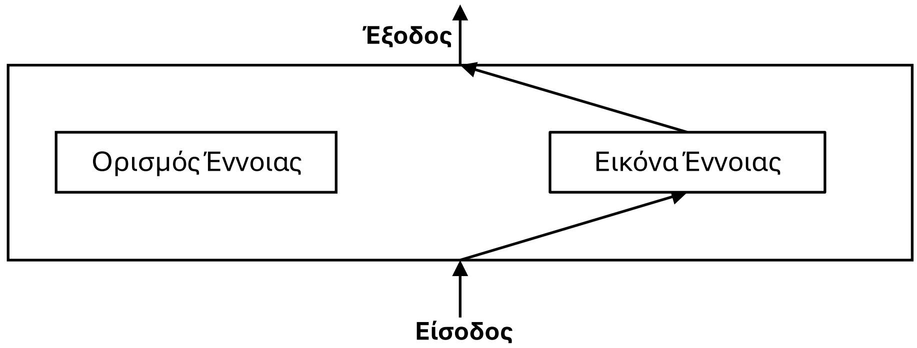


Σχήμα 4: Καθαρά τυπική αφαίρεση



Σχήμα 5: Αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω σχημάτων είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι διανοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας και η τελική απάντηση προκύπτει από την χρήση αυτού. Αυτό είναι και η μαθηματικά σωστή διαδικασία. Όπως όμως έχει προκύψει από αρκετές έρευνες, στη πράξη με τους μαθητές δεν συμβαίνει πάντοτε αυτό. Ερευνητικά αποτελέσματα, όπως θα αναφέρουμε παρακάτω, δείχνουν ότι ένα πιο κατάλληλο μοντέλο για τις διαδικασίες που ακολουθούν στη πράξη οι περισσότεροι μαθητές είναι το ακόλουθο:

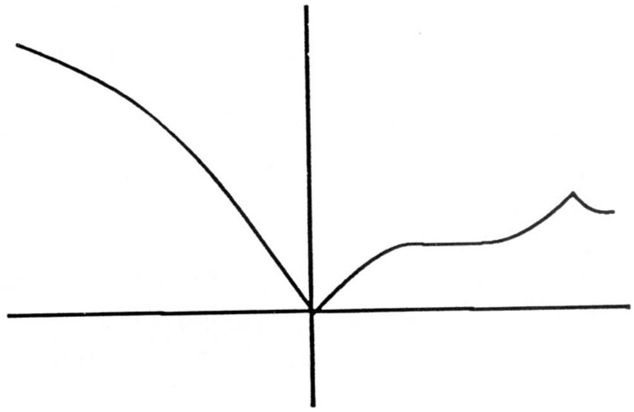


Σχήμα 6 **:** Διαισθητική απάντηση

Εδώ το κελί του ορισμού έννοιας, αν και μπορεί να μην είναι κενό, δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή κυριαρχεί ο τρόπος σκέψης που έχει συνηθίσει ο μαθητής στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής και έτσι αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Όταν η αναφορά μόνο στο κελί της εικόνας της έννοιας οδηγεί τον μαθητή σε σωστές απαντήσεις δεν του δημιουργείται η ανάγκη να αλλάξει τον τρόπο σκέψης που έχει συνηθίσει στην καθημερινή ζωή και να χρησιμοποιεί τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Μόνο τα μη στερεότυπα προβλήματα, στα οποία οι ελλιπείς εικόνες έννοιας μπορεί να είναι παραπλανητικές, μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν τον ορισμό της έννοιας.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα μιας μελέτης που ενισχύει την άποψη ότι η της πλειοψηφία των μαθητών, όταν απαντούν σε ερωτήσεις που αφορούν σε μια μαθηματική έννοια, δεν χρησιμοποιούν τον ορισμό της έννοιας αλλά φαίνεται να στηρίζονται στην εικόνα που έχει σχηματίσει για αυτήν (Vinner, 1991). Οι ερωτήσεις που θα παρουσιάσουμε αφορούν στην έννοια της συνάρτησης και δόθηκαν σε 147 μαθητές οι οποίοι παρακολουθούσαν Μαθηματικά υψηλού επιπέδου στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Με βάση το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, θα λέγαμε ότι παρακολουθούσαν Μαθηματικά Θετικού Προσανατολισμού. Στους μαθητές αυτούς δόθηκαν οι παρακάτω ερωτήσεις:

1. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε αριθμός διάφορος του μηδενός αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του και το 0 αντιστοιχίζεται στο -1;
2. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε θετικός αριθμός αντιστοιχίζεται στο 1, κάθε αρνητικός αντιστοιχίζεται στο -1 και το 0 στο 0;
3. Υπάρχει συνάρτηση η γραφική παράσταση της οποίας να είναι η ακόλουθη; (σχήμα 7)



Σχήμα 7

4. Κατά την άποψή σας τι είναι συνάρτηση;

Στις πρώτες τρεις ερωτήσεις οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ «ναι» ή «όχι» και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης που είχε διδαχθεί σε όλους τους μαθητές ήταν ότι, συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων που σε κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου. Παρά ταύτα, μόνο το 57% των μαθητών έδωσε αυτόν ή κάτι ισοδύναμο με αυτόν τον ορισμό ως απάντηση στην ερώτηση 4. Το 14% των μαθητών είπε ότι μια συνάρτηση είναι ένας *κανόνας* αντιστοίχισης και απέρριψαν τη δυνατότητα μιας αντιστοιχίας η οποία δεν βασίζεται σε κάποιο κανόνα. Ένα επιπλέον 14% υποστήριξε ότι μια συνάρτηση είναι ένας τύπος ή μια εξίσωση. Το υπόλοιπο ποσοστό δεν έδωσε ικανοποιητική απάντηση ή δεν απάντησε. Σε ότι αφορά στις εικόνες έννοιας προέκυψε ότι σε συγκεκριμένες καταστάσεις (στις ερωτήσεις 1 και 2) μεταξύ του ενός τρίτου και των δύο τρίτων των μαθητών θεωρούσαν ότι μια συνάρτηση θα πρέπει να δίνεται από έναν ενιαίο τύπο ή, εάν δίνονται δύο τύποι, τότε θα πρέπει τα επιμέρους πεδία ορισμού για τον κάθε τύπο να είναι διαστήματα. Ένας κανόνας για ένα μόνο σημείο (όπως στην ερώτηση 1) δεν δίνει συνάρτηση. Μερικοί μαθητές θεώρησαν ότι οι αντιστοιχίες οι οποίες δεν δίνονται από έναν αλγεβρικό τύπο δεν είναι συναρτήσεις, εκτός αν η μαθηματική κοινότητα τις έχει θεωρήσει ως συναρτήσεις με το να τους δώσει ένα όνομα ή μια ειδική αναφορά. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 2). Άλλοι μαθητές (περίπου τα 2/5) πίστευαν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κ.α. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 3.) Έτσι, πολλοί μαθητές που όρισαν την «συνάρτηση» σωστά δεν χρησιμοποιούσαν τον ορισμό της όταν απαντούσαν τις ερωτήσεις 1-3. Μόνο το ένα τρίτο των μαθητών που έδωσαν το σωστό ορισμό της συνάρτησης απάντησε επίσης σωστά στις ερωτήσεις 1-3. Επίσης, όλοι οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένο ορισμό δεν απάντησαν σωστά στις ερωτήσεις 1-3.